

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПРОСТЫХ АЛГЕБР НОВИКОВА И ДУБЛЕЙ ВИТТА

В. А. Логачев, А. П. Пожидаев

Аннотация. Описание дифференцирований простых конечномерных алгебр Новикова и прелиевых дублей Витта над алгебраически замкнутым полем простой характеристики сводится к описанию специальных дифференцирований исходных ассоциативных коммутативных дифференциально простых алгебр.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.305

Ключевые слова: алгебра Новикова, дифференцирование, левосимметрическая алгебра, простая алгебра, прелиева алгебра, полином Дарбу, дубль Витта.

Введение

Алгебра \mathcal{A} называется *левосимметрической*, если ассоциатор $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ на \mathcal{A} левосимметричен, т. е. $(x, y, z) = (y, x, z)$ для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$. Как легко видеть, левосимметрические алгебры являются естественным обобщением ассоциативных алгебр. Другим хорошо известным примером левосимметрических алгебр являются алгебры Новикова, в которых коммутируют все операторы правого умножения.

В работе [1] была введена конструкция расширения левосимметрической алгебры, позволяющая строить новые левосимметрические алгебры на основе существующих. В основе этой конструкции лежит согласованная пара дифференцирования и гессиана исходной алгебры. В [2] эта конструкция была названа конструкцией Мицухары, где также были предложены обобщения этой конструкции, частными случаями которых являются дубли Витта. В [3] введено понятие эндоморфа произвольной неассоциативной алгебры и, в частности, показано, что эндоморфы левосимметрических алгебр образуют значительный класс простых таких алгебр. В [4] построена конструкция Мицухары для эндоморфов произвольных левосимметрических алгебр, а также описаны дифференцирования эндоморфов произвольных алгебр. В [5] описаны автоморфизмы конечномерных прелиевых дублей Витта над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$.

Пусть d — некоторое ненулевое дифференцирование алгебры \mathcal{A} . Алгебра \mathcal{A} называется *d -простой*, если $\mathcal{A}^2 \neq 0$ и \mathcal{A} не содержит собственных d -инвариантных идеалов; при этом дифференцирование d называется *простым*.

Пусть \mathcal{A} — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d . Определим на \mathcal{A} новое умножение правилом $x \circ y = xd(y)$. Обозначим полученную алгебру через $\mathcal{A}(d)$. Хорошо известно, что $\mathcal{A}(d)$ является алгеброй Новикова и $\mathcal{A}(d)$ проста тогда и только тогда, когда

Работа второго автора поддержана Российским научным фондом (грант 25-41-00005).

\mathcal{A} является d -простой (в случае характеристики не 2). Более общей является конструкция с умножением $x \circ y = xd(y) + axy$, где $a \in \mathcal{A}$ — некоторый фиксированный элемент (см. [6, 7]); данная алгебра в [8] обозначается через (\mathcal{A}, d, a) (а мы далее обозначаем ее через $\mathcal{A}(d, a)$ в случае $a \neq 0$). Классификация конечномерных простых алгебр Новикова над алгебраически замкнутыми полями характеристики 0 была получена в [9]. В работе [8] дана изящная классификация неассоциативных конечномерных простых алгебр Новикова над алгебраически замкнутыми полями характеристики $p > 0$ (полная классификация таких алгебр над полями характеристики $p > 2$ была получена ранее в [10]). В [11] снято ограничение на алгебраическую замкнутость поля, а именно, доказано, что любая такая алгебра над полем характеристики $p > 0$ изоморфна некоторой алгебре (\mathcal{A}, d, a) . Также в [11] описаны автоморфизмы конечномерных алгебр (\mathcal{A}, d, a) над алгебраически замкнутым полем.

В настоящей работе описаны дифференцирования простых конечномерных алгебр Новикова (§ 1) и прелиевых дублей Витта (§ 2) над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$.

