

УДК 517.929.4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ  
РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ  
УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ  
ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ

И. И. Матвеева, А. В. Хмиль

**Аннотация.** Рассматривается класс систем нелинейных разностных уравнений с переменным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах. Исследована асимптотическая устойчивость нулевого решения, получена оценка на множество притяжения нулевого решения и установлены оценки, характеризующие скорости стабилизации решений систем на бесконечности. При получении результатов используется функционал Ляпунова – Красовского специального вида.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.306

**Ключевые слова:** разностные уравнения с запаздыванием, периодические коэффициенты, функционал Ляпунова – Красовского, оценки решений, скорость стабилизации.

*Посвящается нашему Учителю  
профессору Демиденко Геннадию Владимировичу*

**Введение**

В работе рассматриваются системы разностных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах следующего вида:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B(n)x_{n-\tau(n)} + F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (0.1)$$

где  $\{A(n)\}$ ,  $\{B(n)\}$  — последовательности  $N$ -периодических матриц размера  $m \times m$ , т. е.

$$A(n + N) = A(n), \quad B(n + N) = B(n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$\tau(n) \in \mathbb{N}$  — запаздывание,  $1 \leq \tau(n) \leq \tau < \infty$ ,  $F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau)$  — вектор-функция, удовлетворяющая оценке

$$\|F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau)\| \leq q \|u_0\|^{1+\omega}, \quad u_j \in \mathbb{C}^m, \quad j = 0, 1, \dots, \tau, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (0.2)$$

$\omega, q > 0$ . Цель работы — изучение асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (0.1) и получение оценок решений  $\{x_n\}$ , характеризующих скорость стабилизации при  $n \rightarrow \infty$ .

---

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

© 2026 Матвеева И. И., Хмиль А. В.

Хорошо известно, что разностные уравнения с запаздыванием используются при моделировании различных процессов в биологии, химии, экономике, социологии и др. Одной из важных является проблема устойчивости решений возникающих уравнений и систем. Последние 30 лет проводятся активные исследования этой проблемы для различных классов разностных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–14] и ссылки в этих работах). При изучении устойчивости применяются аналоги методов, используемых в теории функционально-дифференциальных уравнений (спектральные методы, метод неравенств типа Халаяна, метод функций Ляпунова и функционалов Ляпунова — Красовского, построение решения в операторном виде, установление связей между обыкновенными дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями с запаздыванием и т. д.). В настоящее время крайне мало работ, в которых рассматриваются нелинейные разностные уравнения с переменным запаздыванием.

Системы вида (0.1) с постоянными коэффициентами ( $A(n) \equiv A$ ,  $B(n) \equiv B$ ) рассматривались в [15, 16]. С использованием функционала Ляпунова — Красовского специального вида в [15] исследовалась устойчивость нулевого решения в линейном случае ( $F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau) \equiv 0$ ), в [16] — в нелинейном случае. Системы вида (0.1) с  $N$ -периодическими коэффициентами в линейных членах рассматривались в [17, 18]. В [17] изучалась асимптотическая устойчивость нулевого решения линейных систем ( $F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau) \equiv 0$ ), в [18] — квазилинейных систем ( $\omega = 0$ ). В данной работе изучается более сложный нелинейный случай ( $\omega > 0$ ). При проведении исследований мы будем использовать функционал Ляпунова — Красовского

$$v(n, x) = \langle H(n)x_n, x_n \rangle + \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j \rangle, \quad (0.3)$$

где  $H(n) = H(n + N)$ ,  $K_0, K_1, \dots, K_{\tau-1}$  — некоторые эрмитовы положительно определенные матрицы. Этот функционал был предложен в [17] и является дискретным аналогом функционала Ляпунова — Красовского

$$\langle H(t)y(t), y(t) \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds,$$

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad K(s) = K^*(s) > 0, \quad s \in [0, \tau],$$

введенного в [19] для исследования асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах [20]

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t > 0,$$

где  $A(t), B(t)$  — матрицы с  $T$ -периодическими коэффициентами.

Используя функционал (0.3), мы установим оценку на множество притяжения нулевого решения нелинейных систем вида (0.1) и получим оценку на скорость стабилизации решений этих систем на бесконечности. В первом параграфе содержатся вспомогательные результаты, которые будут использоваться во втором параграфе при получении основных результатов.

§ 1. Предварительные сведения

Рассмотрим линейную систему разностных уравнений с запаздыванием и периодическими коэффициентами

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B(n)x_{n-\tau(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

где  $\{A(n)\}$ ,  $\{B(n)\}$  — последовательности  $N$ -периодических матриц размера  $m \times m$ ,  $\tau(n) \in \mathbb{N}$  — запаздывание,  $1 \leq \tau(n) \leq \tau < \infty$ . Очевидно, эту систему можно записать в виде следующей системы линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n)x_{n-j}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1.2}$$

где

$$B_j(n) = \begin{cases} B(n) & \text{при } j = \tau(n), \\ 0 & \text{при } j \neq \tau(n). \end{cases} \tag{1.3}$$

При изучении асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.2) в [17] использовался функционал Ляпунова — Красовского (0.3). Были установлены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.2), а следовательно, и (1.1), при этом также получена оценка на скорость убывания решения  $\{x_n\}$  системы (1.1) с заданными начальными условиями

$$x_0, x_{-1}, \dots, x_{-\tau} \tag{1.4}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Приведем соответствующие результаты из работы [17].

Всюду далее  $S > 0$  ( $S < 0$ ) означает, что  $S$  — эрмитова положительно (отрицательно) определенная матрица.

**Теорема 1** [17]. *Предположим, что существуют эрмитовы положительно определенные матрицы*

$$H(n), \quad K_j, \quad j = 0, 1, \dots, \tau,$$

такие, что

$$H(n) = H(n + N), \quad \Delta_j = K_{j-1} - K_j > 0, \quad j = 1, \dots, \tau,$$

и составные матрицы

$$C(n) = - \begin{pmatrix} C_{00}(n) & A^*(n)H(n+1)B_1(n) & \dots & A^*(n)H(n+1)B_{\tau}(n) \\ B_1^*(n)H(n+1)A(n) & C_{11}(n) & \dots & B_1^*(n)H(n+1)B_{\tau}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\tau}^*(n)H(n+1)A(n) & B_{\tau}^*(n)H(n+1)B_1(n) & \dots & C_{\tau\tau}(n) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

с элементами

$$C_{00}(n) = A^*(n)H(n+1)A(n) - H(n) + K_0,$$

$$C_{jj}(n) = B_j^*(n)H(n+1)B_j(n) - \frac{1}{2}\Delta_j, \quad j = 1, \dots, \tau - 1,$$

$$C_{\tau\tau}(n) = B_{\tau}^*(n)H(n+1)B_{\tau}(n) - K_{\tau}$$

положительно определены. Тогда нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Из условий на  $A(n)$ ,  $B(n)$ ,  $\tau(n)$  вытекает, что количество различных матриц  $C(n)$  конечно. Следовательно, при выполнении условий теоремы 1 существует константа  $c_1 > 0$  такая, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  справедлива оценка

$$\left\langle C(n) \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{\tau} \end{pmatrix} \right\rangle \geq c_1 \sum_{i=0}^{\tau} \|u_i\|^2, \quad u_i \in \mathbb{C}^m. \tag{1.6}$$

**Теорема 2** [17]. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Пусть  $\varkappa_j \in (0, 1)$ ,  $j = 1, 2, \dots, \tau$ , такие, что*

$$-\frac{1}{2}\Delta_i + \varkappa_i K_{i-1} \leq 0, \quad i = 1, \dots, \tau - 1, \quad -\Delta_\tau + \varkappa_\tau K_{\tau-1} \leq 0. \quad (1.7)$$