Напомним необходимые для дальнейшего определения и обозначения. Всюду далее F означает основное поле, а F^* — мультипликативную группу поля F ; через \mathcal{A} мы обозначаем некоторую алгебру над F . В дальнейшем $\langle \Upsilon \rangle = \langle \Upsilon \rangle_F$ — линейная оболочка множества Υ над F , где опускаем символ F , если поле ясно из контекста. Если \mathcal{A} — некоторая алгебра (векторное пространство) над F , то через $\text{End } \mathcal{A}$ будем обозначать алгебру всех F -линейных операторов на \mathcal{A} , а через $\text{Der } \mathcal{A}$ — алгебру Ли дифференцирований алгебры \mathcal{A} . Образ $\varphi(x)$ элемента x под действием отображения φ часто обозначается также через φ_x . Операторы $R_a, L_a \in \text{End } \mathcal{A}$, действующие по правилам $R_a(x) = xa$ и $L_a(x) = ax$ для любого $x \in \mathcal{A}$, называются операторами *правого* и *левого* умножения на элемент $a \in \mathcal{A}$.

Если I является d -инвариантным идеалом в \mathcal{A} , то это обозначается следующим образом: $I \triangleleft_d \mathcal{A}$. В дальнейшем, говоря про d -простые алгебры, мы считаем, что $d \neq 0$. Далее через $F_p[x_1, \dots, x_n]$ обозначается алгебра усеченных многочленов над полем F характеристики p , т. е. $x_i^p = 0$, $x_i^0 = 1$ для любого $i = 1, \dots, n$ (единица 1 отождествляется с единицей поля F).

§ 1. Дифференцирования алгебр Новикова

Всюду далее мы работаем с конечномерными ассоциативными коммутативными d -простыми алгебрами и часто применяем следующий хорошо известный результат (см., например, [2, 12]).

Лемма 1.1. Пусть \mathcal{A} — конечномерная ассоциативная коммутативная d -простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F . Тогда \mathcal{A} содержит единицу 1, характеристика поля F равна $p > 0$, $\mathcal{A} \cong F_p[x_1, \dots, x_n]$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \cdot d(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, и $\text{Ker } d = F$. В частности, $d(\mathcal{A})$ содержит обратимые элементы.

Заметим, что линейное отображение $D = d + R_a$ является обобщенным дифференцированием алгебры \mathcal{A} , т. е.

$$D(xy) = D(x)y + xd(y) \tag{1}$$

для любых $x, y \in \mathcal{A}$. Будем говорить, что $H \in \text{Der } \mathcal{A}$ является α -перестановочным с $D = d + R_a$, если для некоторого $\alpha \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$HD = D(H + \alpha)$$

(здесь и далее $H + \alpha$ означает $H + R_\alpha$). Заметим, что $D(1) = a$, а потому $H(a) = D(\alpha)$; если при этом $a = 0$, то $D = d$, $d(\alpha) = 0$, $dR_\alpha = R_\alpha d$, стало быть,

$$(H - \alpha)d = dH,$$

что мы и возьмем за определение α -перестановочного дифференцирования с дифференцированием d . Обозначим данный $\alpha \in \mathcal{A}$ через $\omega(H)$. Положим

$$\text{Der}_D \mathcal{A} = \{H \in \text{Der } \mathcal{A} : HD = D(H + \omega(H))\}.$$

Заметим, что $\omega(H)$ определяется с точностью до элемента β из $\text{Ker } D$ такового, что $\beta\mathcal{A} \subseteq \text{Ker } D$. Действительно, если $HD = D(H + \gamma)$ для некоторого $\gamma \in \mathcal{A}$, то $D\beta = 0$ при $\beta = \alpha - \gamma$. Если алгебра \mathcal{A} является d -простой, то $\beta\mathcal{A} \triangleleft_d \mathcal{A}$, откуда либо $\beta = 0$, либо β обратим. Во втором случае получаем $D = 0$, т. е. $d = -R_a \in \text{Der } \mathcal{A}$, откуда $a = 0$ и $d = 0$. Таким образом, в случае d -простой алгебры \mathcal{A} элемент $\omega(H)$ определен однозначно.

Пусть $H, F \in \text{Der}_D \mathcal{A}$, $\omega(H) = \alpha$, $\omega(F) = \beta$. Тогда

$$\begin{aligned} [H, F]D &= (HF - FH)D = HD(F + \beta) - FD(H + \alpha) \\ &= D(H + \alpha)(F + \beta) - D(F + \beta)(H + \alpha) \\ &= D[H + \alpha, F + \beta] = D([H, F] + H(\beta) - F(\alpha)). \end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 1.2. Пусть \mathcal{A} — конечномерная ассоциативная коммутативная d -простая алгебра над полем F , $a \in \mathcal{A}$, $D = d + a$. Тогда $\text{Der}_D \mathcal{A}$ является подалгеброй Ли в $\text{Der } \mathcal{A}$; при этом $\omega(H)$ определяется по H однозначно и $\omega([H, F]) = H(\omega(F)) - F(\omega(H))$ для любых $H, F \in \text{Der}_D \mathcal{A}$.