Тогда для решения начальной задачи (1.1), (1.4) справедлива оценка

$$\|x_n\| \leq \left[ (h_1(n))^{-1} \prod_{j=0}^{r-1} (1 - \varepsilon_j) \varepsilon^k v(0, x) \right]^{1/2}, \quad (1.8)$$

$$n = kN + r, \quad r = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $h_1(n) > 0$  — минимальное собственное значение матрицы  $H(n)$ ,

$$v(0, x) = \langle H(0)x_0, x_0 \rangle + \sum_{j=-\tau}^{-1} \langle K_{-j-1}x_j, x_j \rangle, \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_j = \min \left\{ \varkappa_1, \dots, \varkappa_\tau, \frac{c_1}{\|H(j)\|} \right\}, \quad 0 < \varepsilon_j < 1, \quad \varepsilon = \prod_{j=0}^{N-1} (1 - \varepsilon_j). \quad (1.10)$$

В предположении, что выполнены условия теоремы 1, с использованием функционала (0.3) в следующем параграфе сформулируем и докажем основные результаты работы.

## § 2. Основные результаты

Рассмотрим нелинейную систему разностных уравнений вида (0.1). Поскольку запаздывание ограничено, систему (0.1) можно записать в виде

$$x_{n+1} = A(n)x_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n)x_{n-j} + F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

где матрицы  $B_j(n)$  определены в (1.3). Рассмотрим для системы (2.1) начальную задачу с заданными начальными условиями

$$x_0, x_{-1}, \dots, x_{-\tau}, \quad x_j \in \mathbb{C}^m. \quad (2.2)$$

Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1. Для формулировки результатов введем следующие обозначения:

$$\Lambda_0 = 1 - \varepsilon_0 + 2q\|H(1)\|\|A(0)\|(h_1(0))^{-1-\omega/2}(v(0, x))^{\omega/2} + q^2\|H(1)\| \left( \frac{\|H(1)\|\|B(0)\|^2}{c_1} + 1 \right) (h_1(0))^{-1-\omega}(v(0, x))^\omega, \quad (2.3)$$

$$\Lambda_j = 1 - \varepsilon_j + 2q\|H(j+1)\|\|A(j)\|(h_1(j))^{-1-\omega/2}M_{j-1}^{\omega/2}(v(0, x))^{\omega/2} + q^2\|H(j+1)\| \left( \frac{\|H(j+1)\|\|B(j)\|^2}{c_1} + 1 \right) \times (h_1(j))^{-1-\omega}M_{j-1}^\omega(v(0, x))^\omega, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

$$M_j = \prod_{k=0}^j \Lambda_k, \quad M = M_{N-1} = \Lambda_0 \Lambda_1 \cdots \Lambda_{N-1}, \quad (2.5)$$

где  $h_1(j) > 0$  — минимальное собственное значение матрицы  $H(j)$ ,  $c_1$ ,  $v(0, x)$ ,  $\varepsilon_j$  определены в (1.6), (1.9), (1.10) соответственно. Поскольку  $0 < \varepsilon_j < 1$  и  $v(0, x) \geq 0$ , то  $\Lambda_j > 0$ . Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Тогда нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво и множество*

$$\mathcal{E} = \{x_0, \dots, x_{-\tau} \in \mathbb{C}^m : M < 1\} \quad (2.6)$$

*является множеством притяжения нулевого решения. При этом для решения задачи (2.1), (2.2) с начальными условиями из  $\mathcal{E}$  имеет место оценка*

$$\|x_n\| \leq \left[ (h_1(n))^{-1} \prod_{j=0}^{r-1} \Lambda_j M^k v(0, x) \right]^{1/2}, \quad (2.7)$$

$$n = kN + r, \quad r = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\{x_n\}$  — решение начальной задачи (2.1), (2.2). Рассмотрим на этом решении функционал  $v(n, x)$ , определенный в (0.3). В силу условий на  $H(n)$  и  $\{K_j\}$  при  $\{x_n\} \neq 0$  имеем  $v(n, x) > 0$ .

Рассмотрим разность  $v(n+1, x) - v(n, x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Используя обозначения для матриц  $\Delta_j$ , получим

$$\begin{aligned} v(n+1, x) - v(n, x) &= \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1} \rangle - \langle H(n)x_n, x_n \rangle \\ &+ \sum_{j=n+1-\tau}^n \langle K_{n-j}x_j, x_j \rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j \rangle \\ &= \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1} \rangle - \langle H(n)x_n, x_n \rangle + \langle K_0x_n, x_n \rangle \\ &- (\langle K_0x_{n-1}, x_{n-1} \rangle - \langle K_1x_{n-1}, x_{n-1} \rangle) - \dots \\ &- (\langle K_{\tau-1}x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle - \langle K_{\tau}x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle) - \langle K_{\tau}x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle \\ &= \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1} \rangle - \langle H(n)x_n, x_n \rangle \\ &+ \langle K_0x_n, x_n \rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle \Delta_{n-j}x_j, x_j \rangle - \langle K_{\tau}x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\{x_n\}$  является решением задачи (2.1), (2.2), имеем

$$\begin{aligned} v(n+1, x) - v(n, x) &= \langle A^*(n)H(n+1)A(n)x_n, x_n \rangle - \langle H(n)x_n, x_n \rangle + \langle K_0x_n, x_n \rangle \\ &+ \sum_{j=1}^{\tau} \langle A^*(n)H(n+1)B_j(n)x_{n-j}, x_{n-j} \rangle + \sum_{j=1}^{\tau} \langle B_j^*(n)H(n+1)A(n)x_n, x_{n-j} \rangle \\ &+ \sum_{j,i=1}^{\tau} \langle B_j^*(n)H(n+1)B_i(n)x_{n-i}, x_{n-j} \rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle \Delta_{n-j}x_j, x_j \rangle - \langle K_{\tau}x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle \\ &+ 2 \operatorname{Re} \langle H(n+1)A(n)x_n, F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}) \rangle \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{\tau} \operatorname{Re} \langle H(n+1)B_j(n)x_{n-j}, F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}) \rangle \\ &+ \langle H(n+1)F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}) \rangle. \end{aligned}$$

Используя матрицу  $C(n)$ , заданную в (1.5), разность  $v(n+1, x) - v(n, x)$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v(n+1, x) - v(n, x) &= - \left\langle C(n) \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \langle \Delta_{n-j}x_j, x_j \rangle - \langle \Delta_{\tau}x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle + W(n, x), \quad (2.8) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W(n, x) &= 2 \operatorname{Re} \langle H(n+1)A(n)x_n, F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}) \rangle \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{\tau} \operatorname{Re} \langle H(n+1)B_j(n)x_{n-j}, F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}) \rangle \\ &+ \langle H(n+1)F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}) \rangle. \end{aligned}$$

Оценим каждое из слагаемых в (2.8). По условию теоремы все матрицы  $C(n)$  являются положительно определенными, при этом выполнена оценка (1.6). Поскольку  $H(n) = H^*(n) > 0$ , то

$$c_1 \sum_{i=0}^{\tau} \|x_{n-i}\|^2 \geq \frac{c_1}{\|H(n)\|} \langle H(n)x_n, x_n \rangle + c_1 \sum_{i=1}^{\tau} \|x_{n-i}\|^2. \quad (2.9)$$

Из условий (1.7) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \langle \Delta_{n-j}x_j, x_j \rangle + \langle \Delta_{\tau}x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle \\ \geq \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \varkappa_{n-j} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j \rangle + \varkappa_{\tau} \langle K_{\tau-1}x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В силу (0.2) имеем

$$\begin{aligned} |W(n, x)| &\leq 2q \|H(n+1)\| \|A(n)\| \|x_n\|^{2+\omega} \\ &+ \left[ 2q \|H(n+1)\| \|x_n\|^{1+\omega} \sum_{j=1}^{\tau} \|B_j(n)\| \|x_{n-j}\| + q^2 \|H(n+1)\| \|x_n\|^{2+2\omega} \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для проведения дальнейших рассуждений воспользуемся вспомогательной леммой.