Для дальнейшего нам понадобятся явные условия простоты рассматриваемых алгебр Новикова в случае $\mathcal{A} \cong F_2[x]$. Далее ∂ обозначает частную производную по x .

Лемма 1.3 [11]. Пусть $\mathcal{A} = F_2[x]$. Алгебра Новикова $\mathcal{A}(d)$ проста тогда и только тогда, когда $d = (\beta + \gamma x)\partial$ при $\beta, \gamma \in F^*$. Алгебра $\mathcal{A}(d, a)$ проста $\Leftrightarrow d = (\beta + \gamma x)\partial$ при $\beta \in F^*$; при этом если $\gamma \in F^*$, то $\gamma \neq a$.

Лемма 1.4. Пусть $\mathcal{A} = F_2[x]$, $\mathcal{A}(d, a)$ проста, $D = d + R_a$ и $1 \in \text{Im } D$. Тогда $\text{Ker } D = 0$.

Доказательство. Пусть $0 \neq c \in \text{Ker } D$. Если $c \in F$, то $D(c) = ca = 0$, что противоречит условию $a \neq 0$. Так как $\langle 1, c \rangle = \mathcal{A}$, то $\text{Im } D = \langle D(1) \rangle = \langle a \rangle$. Таким образом, $\dim \text{Im } D = 1$, а так как по условию $1 \in \text{Im } D$, то $a \in F$. Возьмем d как в лемме 1.3. Тогда $D(x) = \beta + \gamma x + ax$, откуда $\gamma = a$; противоречие. \square

Напомним, что ненулевой многочлен f называется *полиномом Дарбу* относительно дифференцирования d , если $d(f) = \lambda f$ для некоторого *собственного* многочлена λ . Также нам понадобится следующая

Теорема 1.1 [11]. Пусть $\mathcal{A} = F_p[x_1, \dots, x_n]$, d — простое дифференцирование \mathcal{A} . Если f является полиномом Дарбу относительно d для некоторого собственного многочлена λ , то f обратим и f по λ определяется однозначно с точностью до ненулевого скаляра. Обратно, любой обратимый $f \in \mathcal{A}$ является полиномом Дарбу относительно d для некоторого собственного многочлена λ .

Теорема 1.2. Пусть \mathcal{A} — конечномерная ассоциативная коммутативная d -простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики $p > 0$ и алгебра $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, d, a)$ проста. Тогда $G \in \text{Der } \mathbb{A}$ в том и только в том случае, если $G = H + \omega(H)$ для некоторого $H \in \text{Der}_D \mathcal{A}$; при этом $\omega(H) \in F$ в случае $a = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \text{Der } \mathbb{A}$. Тогда $G(x \circ y) = G(x) \circ y + x \circ G(y)$, т. е.

$$G(xD_y) = G(x)D(y) + xD(G_y) \quad (2)$$

для любых $x, y \in \mathbb{A}$ (напомним, что мы используем также обозначение $D_x := D(x)$, что позволяет избежать нагромождения скобок). Пусть $\alpha = G(1)$. Заметим, что $D(1) = 0$ при $a = 0$, поэтому, полагая $y = 1$ в (2), получаем $d(\alpha) = 0$, т. е. $\alpha \in F$ при $a = 0$. Полагая $x = 1$ в (2), выводим

$$G(D_y) = \alpha D(y) + D(G_y). \quad (3)$$

Пусть $H = G - \alpha$. Тогда из (3) следует $HD = D(H + \alpha)$, откуда H является α -перестановочным с D .

Покажем, что H является дифференцированием алгебры \mathcal{A} . Из (2) выводим

$$H(xD_y) = G(xD_y) - \alpha xD_y = G_x D_y + xD(G_y) - \alpha xD_y. \quad (4)$$

С другой стороны, по (3) имеем

$$\begin{aligned} H(x)D_y + xH(D_y) &= G_x D_y - \alpha xD_y + xG(D_y) - \alpha xD_y \\ &= G_x D_y - \alpha xD_y + x(\alpha D_y + D(G_y)) - \alpha xD_y = G_x D_y + xD(G_y) - \alpha xD_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), получаем

$$H(xy) = H(x)y + xH(y), \quad (6)$$

если хотя бы один из x, y лежит в $\text{Im } D$.