**Лемма.** Рассмотрим квадратичную форму

$$U = u_0(\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{\tau} u_{\tau}), \quad u_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0.$$

Для любых  $\beta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, \tau$ , имеет место неравенство

$$U \leq \beta_0 u_0^2 + \beta_1 u_1^2 + \dots + \beta_{\tau} u_{\tau}^2, \quad (2.12)$$

где

$$\beta_0 \geq \alpha_0 + \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1} + \dots + \frac{\alpha_{\tau}^2}{4\beta_{\tau}}.$$

Введем следующие обозначения:

$$u_0 = \|x_n\|^{1+\omega}, \quad u_i = \|x_{n-i}\|,$$

$$\alpha_0(n) = q^2 \|H(n+1)\|, \quad \alpha_i(n) = 2q \|H(n+1)\| \|B_i(n)\|, \quad i = 1, \dots, \tau.$$

Применим лемму к выражению, стоящему в квадратных скобках в (2.11), выбирая

$$\beta_i = c_1, \quad i = 1, \dots, \tau, \quad \beta_0(n) = \alpha_0(n) + \frac{1}{4c_1} \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_i^2(n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & 2q\|H(n+1)\|\|x_n\|^{1+\omega} \sum_{j=1}^{\tau} \|B_j(n)\|\|x_{n-j}\| + q^2\|H(n+1)\|\|x_n\|^{2+2\omega} \\ & \leq q^2\|H(n+1)\| \left( \frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1} + 1 \right) \|x_n\|^{2+2\omega} + c_1 \sum_{j=1}^{\tau} \|x_{n-j}\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |W(n, x)| & \leq 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|\|x_n\|^{2+\omega} \\ & + q^2\|H(n+1)\| \left( \frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1} + 1 \right) \|x_n\|^{2+2\omega} + c_1 \sum_{j=1}^{\tau} \|x_{n-j}\|^2. \end{aligned}$$

В силу положительной определенности матриц  $H(n)$ ,  $K_j$  справедливы неравенства

$$v(n, x) \geq \langle H(n)x_n, x_n \rangle \geq h_1(n)\|x_n\|^2,$$

где  $h_1(n) > 0$  — минимальное собственное значение матрицы  $H(n)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |W(n, x)| & \leq 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\| (h_1(n))^{-1-\alpha} (v(n, x))^{1+\alpha} \\ & + q^2\|H(n+1)\| \left( \frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1} + 1 \right) (h_1(n))^{-1-2\alpha} (v(n, x))^{1+2\alpha} \\ & + c_1 \sum_{j=1}^{\tau} \|x_{n-j}\|^2, \quad (2.13) \end{aligned}$$

где  $\alpha = \omega/2$ .

Учитывая оценки (2.9), (2.10), (2.13), из (2.8) получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq v(n+1, x) & \leq v(n, x) - \frac{c_1}{\|H(n)\|} \langle H(n)x_n, x_n \rangle \\ & - \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \kappa_{n-j} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j \rangle - \kappa_{\tau} \langle K_{\tau-1}x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle \\ & + 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\| (h_1(n))^{-1-\alpha} (v(n, x))^{1+\alpha} \\ & + q^2\|H(n+1)\| \left( \frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1} + 1 \right) (h_1(n))^{-1-2\alpha} (v(n, x))^{1+2\alpha}. \end{aligned}$$

Используя  $\varepsilon_n$ , определенное в (1.10), имеем

$$\begin{aligned} v(n+1, x) & \leq v(n, x) - \varepsilon_n \left( \langle H(n)x_n, x_n \rangle + \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j \rangle \right) \\ & + 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\| (h_1(n))^{-1-\alpha} (v(n, x))^{1+\alpha} \\ & + q^2\|H(n+1)\| \left( \frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1} + 1 \right) (h_1(n))^{-1-2\alpha} (v(n, x))^{1+2\alpha}. \end{aligned}$$

В силу определения функционала  $v(n, x)$  в (0.3) получаем

$$\begin{aligned} v(n+1, x) \leq & \left( 1 - \varepsilon_n + 2q \|H(n+1)\| \|A(n)\| (h_1(n))^{-1-\alpha} (v(n, x))^\alpha \right. \\ & \left. + q^2 \|H(n+1)\| \left( \frac{\|H(n+1)\| \|B(n)\|^2}{c_1} + 1 \right) \right. \\ & \left. \times (h_1(n))^{-1-2\alpha} (v(n, x))^{2\alpha} \right) v(n, x), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Пусть  $n = 0$ . Тогда

$$v(1, x) \leq \Lambda_0 v(0, x),$$

где  $\Lambda_0$  определено в (2.3).

Пусть  $n = 1$ . Тогда в силу (2.14) с учетом последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} v(2, x) \leq & \left( 1 - \varepsilon_1 + 2q \|H(2)\| \|A(1)\| (h_1(1))^{-1-\alpha} (v(1, x))^\alpha \right. \\ & \left. + q^2 \|H(2)\| \left( \frac{\|H(2)\| \|B(1)\|^2}{c_1} + 1 \right) (h_1(1))^{-1-2\alpha} (v(1, x))^{2\alpha} \right) v(1, x) \\ & \leq \Lambda_0 \left( 1 - \varepsilon_1 + 2q \|H(2)\| \|A(1)\| (h_1(1))^{-1-\alpha} \Lambda_0^\alpha (v(0, x))^\alpha \right. \\ & \left. + q^2 \|H(2)\| \left( \frac{\|H(2)\| \|B(1)\|^2}{c_1} + 1 \right) (h_1(1))^{-1-2\alpha} \Lambda_0^{2\alpha} (v(0, x))^{2\alpha} \right) v(0, x). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу определения  $\Lambda_1$  в (2.4) имеем

$$v(2, x) \leq \Lambda_0 \Lambda_1 v(0, x).$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получаем неравенство

$$v(n, x) \leq \prod_{j=0}^{n-1} \Lambda_j v(0, x) = M_{n-1} v(0, x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

где  $\Lambda_j$  и  $M_j$  определены в (2.4) и (2.5) соответственно.

Покажем, что

$$\Lambda_{lN+j} \leq \Lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Рассмотрим  $\Lambda_N$ . В силу периодичности матриц  $A(n)$ ,  $B(n)$ ,  $H(n)$  получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_N = & 1 - \varepsilon_0 + 2q \|H(1)\| \|A(0)\| (h_1(0))^{-1-\omega/2} M_{N-1}^{\omega/2} (v(0, x))^{\omega/2} \\ & + q^2 \|H(1)\| \left( \frac{\|H(1)\| \|B(0)\|^2}{c_1} + 1 \right) (h_1(0))^{-1-\omega} M_{N-1}^\omega (v(0, x))^\omega. \end{aligned}$$

По определению  $M_{N-1} = \Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_{N-1} = M$ . Поскольку в силу условий теоремы  $M < 1$ , то

$$\begin{aligned} \Lambda_N \leq & 1 - \varepsilon_0 + 2q \|H(1)\| \|A(0)\| (h_1(0))^{-1-\omega/2} (v(0, x))^{\omega/2} \\ & + q^2 \|H(1)\| \left( \frac{\|H(1)\| \|B(0)\|^2}{c_1} + 1 \right) (h_1(0))^{-1-\omega} (v(0, x))^\omega = \Lambda_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим  $\Lambda_{N+1}$  и опять воспользуемся периодичностью соответствующих матриц. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_{N+1} = & 1 - \varepsilon_1 + 2q\|H(2)\|\|A(1)\|(h_1(1))^{-1-\omega/2}M_N^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2} \\ & + q^2\|H(2)\|\left(\frac{\|H(2)\|\|B(1)\|^2}{c_1} + 1\right)(h_1(1))^{-1-\omega}M_N^\omega(v(0,x))^\omega. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$M_N = (\Lambda_0\Lambda_1 \cdots \Lambda_{N-1})\Lambda_N = M\Lambda_N \leq M\Lambda_0 \leq \Lambda_0 = M_0.$$

Следовательно,  $\Lambda_{N+1} \leq \Lambda_1$ . Аналогично в силу периодичности

$$\begin{aligned} \Lambda_{N+2} = & 1 - \varepsilon_2 + 2q\|H(3)\|\|A(2)\|(h_1(2))^{-1-\omega/2}M_{N+1}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2} \\ & + q^2\|H(3)\|\left(\frac{\|H(3)\|\|B(2)\|^2}{c_1} + 1\right)(h_1(2))^{-1-\omega}M_{N+1}^\omega(v(0,x))^\omega. \end{aligned}$$