Если D невырожденное, то (6) справедливо для любых $x, y \in \mathbb{A}$. Поэтому по теореме 1.1 можем считать, что $\dim \text{Ker } D = 1$, т. е. $\mathbb{A} = \text{Im } D \oplus \langle e \rangle$ для некоторого $e \in \mathbb{A}$. Таким образом, чтобы установить справедливость (6) для любых $x, y \in \mathbb{A}$, достаточно проверить истинность (6) для $x = y = e$.

Если $1 \notin \text{Im } D$, то можно считать $e = 1$ и тогда (6) для $x = y = 1$ очевидно. Далее можно предполагать, что $1 \in \text{Im } D$ и $\mathcal{A} \not\cong F_2[x]$ по леммам 1.3 и 1.4.

Заметим, что можно считать $S := \text{Im } D := D(\mathcal{A})$ подалгеброй в \mathcal{A} . Действительно, если это не так, то существуют $x, y \in S$ такие, что $z = xy \notin S$. Тогда $H \in \text{Der } \mathcal{A}$, поскольку

$$H(z^2) = H(zxy) = H(zx)y + zxH(y) = H(z)xy + zH(x)y + zxH(y) = 2zH(z).$$

Покажем, что $d(S)$ содержит обратимые элементы. Действительно, пусть $J = d(S)\mathcal{A}$ и $t = d(D_x)y$ для некоторых $x, y \in \mathcal{A}$. Тогда $J \triangleleft \mathcal{A}$, а так как $d = D - R_a$, то, применяя (1), получаем

$$d(t) \equiv d(d(D_x))y \equiv -d(aD_x)y \equiv 0 \pmod{J},$$

поскольку $a \in S$ и S — подалгебра в \mathcal{A} . При этом $J \neq 0$, так как $\mathcal{A} \not\cong F_2[x]$, откуда $J = \mathbb{A}$.

Окончательно, $D_{ex} = D_e x + ed_x$, откуда $ed_x \in S$ для любого $x \in S$. Выбирая $x \in S$ так, что d_x обратим (при этом $d_x = D_x - ax \in S$ и $d_x^{-1} \in S$, так как $a, 1 \in S$), получаем $e \in S$. Пришли к противоречию.

Обратно, если $H \in \text{Der}_D \mathcal{A}$, то, полагая $G = H + \omega(H)$, получаем дифференцирование G алгебры Новикова \mathbb{A} . \square

§ 2. Дифференцирования дублей Витта

Дубль Витта. Пусть \mathcal{A} — ассоциативная коммутативная алгебра с ненулевым дифференцированием d над полем F и $\overline{\mathcal{A}}$ — изоморфная копия алгебры \mathcal{A} (как векторного пространства). Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{A} \oplus \overline{\mathcal{A}}$ над F , на котором произведение определено правилами

$$a \circ b = ab + \overline{ab}, \quad \overline{a} \circ b = ad(b), \quad a \circ \overline{b} = 0, \quad \overline{a} \circ \overline{b} = \overline{ad(b)}$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A} \oplus \overline{\mathcal{A}}$ с заданным умножением является левосимметрической, обозначается через \mathcal{A}_d и называется *дублем Витта* алгебры \mathcal{A} [2]. При этом \mathcal{A}_d проста тогда и только тогда, когда \mathcal{A} является d -простой [2].

Опишем все дифференцирования дубля Витта простой алгебры \mathcal{A}_d . Будем говорить, что дифференцирование D алгебры \mathcal{A}_d *индуцируется* дифференцированием $\tau \in \text{Der } \mathcal{A}$, если

$$D(a) = \tau(a), \quad D(\overline{a}) = \overline{\tau(a)}$$

для любого $a \in \mathcal{A}$. Подпространство дифференцирований в $\text{Der } \mathcal{A}$, перестановочных с d , обозначим через $\text{Der}_d \mathcal{A}$.

Теорема 2.1. *Линейное отображение D является дифференцированием простой алгебры \mathcal{A}_d тогда и только тогда, когда D индуцируется дифференцированием $\tau \in \text{Der}_d \mathcal{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D — дифференцирование алгебры \mathcal{A}_d . Тогда

$$D(a) = \theta(a) + \overline{\varphi(a)}, \quad D(\overline{a}) = \chi(a) + \overline{\psi(a)}$$

для любого $a \in \mathcal{A}$ и некоторых однозначно определенных $\theta, \varphi, \chi, \psi \in \text{End } \mathcal{A}$. Далее будем использовать запись $D = D(\theta, \varphi, \chi, \psi)$.

Из определений получаем следующие равенства:

$$D(a \circ b) = D(ab + \overline{ab}) = \theta(ab) + \overline{\varphi(ab)} + \chi(ab) + \overline{\psi(ab)},$$

$$\begin{aligned} D(a) \circ b + a \circ D(b) &= (\theta(a) + \overline{\varphi(a)}) \circ b + a \circ (\theta(b) + \overline{\varphi(b)}) \\ &= \theta(a)b + \overline{\theta(a)b} + \varphi(a)d(b) + \overline{a\theta(b)} + a\theta(b). \end{aligned}$$

Значит, для любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено

$$\theta(ab) + \chi(ab) = \theta(a)b + \varphi(a)d(b) + a\theta(b), \quad (7)$$

$$\varphi(ab) + \psi(ab) = \theta(a)b + a\theta(b). \quad (8)$$

Рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} 0 &= D(a \circ \overline{b}) = D(a) \circ \overline{b} + a \circ D(\overline{b}) \\ &= (\theta(a) + \overline{\varphi(a)}) \circ \overline{b} + a \circ (\chi(b) + \overline{\psi(b)}) = \overline{\varphi(a)d(b)} + a\chi(b) + \overline{a\chi(b)}, \end{aligned}$$

из которой следует, что $\chi(a) = 0$ и $\varphi(a)d(b) = 0$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$.

Рассмотрим левый аннулятор множества $d(\mathcal{A})$ в \mathcal{A} :

$$B = \text{Ann}_l d(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : xd(\mathcal{A}) = 0\}.$$

Так как $d^2(\mathcal{A}) \subset d(\mathcal{A})$, то $0 = d(bd(a)) = d(b)d(a) + bd^2(a) = d(b)d(a)$ для всех $b \in B$ и $a \in \mathcal{A}$, откуда $d(B) \subset B$. Поскольку B — d -инвариантный идеал,

то $B = 0$ или $B = \mathcal{A}$. Если $B = \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}d(\mathcal{A}) = 0$, а так как $1 \in \mathcal{A}$, то $d = 0$. Значит, $B = 0$ и $\varphi = 0$. Используя равенства $\chi = \varphi = 0$, (7) и (8) можно переписать следующим образом:

$$\theta(ab) = a\theta(b) + \theta(a)b, \quad \psi(ab) = \theta(a)b + a\theta(b),$$

откуда следует, что $\theta \in \text{Der } \mathcal{A}$, и $\theta = \psi$, так как $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

Из свойств дифференцирования получаем следующие равенства:

$$D(\bar{a} \circ \bar{b}) = D(\bar{a}) \circ \bar{b} + \bar{a} \circ D(\bar{b}) = \overline{\psi(a)} \circ \bar{b} + \bar{a} \circ \overline{\psi(b)} = \overline{\psi(a)d(b)} + \overline{ad(\psi(b))},$$

$$D(\bar{a} \circ \bar{b}) = D(\overline{ad(b)}) = \overline{\psi(ad(b))},$$

сравнивая которые, выводим

$$ad(\psi(b)) + \psi(a)d(b) = \psi(ad(b)).$$

Так как $\psi \in \text{Der } \mathcal{A}$, то $ad(\psi(b)) = a\psi(d(b))$ и $d\psi = \psi d$. Далее, имеем

$$D(\bar{b} \circ a) = D(\bar{b}) \circ a + \bar{b} \circ D(a) = \psi(b)d(a) + bd(\theta(a)),$$

$$D(\bar{b} \circ a) = D(bd(a)) = \psi(bd(a)) = \psi(b)d(a) + b\psi(d(a)),$$

откуда $bd(\theta(a)) = b\psi(d(a))$, что эквивалентно предыдущему соотношению $d\psi = \psi d$. В итоге для некоторого $\tau = \theta \in \text{Der } \mathcal{A}$ имеем