Поскольку

$$M_{N+1} = (\Lambda_0\Lambda_1 \cdots \Lambda_{N-1})\Lambda_N\Lambda_{N+1} = M\Lambda_N\Lambda_{N+1} \leq M\Lambda_0\Lambda_1 \leq \Lambda_0\Lambda_1 = M_1,$$

то  $\Lambda_{N+2} \leq \Lambda_2$ . Повторяя аналогичные рассуждения, получаем неравенство

$$\Lambda_{N+j} \leq \Lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Рассмотрим теперь  $\Lambda_{2N}$  и воспользуемся периодичностью соответствующих матриц. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_{2N} = & 1 - \varepsilon_0 + 2q\|H(1)\|\|A(0)\|(h_1(0))^{-1-\omega/2}M_{2N-1}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2} \\ & + q^2\|H(1)\|\left(\frac{\|H(1)\|\|B(0)\|^2}{c_1} + 1\right)(h_1(0))^{-1-\omega}M_{2N-1}^\omega(v(0,x))^\omega. \end{aligned}$$

Учитывая предыдущие оценки, имеем

$$\begin{aligned} M_{2N-1} = & (\Lambda_0\Lambda_1 \cdots \Lambda_{N-1})\Lambda_N\Lambda_{N+1} \cdots \Lambda_{2N-1} \\ & \leq (\Lambda_0\Lambda_1 \cdots \Lambda_{N-1})(\Lambda_0\Lambda_1 \cdots \Lambda_{N-1}) = M^2 < 1. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\Lambda_{2N} \leq \Lambda_0$ . Рассмотрим  $\Lambda_{2N+1}$  и опять воспользуемся периодичностью соответствующих матриц. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_{2N+1} = & 1 - \varepsilon_1 + 2q\|H(2)\|\|A(1)\|(h_1(1))^{-1-\omega/2}M_{2N}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2} \\ & + q^2\|H(2)\|\left(\frac{\|H(2)\|\|B(1)\|^2}{c_1} + 1\right)(h_1(1))^{-1-\omega}M_{2N}^\omega(v(0,x))^\omega. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} M_{2N} = & (\Lambda_0\Lambda_1 \cdots \Lambda_{N-1})(\Lambda_N\Lambda_{N+1} \cdots \Lambda_{2N-1})\Lambda_{2N} \\ & \leq (\Lambda_0\Lambda_1 \cdots \Lambda_{N-1})(\Lambda_0\Lambda_1 \cdots \Lambda_{N-1})\Lambda_0 = M^2\Lambda_0 \leq \Lambda_0 = M_0, \end{aligned}$$

то  $\Lambda_{2N+1} \leq \Lambda_1$ . Повторяя такие же рассуждения, получаем

$$\Lambda_{2N+j} \leq \Lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Аналогичным образом приходим к неравенствам

$$\Lambda_{lN+j} \leq \Lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad l = 1, 2, \dots,$$

что дает (2.16). Тогда при  $n = kN + r$ ,  $r = 1, \dots, N$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , получаем

$$M_{n-1} = \prod_{j=0}^{n-1} \Lambda_j \leq \left( \prod_{j=0}^{N-1} \Lambda_j \right)^k \Lambda_{kN} \Lambda_{kN+1} \dots \Lambda_{kN+r-1} \leq M^k \Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_{r-1}.$$

Следовательно, из (2.15) имеем

$$v(n, x) \leq \Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_{r-1} M^k v(0, x), \quad n = kN + r, \quad r = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots$$

Используя определение функционала (0.3), для решения задачи (2.1), (2.2) получаем

$$\|x_n\|^2 \leq (h_1(n))^{-1} \Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_{r-1} M^k v(0, x),$$

где  $n = kN + r$ ,  $r = 1, \dots, N$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Это неравенство дает (2.7). Поскольку по условию теоремы  $M < 1$ , решение задачи (2.1), (2.2) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Следует отметить, что  $M$  непрерывно зависит от начальных данных (2.2), причем  $M = \prod_{j=0}^{N-1} (1 - \varepsilon_j) < 1$  при нулевых начальных данных.

Следовательно, нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если  $q = 0$ , то  $\Lambda_j = 1 - \varepsilon_j < 1$  и, следовательно,  $M < 1$ . Тогда оценка (2.7) переходит в оценку (1.8) без каких-либо ограничений на начальные данные; т. е. результат теоремы 3 переходит в результат теоремы 2, полученный в [17].

Отметим, что условия асимптотической устойчивости формулируются в виде легко проверяемых неравенств, а числовые характеристики множества притяжения и скорости убывания решений вычисляются конструктивно. Это дает возможность применять полученные результаты на практике при изучении устойчивости решений конкретных систем уравнений вида (0.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gyori I., Pituk M. Asymptotic formulae for the solutions of a linear delay difference equation // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 195, N 2. P. 376–392.
2. Erbe L. H., Xia H., Yu J. S. Global stability of a linear nonautonomous delay difference equation // J. Differ. Equ. Appl. 1995. V. 1, N 2. P. 151–161.
3. Yu J. S. Asymptotic stability of a linear difference equation with variable delay // Comput. Math. Appl. 1998. V. 36, N 10–12. P. 203–210.
4. Gyori I., Hartung F. Stability in delayed perturbed differential and difference equations // Fields Institute Communications. 2001. V. 29. P. 181–194.
5. Agarwal R. P., Kim Y. H., Sen S. K. Advanced discrete Halanay-type inequalities: stability of difference equations // J. Inequal. Appl. 2009. Article ID 535849.
6. Berezansky L., Braverman E. Exponential stability of difference equations with several delays: recursive approach // Adv. Differ. Equ. 2009. Article ID 104310.
7. Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В. Исследование абсолютной устойчивости разностных систем с запаздыванием вторым методом Ляпунова // Журн. вычисл. и прикл. математики. 2010. № 4. С. 118–126.
8. Куликов А. Ю., Малыгина В. В. Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 12. С. 30–41.
9. Stojanovic S. B., Debeljkovic D. L. J., Dimitrijevic N. Stability of discrete-time systems with time-varying delay: delay decomposition approach // Intern. J. Computers, Communications & Control. 2012. V. 7, N 4. P. 775–783.
10. Малыгина В. В., Чудинов К. М. Асимптотика решений разностных уравнений с запаздываниями // Изв. вузов. Математика. 2016. № 7. С. 66–82.

11. Baštinec J., Demchenko H., Diblik J., Khusainov D. Ya. Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2018. Article ID 9703919.
12. Ngoc P. H. A., Trinh H., Hieu L. T., Huy N. D. On contraction of nonlinear difference equations with time-varying delays // Math. Nachrichten. 2019. V. 292, N 4. P. 859–870.
13. Park J. H., Lee T. H., Liu Y., Chen J. Dynamic systems with time delays: Stability and control. Singapore: Springer, 2019.
14. Diblik J. Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays by degenerated Lyapunov–Krasovskii functionals // Appl. Math. Letters. 2023. V. 142. Article ID 108654.
15. Демиденко Г. В., Балданов Д. Ш. Об асимптотической устойчивости решений разностных уравнений с запаздыванием // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, № 4. С. 50–62.
16. Матвеева И. И., Хмилев А. В. Устойчивость решений одного класса нелинейных систем разностных уравнений с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 31–44.
17. Demidenko G. V., Baldanov D. Sh. Exponential stability of solutions to delay difference equations with periodic coefficients // Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov’s Legacy — A Liber Amicorum to Professor Godunov (Editors: Demidenko G. V., Romenski E., Toro E., Dumbser M.) Cham, Switzerland: Springer Nature, 2020. P. 93–100.
18. Матвеева И. И., Хмилев А. В. Устойчивость решений одного класса разностных уравнений с переменным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 4. С. 37–48.
19. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.
20. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

*Поступила в редакцию 14 февраля 2026 г.*

*После доработки 14 февраля 2026 г.*

*Принята к публикации 10 марта 2026 г.*

Матвеева Инесса Изотовна (ORCID 0000-0002-9390-2702)

Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
matveeva.ii@yandex.ru

Хмилев Арсений Владимирович  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
khmilarseniy@mail.ru