$$D(a) = \tau(a), \quad D(\bar{a}) = \overline{\tau(a)}, \quad \tau d = d\tau.$$

Обратно, легко проверить, что любое дифференцирование τ алгебры \mathcal{A} , удовлетворяющее условию $d\tau = \tau d$, задает дифференцирование D дубля Витта \mathcal{A}_d по правилу

$$D(a) = \tau(a), \quad D(\bar{a}) = \overline{\tau(a)}. \quad \square$$

Обобщенный дубль Витта. Рассмотрим ассоциативную коммутативную алгебру \mathcal{A} с ненулевым дифференцированием d над полем F . Наделим $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ умножением:

$$\bar{b} \circ a = bd(a) + \bar{b}a, \quad a \circ \bar{b} = a\bar{b}, \quad a \circ b = ab, \quad \bar{a} \circ \bar{b} = \overline{ad(b)}$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Построенная алгебра является левосимметрической, обозначается через $W_d(\mathcal{A})$ и называется *обобщенным дублем Витта* алгебры \mathcal{A} [2]. Алгебра $W_d(\mathcal{A})$ проста тогда и только тогда, когда \mathcal{A} является d -простой [2].

Опишем все дифференцирования конечномерной простой алгебры $W_d(\mathcal{A})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$.

Пусть $\alpha \in \mathcal{A}$ и $D \in \text{Der } W_d(\mathcal{A})$. Как и ранее, будем использовать запись $D(\theta, \varphi, \chi, \psi)$ для дифференцирования D и γ для оператора R_γ .

Лемма 2.1. Пусть D — произвольное дифференцирование алгебры $W_d(\mathcal{A})$. Тогда $D = D(\psi - \alpha, \varphi, \gamma, \psi)$ для некоторых $\psi \in \text{End } \mathcal{A}$, $\gamma, \alpha = \psi(1) \in \mathcal{A}$ и $\varphi \in \text{Der}_d \mathcal{A}$; при этом $d(\gamma) = 0$, $2\gamma + d(\alpha) = 0$, $2\varphi(a)d(b) = 0$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$ и выполнены соотношения

$$\psi(a)d(b) + ad(\psi(b)) = \psi(ad(b)) + abd(\alpha), \tag{9}$$

$$\psi(ab) + \alpha ab = \psi(a)b + \varphi(a)d(b) + a\psi(b). \tag{10}$$

Более того, если $\varphi = 0$ и $\tau = \psi - \alpha$, то данные соотношения эквивалентны тому, что $\tau d = d\tau + \alpha d$ и $\tau \in \text{Der } \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений имеем равенства

$$\begin{aligned} D(a \circ b) &= D(a) \circ b + a \circ D(b) = (\theta(a) + \overline{\varphi(a)}) \circ b + a \circ (\theta(b) + \overline{\varphi(b)}) \\ &= \theta(a)b + \varphi(a)d(b) + \overline{\varphi(a)b} + a\theta(b) + \overline{a\varphi(b)}, \\ D(a \circ b) &= D(ab) = \theta(ab) + \overline{\varphi(ab)}, \end{aligned}$$

что эквивалентно

$$\theta(ab) = a\theta(b) + \varphi(a)d(b) + \theta(a)b, \quad \varphi(ab) = \varphi(a)b + a\varphi(b) \quad (11)$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} D(\bar{a} \circ b) &= D(\bar{a}) \circ b + \bar{a} \circ D(b) = (\chi(a) + \overline{\psi(a)}) \circ b + \bar{a} \circ (\theta(b) + \overline{\varphi(b)}) \\ &= \chi(a)b + \psi(a)d(b) + \overline{\psi(a)b} + ad(\theta(b)) + \overline{a\theta(b)} + \overline{ad(\varphi(b))}, \\ D(\bar{a} \circ b) &= D(ad(b) + \overline{ab}) = \theta(ad(b)) + \overline{\varphi(ad(b))} + \chi(ab) + \overline{\psi(ab)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \chi(a)b + \psi(a)d(b) + ad(\theta(b)) &= \theta(ad(b)) + \chi(ab), \\ \psi(a)b + a\theta(b) + ad(\varphi(b)) &= \psi(ab) + \varphi(ad(b)) \end{aligned} \quad (12)$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Далее рассмотрим следующие равенства:

$$\begin{aligned} D(a \circ \bar{b}) &= D(a) \circ \bar{b} + a \circ D(\bar{b}) = (\theta(a) + \overline{\varphi(a)}) \circ \bar{b} + a \circ (\chi(b) + \overline{\psi(b)}) \\ &= \overline{\theta(a)b} + \overline{\varphi(a)d(b)} + a\chi(b) + \overline{a\psi(b)}, \\ D(a \circ \bar{b}) &= D(\overline{ab}) = \chi(ab) + \overline{\psi(ab)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\psi(ab) = \theta(a)b + \varphi(a)d(b) + a\psi(b), \quad \chi(ab) = a\chi(b) \quad (13)$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Полагая $b = 1$, $\psi(1) = \alpha \in \mathcal{A}$, $\chi(1) = \gamma \in \mathcal{A}$, получаем

$$\psi(a) = \theta(a) + \alpha a, \quad \chi(a) = \gamma a.$$

Теперь из (13) следует (10). Используя (13) и (11), перепишем (12):

$$ad(\varphi(b)) = 2\varphi(a)d(b) + a\varphi d(b),$$

откуда при $a = 1$ получаем $d\varphi = \varphi d$, а потому $2\varphi(a)d(b) = 0$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} D(\bar{a} \circ \bar{b}) &= D(\bar{a}) \circ \bar{b} + \bar{a} \circ D(\bar{b}) = (\chi(a) + \overline{\psi(a)}) \circ \bar{b} + \bar{a} \circ (\chi(b) + \overline{\psi(b)}) \\ &= \overline{\chi(a)b} + \overline{\psi(a)d(b)} + ad(\chi(b)) + \overline{a\chi(b)} + \overline{ad(\psi(b))}, \\ D(\bar{a} \circ \bar{b}) &= D(\overline{ad(b)}) = \chi(ad(b)) + \overline{\psi(ad(b))}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \chi(ad(b)) &= ad(\chi(b)), \\ \psi(ad(b)) &= \chi(a)b + \psi(a)d(b) + a\chi(b) + ad(\psi(b)) \end{aligned} \quad (14)$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. При $a = b = 1$ получаем $d(\gamma) = 0$ и $2\gamma + d(\alpha) = 0$. Теперь (14) можно переписать в виде $\psi(ad(b)) = 2\gamma ab + \psi(a)d(b) + ad(\psi(b))$, и приходим к (9).

Если $\varphi = 0$, то указанная в лемме эквивалентность легко проверяется. \square

Будем говорить, что дифференцирование D алгебры $W_d(\mathcal{A})$ индуцируется α -перестановочным с d дифференцированием τ алгебры \mathcal{A} , если для произвольного $a \in \mathcal{A}$ выполняются следующие равенства:

$$D(a) = \tau(a), \quad D(\bar{a}) = \gamma a + \overline{(\tau + \alpha)(a)}$$

для некоторых $\alpha, \gamma \in \mathcal{A}$ таких, что $d(\gamma) = 0$, $2\gamma + d(\alpha) = 0$.

Теорема 2.2. Если F — алгебраически замкнутое поле, то всякое дифференцирование конечномерной простой алгебры $W_d(\mathcal{A})$ индуцируется α -перестановочным с d дифференцированием τ алгебры \mathcal{A} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D — дифференцирование алгебры $W_d(\mathcal{A})$. Сначала рассмотрим случай, когда характеристика поля F не равна 2. В этом случае из леммы 2.1 следует равенство $\varphi(a)d(b) = 0$. Рассмотрим $\text{Ann}_l d(\mathcal{A})$. Как и в теореме 2.1, $\text{Ann}_l d(\mathcal{A}) \triangleleft_d \mathcal{A}$, откуда $\varphi = 0$. По лемме 2.1 $\tau = \psi - \alpha \in \text{Der } \mathcal{A}$, $\tau d = d\tau + \alpha d$, $D = D(\tau, 0, \gamma, \tau + \alpha)$.

Теперь рассмотрим случай, когда характеристика поля F равна 2. В этом случае $D = D(\tau, \varphi, \gamma, \tau + \alpha)$ по лемме 2.1. Из (10) и коммутативности \mathcal{A} следует, что $\varphi(a)d(b) = \varphi(b)d(a)$. Так как в $\text{Im } d$ лежат обратимые элементы, то найдется такой b , что $d(b)$ обратим, откуда

$$\varphi(a) = d(b)^{-1}\varphi(b)d(a),$$

и $\varphi = cd$ для некоторого $c \in \mathcal{A}$. Поскольку $\varphi \in \text{Der}_d(\mathcal{A})$ по лемме 2.1, то $c = \beta \in F$. Так как характеристика поля равна 2, то (9) можно переписать в виде

$$\psi(ad(b)) = \psi(a)d(b) + ad(\psi(b)).$$

Рассматривая (10), заменяя b на $d(b)$ и используя равенство $\varphi = \beta d$, последовательно получаем

$$\psi(ad(b)) + \alpha ad(b) = \psi(a)d(b) + \varphi(a)d^2(b) + a\psi(d(b)),$$

$$\psi(a)d(b) + ad(\psi(b)) + \alpha ad(b) = \psi(a)d(b) + \beta d(a)d^2(b) + a\psi(d(b)),$$

$$ad(\psi(b)) + \alpha ad(b) + a\psi(d(b)) = \beta d(a)d^2(b).$$

Полагая $a = 1$ в (9) и подставляя полученное выражение в последнее равенство, выводим $\beta d(a)d^2(b) = 0$. Так как $d(\mathcal{A})$ содержит обратимые элементы, то $\beta d^2(\mathcal{A}) = 0$.

Если $d^2(\mathcal{A}) \neq 0$, то $\beta = 0$ и $\varphi = 0$. Если $d^2(\mathcal{A}) = 0$, то $\mathcal{A} = F_2[x]$ и $d = \xi\partial$ для некоторого $\xi \in F^*$. В этом случае, полагая $a = b = x$ в (10), выводим $\varphi = 0$.

Таким образом, по лемме 2.1 получаем

$$\tau = \psi - \alpha \in \text{Der } \mathcal{A}, \quad \tau d = d\tau + \alpha d, \quad \alpha \in F, \quad D = D(\tau, 0, \gamma, \tau + \alpha).$$

Обратно, легко проверяется, что $D = D(\tau, 0, \gamma, \tau + \alpha) \in \text{Der } W_d(\mathcal{A})$ при $d(\gamma) = 0$, $2\gamma + d(\alpha) = 0$. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Mizuhara A. On simple left-symmetric algebras over a solvable Lie algebra // Sci. Math. Jpn. 2003. V. 57, N 2. P. 325–337.
2. Пожидаев А. П. Об обобщенной конструкции Мицухары // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 545–559.
3. Пожидаев А. П. Об эндоморфах правосимметрических алгебр // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1077–1086.
4. Пожидаев А. П. О конструкции Мицухары для эндоморфов // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 1. С. 41–54.
5. Пожидаев А. П. Группы автоморфизмов прелиевых дублей Витта // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 6. С. 1214–1226.
6. Gelfand I. M., Dorfman I. Ya. Hamiltonian operators and algebraic structures related to them // Funct. Anal. Appl. 1979. V. 13, N 4. P. 248–262.
7. Xu X. Novikov–Poisson algebras // J. Algebra. 1997. V. 190, N 2. P. 253–279.

8. Zhelyabin V. N., Zakharov A. S. On finite-dimensional simple Novikov algebras of characteristic p // Sib. Math. J. 2024. V. 65, N 3. P. 680–687.
9. Zel'manov E. On a class of local translation invariant Lie algebras // Soviet Math. Dokl. 1987. V. 35. P. 216–218.
10. Xu X. On simple Novikov algebras and their irreducible modules // J. Algebra. 1996. V. 185, N 3. P. 905–934.
11. Pozhidaev A. P., Zhelyabin V. N. On simple and semisimple finite-dimensional Novikov algebras and their automorphisms // J. Algebra. 2026. V. 689.
12. Harper L. R. Jr. On differentiably simple algebras // Trans. Am. Math. Soc. 1961. V. 100, N 1. P. 63–72.

Поступила в редакцию 24 октября 2025 г.

После доработки 17 февраля 2026 г.

Принята к публикации 18 февраля 2026 г.

Логачев Вадим Анатольевич
Новосибирский государственный университет,
Пирогова, 1, Новосибирск 630090
v.logachev@g.nsu.ru

Пожидаев Александр Петрович (ORCID 0000-0002-2038-166X)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru