Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 512.54+512.552

АВТОМОРФИЗМЫ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ТИПА $\mathbf{G}_2$ НАД ЛОКАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ С НЕОБРАТИМОЙ ТРОЙКОЙ

В. В. Киракосян

Аннотация. Доказано, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над коммутативным локальным кольцом с необратимой тройкой стандартен, т. е. является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.304

Ключевые слова: группа Шевалле, автоморфизм, локальное кольцо.

Введение

Цель данной работы — доказать, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над коммутативным локальным кольцом с необратимой тройкой стандартен, т. е. является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов. В работе мы следуем статьям Е. И. Буниной, в первую очередь статьям [1–3], в которых доказан аналогичный результат для других групп Шевалле.

Для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ существует лишь одна решетка весов, которая является одновременно универсальной и присоединенной, поэтому для каждого кольца R существует единственная группа Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ — это $G(R) = G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$. Более того, над локальными кольцами универсальные группы Шевалле совпадают со своими элементарными подгруппами, поэтому рассматриваемая группа Шевалле одновременно является элементарной (т. е. нам известны образующие и соотношения в ней).

Подобные результаты для групп Шевалле над полями были доказаны Стейнбергом [4] для конечного случая и Хамфри [5] для бесконечного. Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами были посвящены работы многих авторов, среди которых стоит отметить работы Бореля и Титса [6], Картера и Чена [7], Чена [8–12], Абе [13], А. А. Клячко [14].

Аналог теоремы 2 для систем корней типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$ и $\mathbf{E}_\ell$ был получен Е. И. Буниной в [15], в работе [16] полностью описаны автоморфизмы групп Шевалле данных типов над локальными кольцами с $1/2$. Подобная теорема для локальных колец без $1/2$ была доказана в [1]. Для систем корней типов $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{G}_2$ она получена в [17], однако в этой работе для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ предполагаются обратимыми двойка и тройка в кольце. В статьях [2, 3] данный результат доказывается для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ уже без требования обратимости двойки. В [18] Е. И. Буниной была доказана аналогичная теорема для системы корней типа $\mathbf{F}_4$ при условии обратимости двойки. В [19] все

© 2026 Киракосян В. В.

предыдущие результаты с помощью метода локализации обобщены для случая присоединенных групп на произвольные коммутативные кольца (с соответствующими условиями обратимости двойки или тройки).

Для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ в случае локального кольца от требования обратимости тройки также удается отказаться, этому и посвящена данная работа.

1. Определения и формулировки основных теорем

Определение 1. Подмножество Φ евклидова пространства $\mathbb{E}$ называется *системой корней* в $\mathbb{E}$, если выполнены следующие условия:

1) множество Φ конечно, порождает $\mathbb{E}$ и не содержит 0;
2) если $\alpha \in \Phi$, то из кратных корня α в Φ содержатся только $\pm\alpha$;
3) если $\alpha \in \Phi$, то *отражение* w_α относительно гиперплоскости, ортогональной α, выражаемое формулой
$$w_\alpha\beta = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,$$
сохраняет множество Φ инвариантным; коэффициенты, участвующие в формуле, обозначаются через
$$\langle\beta,\alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$
и называются *числами Картана*;
4) если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\langle\beta,\alpha\rangle \in \mathbb{Z}$.

Определение 2. Подмножество Δ в Φ называется *базисом* (а входящие в него корни *простыми*), если

1) Δ является базисом в $\mathbb{E}$;
2) каждый корень $\beta \in \Phi$ представляется в виде
$$\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha,$$
где коэффициенты k_α целые и все одновременно неотрицательные или неположительные.

Если все коэффициенты k_α неотрицательны (соответственно все k_α неположительны), то корень β называется *положительным* (соответственно *отрицательным*).

Определение 3. Подгруппа (конечная) W в $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$, порожденная всеми отражениями w_α, $\alpha \in \Phi$, называется *группой Вейля* системы корней Φ.

Группа Вейля играет исключительно важную роль в изучении систем корней. Среди свойств группы Вейля выделим два важных свойства, которые в дальнейшем будем использовать: группа Вейля в действительности порождается лишь простыми отражениями w_α, $\alpha \in \Delta$, и она транзитивно действует на множестве всех корней одной длины.

Подробные сведения о системах корней, их типах и свойствах можно найти, например, в [20, 21].

Зафиксируем неприводимую систему корней Φ, имеющую тип $\mathbf{G}_2$. Данная система корней имеет ранг 2, состоит из 6 положительных и 6 отрицательных корней, и в ней встречаются корни двух различных длин. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ —

стандартный ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$. Пронумеруем положительные корни системы $\mathbf{G}_2$ следующим образом (первые два корня являются простыми):

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = -2e_1 + e_2 + e_3,\\
&\alpha_2 = e_1 - e_2;\\
&\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = -e_1 + e_3,\\
&\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 = -e_2 + e_3,\\
&\alpha_5 = \alpha_1 + 3\alpha_2 = e_1 - 2e_2 + e_3,\\
&\alpha_6 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = -e_1 - e_2 + 2e_3.
\end{aligned}$$

Рассмотрим комплексную простую алгебру Ли $\mathscr{L}$ типа $\mathbf{G}_2$ с картановской подалгеброй $\mathscr{H}$ (подробную информацию о полупростых алгебрах Ли, включая их классификацию и связь с системами корней, можно найти в [21]). В алгебре Ли $\mathscr{L}$ можно выбрать *базис Шевалле*

$$\{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi;\ h_i \mid 1 \leq i \leq 2\}$$

таким образом, что для любых двух элементов этого базиса их коммутатор является целочисленной линейной комбинацией элементов этого же базиса, а именно:

1) $[h_i, h_j] = 0,\ 1 \leq i, j \leq 2;$
2) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha,\ 1 \leq i \leq 2,\ \alpha \in \Phi;$
3) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ является целочисленной линейной комбинацией векторов h_1, h_2;
4) если α, β — линейно независимые корни и $\alpha + \beta \notin \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = 0$;
5) если $\alpha + \beta \in \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, причем $N_{\alpha\beta} = \pm(r+1)$, где r — максимальное целое число, для которого $\beta - r\alpha \in \Phi$; существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех констант $N_{\alpha\beta}$ (подробнее см. в приложении).

Определение 4. Если $x \in \mathscr{L}$, то отображение

$$\operatorname{ad} x \colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}, \quad \operatorname{ad} x(y) = [x, y]$$

является эндоморфизмом пространства $\mathscr{L}$ и, более того, (внутренним) дифференцированием алгебры Ли $\mathscr{L}$. Отображение

$$\operatorname{ad} \colon \mathscr{L} \to \mathfrak{gl}(\mathscr{L}), \quad \operatorname{ad}(x) = \operatorname{ad} x$$

является гомоморфизмом алгебр Ли и называется *присоединенным представлением* алгебры Ли $\mathscr{L}$.

Замечание 1. Присоединенное представление полупростой алгебры Ли является *точным* (инъективным), так как его ядро совпадает с центром алгебры Ли, который, разумеется, является абелевым идеалом и поэтому тривиален.

Введем обозначения для образов элементов базиса Шевалле при присоединенном представлении:

$$X_\alpha = \operatorname{ad} x_\alpha; \quad H_i = \operatorname{ad} h_i.$$

Определение 5. Ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно имеет единственный максимальный идеал (совпадающий с радикалом этого кольца). Это равносильно тому, что необратимые элементы кольца R образуют идеал.

Замечание 2. Будем описывать автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над коммутативными локальными кольцами с необратимой тройкой и активно пользоваться тем фактом, что в этом случае двойка обратима, так как иначе в силу локальности кольца и равенства $3-2=1$ единица была бы необратима, что неверно.

Возьмем произвольное коммутативное локальное кольцо и построим элементарную присоединенную группу Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над этим кольцом (см. [22]). Для удобства кратко воспроизведем построение здесь (см. также приложение).

В базисе Шевалле алгебры Ли $\mathscr{L}$ все операторы $X_\alpha^k/k!$ для $\alpha \in \Phi$ и $k \in \mathbb{N}$ записываются целочисленными (нильпотентными) матрицами. Целочисленная матрица может рассматриваться как матрица над произвольным коммутативным кольцом R с единицей, т. е. рассмотрим матрицы размера $n \times n$ над R (в нашем случае $n = \dim \mathscr{L} = 14$), и указанные матрицы $X_\alpha^k/k!$ при $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{N}$ вложим в $\mathrm{M}_n(R)$.

Теперь рассмотрим автоморфизмы свободного модуля R^n вида

$$x_\alpha(t) = \exp(tX_\alpha) = 1 + tX_\alpha + \frac{t^2X_\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{t^kX_\alpha^k}{k!} + \ldots, \quad \alpha \in \Phi,\ t \in R.$$

Так как все матрицы X_α нильпотентны, такой ряд всегда конечен.

Очевидно, что для таких экспонент выполнено следующее простое, но важное соотношение:

$$x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t+u). \tag{1}$$

Определение 6. Автоморфизмы $x_\alpha(t)$ называются *элементарными корневыми элементами.*

Определение 7. Подгруппа в $\mathrm{Aut}(R^n)$, порожденная всеми автоморфизмами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$, называется *элементарной присоединенной группой Шевалле* и обозначается через $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$.

Определение 8. В элементарной группе Шевалле определим также следующие важные элементы:

- $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$; $\quad \omega_\alpha = w_\alpha(1)$;
- $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$.

Как отмечено во введении, над локальными кольцами для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ группа Шевалле $G(R) = G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ совпадает со своей элементарной подгруппой $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, поэтому в данной работе мы не будем вводить группы Шевалле в общем смысле.

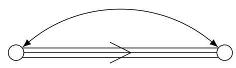
Определим стандартные автоморфизмы (элементарной) группы Шевалле $G(R)$ и еще один дополнительный тип автоморфизмов.

Определение 9. Пусть $\rho\colon R \to R$ — автоморфизм кольца R. Отображение $(a_{ij}) \mapsto (\rho(a_{ij}))$ является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается той же буквой ρ и называется *кольцевым автоморфизмом* группы $G(R)$. Заметим, что для всех $\alpha \in \Phi$, $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ отображается в $x_\alpha(\rho(t))$.

Определение 10. Предположим, что R — совершенное кольцо характеристики 3, т. е. $3=0$ и эндоморфизм Фробениуса $F(t) = t^3$ является автоморфизмом R. Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ положим $\lambda(\alpha) = 1$, если α — длинный корень, и $\lambda(\alpha) = 3$, если α — короткий корень. Пусть $\delta\colon \Phi \to \Phi$ — перестановка системы корней типа $\mathbf{G}_2$, которая переставляет длинные корни с короткими таким образом, что отображение $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)\delta(\alpha)$ является изоморфизмом систем корней; такая δ определена однозначно, при этом $\delta^2 = 1$ и δ действует на множестве простых корней следующим образом: $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$. Тогда знаки структурных констант $N_{\alpha\beta}$ могут быть выбраны таким образом, что отображение

$$x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(t^{\lambda(\alpha)}), \quad \alpha \in \Phi,\ t \in R,$$

однозначно определяет автоморфизм группы $G(R)$, который обозначается той же буквой δ и называется *диаграммным* (*графовым*) *автоморфизмом* группы $G(R)$ (см. [22, 23]):



Замечание 3. Очевидно, кольцевой и диаграммный автоморфизмы коммутируют между собой.

Определение 11. Пусть $g \in G(R)$. Сопряжение группы $G(R)$ с помощью элемента g является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается через i_g и называется *внутренним автоморфизмом* группы $G(R)$.

Эти три типа автоморфизмов называются *стандартными*. К стандартным также относятся *центральные* автоморфизмы, однако в рассматриваемом нами случае системы корней типа $\mathbf{G}_2$ таких нетривиальных нет, поэтому будем говорить, что автоморфизм группы $G(R)$ *стандартен*, если он является композицией трех введенных типов автоморфизмов.

Кроме того, нам понадобится еще один дополнительный тип автоморфизмов.

Определение 12. Пусть V — пространство представления группы $G(R)$, $C \in \mathrm{GL}(V)$ — матрица, нормализующая группу $G(R)$:

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Тогда отображение $x \mapsto CxC^{-1}$ является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается через i_C и называется *автоморфизмом-сопряжением* группы $G(R)$, *индуцированным элементом* C.

Главная наша цель — доказательство следующей основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть $G(R) = E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ — группа Шевалле типа $\mathbf{G}_2$, R — коммутативное локальное кольцо с необратимой тройкой. Тогда любой автоморфизм группы $G(R)$ стандартен.*

Основная теорема будет сразу следовать из двух теорем.

Теорема 2. *Каждый автоморфизм φ группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальным кольцом с необратимой тройкой является композицией кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.*

Теорема 3. *Каждый автоморфизм-сопряжение группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальным кольцом с необратимой тройкой является внутренним* (*т. е. сопряжением с помощью элемента данной группы Шевалле*).

Разд. 2–6 посвящены доказательству теоремы 2. Разд. 7 посвящен доказательству теоремы 3.

2. Замена исходного автоморфизма изоморфизмом специального вида

В данном разделе используются некоторые соображения, взятые из работы [24] и присутствующие также в предыдущих подобных работах, упоминавшихся выше (в частности, [1, 2]).

Пусть J — максимальный идеал (радикал) кольца R, $3 \in J$, k — поле вычетов R/J характеристики 3, $E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J)$ — нормальная подгруппа в группе Шевалле $G(R) = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, порожденная всеми элементами $x_\alpha(t)$ для $\alpha \in \Phi$, $t \in J$. Тогда E_J — наибольшая нормальная собственная подгруппа в $G(R)$ (см. [25–27]). Следовательно, подгруппа E_J инвариантна относительно действия автоморфизма φ.

Таким образом, автоморфизм

$$\varphi\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$$

индуцирует автоморфизм

$$\overline{\varphi}\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)/E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k).$$

Группа $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k)$ является присоединенной группой Шевалле над полем, значит, автоморфизм $\overline{\varphi}$ стандартен (см. [22]), т. е. имеет вид

$$\overline{\varphi} = i_{\overline{g}} \overline{\delta}^{\varepsilon} \overline{\rho},$$

где $\overline{g} \in N(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k))$, $\overline{\delta}$ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\overline{\rho}$ — полевой автоморфизм, индуцированный некоторым автоморфизмом поля k.

Ясно, что существует матрица $g \in \mathrm{GL}_n(R)$, образ которой при факторизации R по J совпадает с $\overline{g}$. При этом отметим, что мы не можем быть уверены в том, что $g \in N(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R))$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi' = i_{g^{-1}} \varphi.$$

Это изоморфизм группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \subset \mathrm{GL}_n(R)$ на некоторую подгруппу $\mathrm{GL}_n(R)$, причем при факторизации R по J он переходит в точности в автоморфизм $\overline{\delta}^{\varepsilon} \overline{\rho}$.

До конца этого раздела временно предположим, что диаграммного автоморфизма $\overline{\delta}$ нет в композиции, т. е. $\varepsilon = 0$ и изоморфизм φ' при факторизации по J переходит в автоморфизм $\overline{\rho}$. Тогда проведенные рассуждения доказывают следующее утверждение.

Предложение 1. *Любая матрица $A \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ с элементами из подкольца R_1 в R, порожденного единицей, отображается при изоморфизме φ' в матрицу из множества*

$$A \cdot \mathrm{GL}_n(R, J) = \{B \in \mathrm{GL}_n(R) \mid A - B \in \mathrm{M}_n(J)\}$$

(*иными словами, ее образ является сдвигом исходной матрицы на некоторую матрицу с элементами из радикала J*).

Пусть $a \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, $a^2 = 1$. Тогда элемент

$$e = \frac{1}{2}(1 + a)$$

является идемпотентом в кольце $\mathrm{M}_n(R)$:

$$e^2 = \frac{1}{4}(1 + 2a + a^2) = \frac{1}{4}(2 + 2a) = e.$$

Этот идемпотент определяет разложение свободного R-модуля $V \cong R^n$:

$$V = eV \oplus (1-e)V = V_0 \oplus V_1$$

(модули V_0, V_1 свободны, так как любой проективный модуль над локальным кольцом свободен [28]). Пусть $\overline{V} = \overline{V}_0 \oplus \overline{V}_1$ — соответствующее разложение k-модуля (линейного пространства) $\overline{V} \cong k^n$ относительно $\overline{a}$ и

$$\overline{e} = \frac{1}{2}(1+\overline{a}).$$

Предложение 2. *Модули (подпространства) $\overline{V}_0$, $\overline{V}_1$ являются образами модулей V_0, V_1 при факторизации по J.*

Доказательство. Обозначим образы модулей V_0, V_1 при факторизации по J через $\widetilde{V}_0$, $\widetilde{V}_1$ соответственно. Так как

$$V_0 = \{x \in V \mid ex = x\}, \quad V_1 = \{x \in V \mid ex = 0\},$$

то

$$\overline{e}(\overline{x}) = \frac{1}{2}(1+\overline{a})(\overline{x}) = \frac{1}{2}(1+\overline{a}(\overline{x})) = \frac{1}{2}(1+\overline{a(x)}) = \overline{e(x)}.$$

Тогда $\widetilde{V}_0 \subset \overline{V}_0$, $\widetilde{V}_1 \subset \overline{V}_1$.

Пусть $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in V_0$, $x_1 \in V_1$. Тогда $\overline{e}(\overline{x}) = \overline{e}(\overline{x}_0) + \overline{e}(\overline{x}_1) = \overline{x}_0$. Если $\overline{x} \in \widetilde{V}_0$, то $\overline{x} = \overline{x}_0$. $\square$

Пусть теперь для матрицы a с целыми элементами $b = \varphi'(a)$. Тогда $b^2 = 1$ и согласно предложению 1 b сравнима с a по модулю радикала J.

Предложение 3. *Предположим, что $a \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, $b \in \mathrm{GL}_n(R)$, $a^2 = b^2 = 1$, a — матрица с элементами из подкольца R_1 в R, порожденного единицей, b и a сравнимы по модулю радикала J, $V = V_0 \oplus V_1$ — разложение V относительно a, $V = V_0' \oplus V_1'$ — разложение V относительно b. Тогда $\dim V_0' = \dim V_0$, $\dim V_1' = \dim V_1$.*

Доказательство. Имеем R-базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ модуля V такой, что

$$\{e_1, \ldots, e_k\} \subset V_0, \quad \{e_{k+1}, \ldots, e_n\} \subset V_1.$$

Ясно, что

$$\overline{ae}_i = \overline{ae_i} = \overline{\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j\right)} = \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ji}\overline{e}_j.$$

Пусть $\overline{V} = \overline{V}_0 \oplus \overline{V}_1$, $\overline{V} = \overline{V}'_0 \oplus \overline{V}'_1$ — разложения k-модуля (пространства) $\overline{V}$ относительно $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Ясно, что $\overline{V}_0 = \overline{V}'_0$, $\overline{V}_1 = \overline{V}'_1$. Таким образом, по предложению 2 образы модулей V_0 и V_0', V_1 и V_1' при факторизации по радикалу J совпадают. Возьмем такие $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset V_0'$, $\{f_{k+1}, \ldots, f_n\} \subset V_1'$, что $\overline{f}_i = \overline{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Так как матрица перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к $\{f_1, \ldots, f_n\}$ обратима (сравнима с единичной матрицей по модулю радикала J), то $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — это R-базис в V. Ясно, что тогда $\{f_1, \ldots, f_k\}$ является R-базисом в V_0', а $\{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ — R-базисом в V_1'. $\square$

Следствие 1. *В условиях предыдущего предложения для матрицы b существует некоторый базис модуля V, в котором b имеет тот же вид, что и матрица a в исходном базисе. Таким образом, матрицы a и b сопряжены.*

3. Метод линеаризации для локальных колец

Опишем метод линеаризации для локальных колец, которым далее будем активно пользоваться. Этот метод позволяет доказывать, что некоторая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в локальном кольце R имеет лишь нулевое решение в радикале кольца. Он был описан и использовался во многих аналогичных работах, перечисленных выше; здесь для удобства приведем теорему и один простой пример, иллюстрирующий применение метода (см., например, [2]).

Теорема 4. *Пусть R — локальное кольцо, и пусть дана система полиномиальных уравнений вида $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, где все входящие полиномы $P_i \in R[x_1, \dots, x_n]$ с коэффициентами в кольце R и, кроме того, для каждого i выполнено $P_i(0, \dots, 0) = 0$ (т. е. это полиномы без свободного члена). Пусть $\overline{P}_i$ — приведенные по модулю радикала $J = \mathrm{Rad}(R)$ линеаризации P_i, т. е. $\overline{P}_i$ содержит лишь мономы первой степени соответствующего полинома, приведенные по модулю радикала. Тогда если система $\overline{P}_i = 0$ имеет единственное нулевое решение $x_j = 0$, то исходная система в радикале J имеет единственное решение $x_j = 0$ ($x_j \in J$).*

Доказательство. Система уравнений $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ может быть представлена в виде $A(x_1, \dots, x_n)x = 0$, где A — матрица, зависящая от переменных x_j. Если определитель матрицы A сравним по модулю радикала с обратимым элементом кольца R (который не зависит от переменных x_j, так как они лежат в радикале), то можно явно выразить решение $x = (A(x))^{-1}0 = 0$ и получить, что $x = 0$ (так как в локальном кольце любой элемент, сравнимый с обратимым по модулю радикала, обратим). Но определитель матрицы $A(x)$ сравним по модулю радикала с определителем матрицы линеаризованной системы, значит, достаточным условием единственности нулевого решения исходной полиномиальной системы в радикале является обратимость матрицы линеаризованной системы, т. е. единственность нулевого решения для линеаризованной системы. $\square$

Замечание 4. Отметим, что способ получения указанной матрицы $A(x)$ неоднозначен, однако ее линеаризация однозначна.

Пример 1. Пусть R — локальное кольцо с необратимой тройкой. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + 3y - xy = 0, \\ x - y + xy = 0. \end{cases}$$

Ее приведенная по модулю радикала линеаризация имеет вид

$$\begin{cases} x = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

определитель матрицы равен -1 и обратим, поэтому нулевое решение единственно. Следовательно, по теореме исходная система тоже имеет лишь нулевое решение в радикале кольца.

С другой стороны, для исходной системы можно убедиться в единственности нулевого решения в радикале непосредственно. Перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{cases} x + (3 - x)y = 0, \\ (1 + y)x - y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x = (1+y)^{-1}y$, подставляем это выражение в первое уравнение и получаем после приведения подобных членов

$$((1+y)^{-1} + (3-x))y = 0.$$

Так как коэффициент при y обратим (как сумма обратимого и необратимого элементов локального кольца), получаем, что $y = 0$, значит, и $x = 0$.

4. Образы элементов $w_\alpha(1)$, $x_\alpha(1)$

Напомним, что мы перешли к изоморфизму φ', который при факторизации R по J переходит в автоморфизм $\overline{\delta}^\varepsilon\overline{\rho}$.

Рассмотрим матрицы

$$h_\alpha(-1) = \omega_\alpha^{-2} = \omega_\alpha^2, \quad \alpha \in \Phi$$

(вид некоторых из этих матриц в выбранном базисе можно найти в приложении). Это диагональные матрицы порядка 2 с элементами ± 1 на диагонали, причем все они содержат одинаковое количество элементов -1. Значит, по следствию 1 образ $h_\alpha(-1)$ при изоморфизме сопряжен $h_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(-1)$.

Лемма 1. *Образы $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ можно сопряжением одновременно привести к $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$ и $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\varepsilon = 0$. Поскольку образы коммутирующих матриц $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ также коммутируют, их можно привести к диагональному виду. Применяя следствие 1 к каждой из инволюций $h_{\alpha_1}(-1)$, $h_{\alpha_2}(-1)$ и их произведению $h_{\alpha_1}(-1)\cdot h_{\alpha_2}(-1)$, получаем, что ранги всех четырех совместных собственных подмодулей образов совпадают с рангами соответствующих подмодулей для исходной пары. Следовательно, можно произвести сопряжение (заменой базиса) и привести образы матриц $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ к диагональному виду, а затем выполнить сопряжение матрицей перестановки, чтобы на диагонали элементы стояли так же, как у $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$.

В случае $\varepsilon = 1$ аналогичное рассуждение дает нужный результат. $\square$

Теперь будем считать, что мы заменили исходный изоморфизм новым, переводящим $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ в $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$ и $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$.

Рассмотрим матрицы $x_\alpha(1)$, $w_\alpha(1) = \omega_\alpha$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Лемма 2. *Все матрицы $x_\alpha(1)$ и ω_α, $\alpha \in \Phi$, выражаются через следующий набор матриц:*

$$x_{\alpha_1}(1), \quad x_{\alpha_2}(1), \quad \omega_{\alpha_1}, \quad \omega_{\alpha_2}.$$

Доказательство. В элементарной группе Шевалле для всех $\alpha, \beta \in \Phi$ выполнено, в числе прочих, следующее соотношение (см. [22]):

$$\omega_\alpha x_\beta(t)\omega_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha\beta}(\pm t), \tag{2}$$

где знак зависит только от корней α, β (и не зависит ни от t, ни от выбора базиса), причем этот знак совпадает для пар корней α, β и $\alpha, -\beta$. В частности, отсюда легко получить такое же соотношение для $w_\beta(t)$, $t \in R^*$:

$$\begin{aligned}\omega_\alpha w_\beta(t)\omega_\alpha^{-1} &= \omega_\alpha(x_\beta(t)x_{-\beta}(-t^{-1})x_\beta(t))\omega_\alpha^{-1}\\ &= x_{w_\alpha\beta}(\pm t)x_{-w_\alpha\beta}(\mp t^{-1})x_{w_\alpha\beta}(\pm t) = w_{w_\alpha\beta}(\pm t).\end{aligned} \tag{3}$$

Если в каком-то соотношении должен быть выбран знак минус, то достаточно потом обратить полученную матрицу, поскольку в силу (1) $x_\alpha(-t) = (x_\alpha(t))^{-1}$ и $w_\alpha(-t) = (w_\alpha(t))^{-1}$.

Группа Вейля системы корней порождается простыми отражениями, а также действует транзитивно на множестве корней одинаковой длины. Следовательно, имея матрицы $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}$ и используя соотношения (3) (при $t = 1$), можно выразить все матрицы ω_α, $\alpha \in \Phi$.

Аналогично, так как α_1, α_2 — корни двух возможных различных длин, снова благодаря транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины можно из соотношений (2) (при $t = 1$) выразить все матрицы $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$. $\square$

Таким образом, если произвести сопряжение матрицей из $\mathrm{GL}_n(R, J)$ (т. е. сравнимой с единичной по модулю радикала J), которое переведет образы матриц $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_2}(1)$, ω_{α_1}, ω_{α_2} в матрицы $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(1)$, $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(1)$, $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}$, $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}$ соответственно, то композиция изоморфизма с этим сопряжением будет переводить все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$, $\alpha \in \Phi$, причем по-прежнему при факторизации R по J она будет переходить в автоморфизм $\overline{\delta}^\varepsilon \overline{\rho}$.

Лемма 3. *Указанное сопряжение существует.*

Доказательство. Пользуясь предложением 1, обозначим образы матриц $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_2}(1)$, ω_{α_1}, ω_{α_2} через $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(1)+A$, $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(1)+B$, $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}+C$, $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}+D$, где $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(J)$ — неизвестные матрицы.

В элементарной группе Шевалле для всех $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha + \beta \neq 0$, выполнено следующее соотношение на коммутатор соответствующих корневых элементов (см. [22]):

$$(x_\alpha(t), x_\beta(u)) = \prod_{\substack{i\alpha+j\beta\in\Phi,\\ i,j\in\mathbb{N}}} x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij}t^i u^j), \tag{4}$$

где $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$ — групповой коммутатор (обозначаемый для удобства круглыми скобками, чтобы не путать с коммутатором в алгебре Ли), произведение в правой части берется по всем корням $i\alpha + j\beta$, $i, j \in \mathbb{N}$, расположенным в некотором фиксированном порядке, а c_{ij} — целые числа, зависящие только от α, β и от выбранного порядка корней (и не зависящие от t, u), причем если $\alpha + \beta \in \Phi$, то $c_{11} = N_{\alpha\beta}$. В случае нашей системы корней Φ типа $\mathbf{G}_2$ произведение в правой части всегда состоит не более чем из четырех элементов, и все коэффициенты c_{ij} принимают значения $\pm1, \pm2, \pm3$. Еще раз подчеркнем, что благодаря целочисленности c_{ij} все участвующие в соотношении корневые элементы легко выражаются через соответствующие корневые элементы без коэффициентов c_{ij} — достаточно воспользоваться свойством (1).

Итак, рассмотрим набор образов всех соотношений вида (2), (3), (4) при $t = u = 1$, а также соотношений $h_{\alpha_i}(-1) = \omega_{\alpha_i}^2$, $i = 1, 2$. Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц A, B, C, D, т. е. относительно $4n^2 = 4 \cdot 14^2 = 784$ переменных из радикала. Решая систему методом линеаризации, можно попытаться доказать, что $A = B = C = D = 0$. Однако компьютерное вычисление показывает, что это не так, линеаризованная система, приведенная по модулю радикала J (отметим, что в результате все коэффициенты такой системы будут равны 0 или ±1), может иметь ненулевое решение, а именно, ее ранг равен 732 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$). Это означает, что действительно требуется нетривиальное сопряжение.

С помощью компьютерного вычисления можно убедиться, что существует такое сопряжение, которое сохраняет $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ и при этом позволяет занулить ровно 52 переменные (т. е. после этого сопряжения соответствующие элементы матриц-образов совпадают с элементами требуемых матриц). Таким образом, получаем систему относительно $784-52=732$ переменных, приведенная по модулю радикала линеаризация которой оказывается системой полного ранга, равного 732, и поэтому имеет только нулевое решение, откуда по теореме о линеаризации заключаем, что $A=B=C=D=0$ и найденное сопряжение является искомым. $\square$

5. Образы элементов $x_\alpha(t)$

Итак, на данном этапе изоморфизм переводит все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$, $\alpha\in\Phi$.

Следствие 2. *Если $\varepsilon=1$, то кольцо R имеет характеристику* 3.

Доказательство. Рассмотрим корни α_1, α_2, $\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$, $\alpha_5=\alpha_1+3\alpha_2$, $\alpha_6=2\alpha_1+3\alpha_2$ и следующие соотношения вида (4):

$$(x_{\alpha_1}(1),x_{\alpha_6}(1))=1,\quad (x_{\alpha_2}(1),x_{\alpha_4}(1))=x_{\alpha_5}(\pm 3).$$

Поскольку $\delta(\alpha_1)=\alpha_2$, $\delta(\alpha_6)=\alpha_4$, отсюда сразу следует $\pm3=0$ в R. $\square$

Изучим образы $x_\alpha(t)$, а именно, докажем, что эти матрицы переходят в некоторые $x_\alpha(t')$ в случае $\varepsilon=0$ или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ в случае $\varepsilon=1$, где $t\mapsto t'$ — кольцевой автоморфизм. Над полем это верно (см. [22]). Значит, в нашем случае они переходят в $x_\alpha(t')+T$ ($\varepsilon=0$) или $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})+T$ ($\varepsilon=1$), где $T\in \mathrm{M}_n(J)$. Нужно доказать, что во всех случаях $T=0$. Однако это может быть неверно, если неправильно выбрать t' и соответственно T. Правильный выбор будет описан ниже.

Замечание 5. На этом этапе мы ничего не говорим об отображении $t\mapsto t'$. Утверждается лишь, что существует такой элемент t', что матрицы отображаются указанным образом.

Лемма 4. *Все матрицы $x_\alpha(t)$, $\alpha\in\Phi$, выражаются через следующий набор матриц:*

$$\omega_\alpha,\ \alpha\in\Phi;\quad x_{\alpha_1}(t),\ x_{\alpha_2}(t).$$

Доказательство. По аналогии с леммой 2 данное утверждение сразу следует из соотношений (2), транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины и того факта, что α_1,α_2 — это корни двух возможных различных длин. $\square$

Рассмотрим матрицы $x_{\alpha_1}(t)$ и $x_{\alpha_2}(t)$. Пользуясь рассуждением выше, обозначим их образы при изоморфизме через $x_{\alpha_1}(t')+S$ и $x_{\alpha_2}(t')+T$ соответственно ($\varepsilon=0$) или через $x_{\alpha_2}(t')+S$ и $x_{\alpha_1}((t')^3)+T$ соответственно ($\varepsilon=1$), где $S,T\in\mathrm{M}_n(J)$ — неизвестные матрицы с элементами из радикала J. Выберем S и T так, чтобы выполнялось $T_{7,11}=0$. Как выяснится далее при компьютерном вычислении, это даст правильный выбор представителя. В силу леммы 4 достаточно доказать, что $S=T=0$.

Возьмем набор образов тех соотношений вида (2) и (4), в которые входят только элементы (и их степени) вида $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(1)$ и ω_α, $\alpha\in\Phi$. Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц S и T, т. е. (с учетом условия $T_{7,11} = 0$) относительно $2n^2 - 1 = 2 \cdot 14^2 - 1 = 391$ переменных из радикала. Решим полученную систему методом линеаризации. Компьютерное вычисление показывает, что приведенная по модулю радикала J линеаризация системы является системой полного ранга, равного 391 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$), и поэтому имеет только нулевое решение. Отсюда по теореме о линеаризации заключаем, что $S = T = 0$.

6. Доказательство теоремы 2

Таким образом, на данном этапе изоморфизм переводит матрицы $x_\alpha(t)$ в некоторые $x_\alpha(t')$ ($\varepsilon = 0$) или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ ($\varepsilon = 1$). Обозначим отображение $t \mapsto t'$ через $\rho\colon R \to R$.

Лемма 5. *Отображение ρ инъективно, аддитивно и мультипликативно; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также инъективен.*

Доказательство. Инъективность отображения ρ, а также эндоморфизма F при $\varepsilon = 1$, очевидна, так как у нас изоморфизм групп и при этом $x_\alpha(0) = 1$.

Аддитивность ρ сразу следует из соотношения (1).

Мультипликативность ρ следует, например, из соотношения (4) для корней α_1 и α_5:

$$(x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_5}(u)) = x_{\alpha_1+\alpha_5}(tu) = x_{\alpha_6}(tu)$$

(это рассуждение остается в силе и при $\varepsilon = 1$, так как участвующие в соотношении корни длинные). $\square$

Следствие 3. *Отображение ρ является изоморфизмом из кольца R на некоторое его подкольцо R'; в случае $\varepsilon = 1$ то же верно и для эндоморфизма Фробениуса F.*

Докажем сюръективность полученных эндоморфизмов кольца R. Заметим, что мы находимся в ситуации, в которой для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}(V)$ выполнено

$$i_C\varphi(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)) = CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} \subset E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R')$$

(причем при $\varepsilon = 0$ имеет место равенство). Покажем, что $R' = R$.

Лемма 6. *Если для некоторого $C \in \mathrm{GL}(V)$ имеет место включение*

$$CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} \subset E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R'),$$

где R' — подкольцо в R, то $R' = R$.

Доказательство. Обозначим матричные единицы через E_{ij}. Можно проверить, что

$$((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_5}(1) - 1))^2 = E_{6,12},$$

$$\omega_{\alpha_6}((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_5}(1) - 1))^2\omega_{\alpha_6}^{-1} = E_{12,6}.$$

Произведение этих матричных единиц дает матричную единицу $E_{6,6}$. В матрице $h_{\alpha_1}(t)$ элемент на позиции (6, 6) равен t. Таким образом, с помощью нашей группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ сложением и умножением матриц можно получить любую матрицу вида $tE_{6,6}$, где $t \in R^*$.

Предположим теперь, что R' — собственное подкольцо в R. Так как

$$CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} \subset E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R'),$$

то подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R)$, порожденное всеми элементами группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, должно переходить в подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R')$, порожденное элементами группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R')$. Следовательно, все элементы матриц $C(tE_{6,6})C^{-1}$ при $t \in R^*$ должны лежать в подкольце R'.

Очевидно, в обратимой матрице над локальным кольцом не может быть строки или столбца, полностью состоящего из необратимых элементов. Значит, существует такая пара индексов i, j, что элементы $C_{i,6}$ и $(C^{-1})_{6,j}$ обратимы. Отсюда заключаем, что при $t \in R^*$

$$C_{i,6}t(C^{-1})_{6,j} = (C(tE_{6,6})C^{-1})_{i,j} \in R',$$

т. е.

$$C_{i,6}R^*(C^{-1})_{6,j} = R^* \subset R'.$$

Но локальное кольцо R аддитивно порождается множеством R^*, поэтому в действительности $R \subset R'$, что дает требуемое равенство $R' = R$. $\square$

Следствие 4. *Отображение ρ является автоморфизмом кольца R; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также является автоморфизмом кольца R, т. е. в этом случае R — совершенное кольцо характеристики 3. При этом выполнено $CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$.*

Таким образом, показано, что композиция $i_C\varphi$ исходного автоморфизма φ группы Шевалле и некоторого сопряжения (замены базиса) с помощью матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(R)$, нормализующей данную группу, является композицией $\delta^\varepsilon\rho$, где δ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, ρ — кольцевой автоморфизм. Это завершает доказательство теоремы 2.

7. Доказательство теоремы 3

Пусть $C \in \mathrm{GL}_n(R)$ — матрица из нормализатора группы $G(R)$:

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Наша цель — показать, что $C \in R^* \cdot G(R)$.

Если J — максимальный идеал (радикал) кольца R, то матрицы из $\mathrm{M}_n(J)$ образуют радикал в кольце матриц $\mathrm{M}_n(R)$, поэтому

$$C \cdot \mathrm{M}_n(J) \cdot C^{-1} = \mathrm{M}_n(J),$$

следовательно,

$$C \cdot (1 + \mathrm{M}_n(J)) \cdot C^{-1} = 1 + \mathrm{M}_n(J),$$

т. е.

$$C \cdot E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J) \cdot C^{-1} = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J),$$

так как $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J) = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \cap (1 + \mathrm{M}_n(J))$. Значит, образ $\overline{C}$ матрицы C при факторизации кольца R по радикалу J индуцирует автоморфизм-сопряжение группы Шевалле $G(k) = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k)$, где k — поле вычетов R/J характеристики 3.

Лемма 7. *Любой автоморфизм-сопряжение группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над полем k характеристики 3 является внутренним.*

Доказательство. Предположим, что некоторая матрица $C \in \mathrm{GL}_n(k)$ лежит в нормализаторе группы $G(k)$. Тогда автоморфизм-сопряжение i_C стандартен (см. [22]), т. е. $i_C = i_g \circ \delta^\varepsilon \circ \rho$, где $g \in G(k)$, δ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, ρ — полевой автоморфизм. Следовательно, $i_{g^{-1}}i_C = i_{C'} = \delta^\varepsilon\rho$, $C' \in$

$\mathrm{GL}_n(k)$. Заметим, что для любого $\alpha \in \Phi$ выполнено $\delta^\varepsilon \rho(x_\alpha(1)) = \delta^\varepsilon(x_\alpha(1)) = x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$.

Допустим, что $\varepsilon = 1$. Тогда имеем $C' x_\alpha(1) = x_{\delta(\alpha)}(1) C'$ для всех $\alpha \in \Phi$. Достаточно записать эти соотношения, рассматриваемые как уравнения относительно неизвестной матрицы $C' \in \mathrm{M}_n(k)$, для корней, положительно порождающих всю систему, а именно $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$. Вычисление показывает, что пространство решений полученной системы линейных уравнений над полем k одномерно и не содержит решений, соответствующих обратимым матрицам. Это приводит к противоречию с предположением $\varepsilon = 1$.

Таким образом, $\varepsilon = 0$ и $i_{g^{-1}} i_C = i_{C'} = \rho$, т. е. сопряжение матрицей C' задает полевой автоморфизм ρ. Значит, $C' x_\alpha(1) = x_\alpha(1) C'$ для всех $\alpha \in \Phi$. Следовательно, матрица C' скалярна и автоморфизм i_C внутренний. $\square$

Из леммы 7 следует, что $i_{\overline{C}} = i_{g'}$, $g' \in G(k)$. Возьмем произвольный элемент $g \in G(R)$, для которого выполнено $\overline{g} = g'$, и рассмотрим матрицу $C' = g^{-1} \cdot C$. Очевидно, эта матрица также нормализует группу $G(R)$, при этом $\overline{C'} = 1$. Таким образом, описание матриц из нормализатора группы $G(R)$ сведено к описанию матриц из нормализатора данной группы, сравнимых с единичной по модулю радикала J.

Далее будем считать, что изначальная матрица C сравнима с единичной по модулю радикала: $C = 1 + Y$, $Y \in \mathrm{M}_n(J)$.

Для каждого $\alpha \in \Phi$ имеет место равенство

$$C x_\alpha(1) C^{-1} = x_\alpha(1) \cdot g_\alpha, \quad g_\alpha \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J),$$

или, эквивалентно,

$$C x_\alpha(1) = x_\alpha(1) g_\alpha C. \tag{5}$$

Любой элемент $g_\alpha \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J)$ можно разложить в произведение вида

$$t_{\alpha_1}(1 + a_{\alpha,1}) t_{\alpha_2}(1 + a_{\alpha,2}) x_{\alpha_1}(b_{\alpha,1}) \cdots x_{\alpha_6}(b_{\alpha,6}) x_{-\alpha_1}(c_{\alpha,1}) \cdots x_{-\alpha_6}(c_{\alpha,6}),$$

где $a_{\alpha,1}, a_{\alpha,2}, b_{\alpha,1}, \ldots, b_{\alpha,6}, c_{\alpha,1}, \ldots, c_{\alpha,6} \in J$ (см., например, [25]).

Рассматривая набор соотношений вида (5) для корней $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$, положительно порождающих всю систему, получаем систему полиномиальных уравнений относительно неизвестных $Y_{ij}, a_{\alpha,i}, b_{\alpha,i}, c_{\alpha,i}$, лежащих в радикале. Однако чтобы иметь возможность применить к ней метод линеаризации, необходимо произвести некоторые дополнительные преобразования.

Заметим, что при умножении матрицы C на матрицы из $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J)$ и на скаляры, сравнимые с 1 по модулю радикала J, по-прежнему получается матрица из нормализатора группы $G(R)$, сравнимая с единичной по модулю J.

Лемма 8. *Существует такой набор элементов $d, a_1, a_2 \in 1 + J$, $b_1, \ldots, b_6$, $c_1, \ldots, c_6 \in J$, что для матрицы*

$$\begin{aligned} C' = d \cdot t_{\alpha_1}(a_1) t_{\alpha_2}(a_2) \cdot x_{-\alpha_2}(b_2) x_{-\alpha_6}(b_6) x_{-\alpha_5}(b_5) x_{-\alpha_4}(b_4) x_{-\alpha_3}(b_3) x_{-\alpha_1}(b_1) \\ \cdot C \cdot x_{\alpha_1}(c_1) x_{\alpha_3}(c_3) x_{\alpha_4}(c_4) x_{\alpha_5}(c_5) x_{\alpha_6}(c_6) x_{\alpha_2}(c_2) \end{aligned}$$

выполнено $C' = 1 + Y'$, где $Y' \in \mathrm{M}_n(J)$ содержит нули на конкретных $n + 1 = 15$ позициях (явно указанных в доказательстве).

Доказательство. Положим $C^{(0)} = C$.

Рассмотрим позицию (α_5, α_6) и умножим $C^{(0)}$ слева на $x_{-\alpha_1}\big(-C^{(0)}_{\alpha_5,\alpha_6} / C^{(0)}_{\alpha_6,\alpha_6}\big)$. В результате получим матрицу $C^{(1)}$, у которой $C^{(1)}_{\alpha_5,\alpha_6} = 0$.

Рассмотрим позицию (α_4,α_6) и умножим $C^{(1)}$ слева на $x_{-\alpha_3}\big(-C^{(1)}_{\alpha_4,\alpha_6}/C^{(1)}_{\alpha_6,\alpha_6}\big)$. Получим матрицу $C^{(2)}$, у которой $C^{(2)}_{\alpha_4,\alpha_6}=0$ и при этом также сохраняется $C^{(2)}_{\alpha_5,\alpha_6}=0$, так как в матрице $x_{-\alpha_3}(t)$ строка, соответствующая α_5, содержит лишь диагональную единицу и все остальные нули.

Рассмотрим позицию (α_3,α_6) и умножим $C^{(2)}$ слева на $x_{-\alpha_4}\big(C^{(2)}_{\alpha_3,\alpha_6}/C^{(2)}_{\alpha_6,\alpha_6}\big)$. Получим матрицу $C^{(3)}$, у которой $C^{(3)}_{\alpha_3,\alpha_6}=0$ и при этом все предыдущие нулевые позиции также остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_1,α_6) и умножим $C^{(3)}$ слева на $x_{-\alpha_5}\big(C^{(3)}_{\alpha_1,\alpha_6}/C^{(3)}_{\alpha_6,\alpha_6}\big)$. Получим матрицу $C^{(4)}$, у которой $C^{(4)}_{\alpha_1,\alpha_6}=0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (h_1,α_6) и умножим $C^{(4)}$ слева на $x_{-\alpha_6}\big(C^{(4)}_{h_1,\alpha_6}/(2C^{(4)}_{\alpha_6,\alpha_6})\big)$. Получим матрицу $C^{(5)}$, у которой $C^{(5)}_{h_1,\alpha_6}=0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4,α_5) и умножим $C^{(5)}$ слева на $x_{-\alpha_2}\big(-C^{(5)}_{\alpha_4,\alpha_5}/C^{(5)}_{\alpha_5,\alpha_5}\big)$. Получим матрицу $C^{(6)}$, у которой $C^{(6)}_{\alpha_4,\alpha_5}=0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Далее рассмотрим позицию (α_6,α_5) и умножим $C^{(6)}$ уже справа на $x_{\alpha_1}\big(-C^{(6)}_{\alpha_6,\alpha_5}/C^{(6)}_{\alpha_6,\alpha_6}\big)$. Получим матрицу $C^{(7)}$, у которой $C^{(7)}_{\alpha_6,\alpha_5}=0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4,α_2) и умножим $C^{(7)}$ справа на $x_{\alpha_3}\big(-C^{(7)}_{\alpha_4,\alpha_2}/(2C^{(7)}_{\alpha_4,\alpha_4})\big)$. Получим матрицу $C^{(8)}$, у которой $C^{(8)}_{\alpha_4,\alpha_2}=0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4,h_2) и умножим $C^{(8)}$ справа на $x_{\alpha_4}\big(C^{(8)}_{\alpha_4,h_2}/C^{(8)}_{\alpha_4,\alpha_4}\big)$. Получим матрицу $C^{(9)}$, у которой $C^{(9)}_{\alpha_4,h_2}=0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию $(\alpha_4,-\alpha_2)$ и умножим $C^{(9)}$ справа на $x_{\alpha_5}\big(C^{(9)}_{\alpha_4,-\alpha_2}/C^{(9)}_{\alpha_4,\alpha_4}\big)$. Получим матрицу $C^{(10)}$, у которой $C^{(10)}_{\alpha_4,-\alpha_2}=0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию $(\alpha_5,-\alpha_1)$ и умножим $C^{(10)}$ справа на $x_{\alpha_6}\big(C^{(10)}_{\alpha_5,-\alpha_1}/C^{(10)}_{\alpha_5,\alpha_5}\big)$. Получим матрицу $C^{(11)}$, у которой $C^{(11)}_{\alpha_5,-\alpha_1}=0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4,α_3) и умножим $C^{(11)}$ справа на $x_{\alpha_2}\big(C^{(11)}_{\alpha_4,\alpha_3}/(2C^{(11)}_{\alpha_4,\alpha_4})\big)$. Получим матрицу $C^{(12)}$, у которой $C^{(12)}_{\alpha_4,\alpha_3}=0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Таким образом, матрица $C^{(12)}$ содержит ровно 12 (недиагональных) нулевых позиций.

Положим $C^{(13)}=\big(C^{(12)}_{h_1,h_1}\big)^{-1}\cdot C^{(12)}$. Тогда $C^{(13)}_{h_1,h_1}=1$, т. е. $Y^{(13)}_{h_1,h_1}=0$, при этом, очевидно, все предыдущие нулевые позиции сохраняются.

Осталось применить умножения на диагональные матрицы t_{α_1} и t_{α_2}. Заметим, что у $t_{\alpha_1}(a)$ на позиции (α_6,α_6) стоит a и на позиции (α_4,α_4) стоит 1, а у $t_{\alpha_2}(a)$ на позиции (α_4,α_4) стоит a и на позиции (α_6,α_6) стоит 1, при этом у обеих матриц на позиции (h_1,h_1) стоит 1. Следовательно, если положить $C'=C^{(15)}=t_{\alpha_1}\big((C^{(13)}_{\alpha_6,\alpha_6})^{-1}\big)\cdot t_{\alpha_2}\big((C^{(13)}_{\alpha_4,\alpha_4})^{-1}\big)\cdot C^{(13)}$, то получим $C'_{\alpha_4,\alpha_4}=C'_{\alpha_6,\alpha_6}=1$, т. е. $Y'_{\alpha_4,\alpha_4}=Y'_{\alpha_6,\alpha_6}=0$, при этом все предыдущие нулевые позиции также сохраняются. $\square$

Итак, рассмотрим матрицу $C' = 1+Y'$ из леммы 8. Как уже отмечалось, C' по-прежнему нормализует группу $G(R)$ и сравнима с единичной по модулю J.

Теперь вернемся к системе уравнений вида (5). Аналогичные уравнения справедливы для матрицы C'. Имеем систему уравнений относительно $n^2 - (n+1) + 4n = 237$ неизвестных $Y'_{ij}, a_{\alpha,i}, b_{\alpha,i}, c_{\alpha,i}$, лежащих в радикале. Как показывает вычисление, линеаризация данной системы является системой полного ранга, равного 237, поэтому имеет единственное нулевое решение. По теореме о линеаризации отсюда, в частности, следует, что $Y' = 0$, т. е. $C' = 1$. Это завершает доказательство теоремы 3.

Основная теорема 1 теперь немедленно следует из доказанных теорем 2 и 3.

8. Приложение

8.1. Знаки структурных констант $N_{\alpha\beta}$. Напомним, что при $\alpha + \beta \in \Phi$ структурные константы $N_{\alpha\beta}$ базиса Шевалле выражаются формулой

$$N_{\alpha\beta} = \pm(r+1),$$

где r — максимальное целое число, для которого $\beta - r\alpha \in \Phi$. Как уже упоминалось в работе, существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех констант $N_{\alpha\beta}$. Более подробные сведения об этом можно найти, например, в [29, 30]. Готовые таблицы структурных констант для систем корней некоторых типов можно также найти, например, в [23, 31].

8.2. Построение представления, некоторые элементы группы Шевалле. В пространстве представления возьмем следующий базис:

$$v_1 = x_{\alpha_1},\ \ldots,\ v_6 = x_{\alpha_6},$$

$$v_7 = x_{-\alpha_1},\ \ldots,\ v_{12} = x_{-\alpha_6},$$

$$v_{13} = h_1,\ v_{14} = h_2.$$

Выпишем, к примеру, образы элементов x_α базиса, соответствующих простым корням, а также некоторые элементы группы Шевалле:

$$X_{\alpha_1} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-2&3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix},$$

$$X_{\alpha_2} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-2\\
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix};$$

$$x_{\alpha_1}(t) = \begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&-t^2&0&0&0&0&0&-2\,t&3\,t\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&t&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&t&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&-t&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-t&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&t&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix},$$

$$x_{\alpha_2}(t) = \begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&-t^2&0&0&0&0&t&-2\,t\\
-t&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
t^2&0&-2\,t&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
t^3&0&-3\,t^2&3\,t&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&3\,t&3\,t^2&-t^3&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&2\,t&-t^2&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-t&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&t&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix};$$

$$\omega_{\alpha_1} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},$$

$$\omega_{\alpha_2} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix};$$

$$h_{\alpha_1}(-1) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},$$

$$h_{\alpha_2}(-1)=\begin{pmatrix}
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}.$$

Благодарность. Автор выражает благодарность Елене Игоревне Буниной за внимание к работе, ценные замечания и консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бунина Е. И.* Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 7. С. 47–80.
2. *Бунина Е. И., Верёвкин П. А.* Автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 7. С. 49–66.
3. *Бунина Е. И., Верёвкин П. А.* Нормализатор группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 1. С. 57–62.
4. *Steinberg R.* Automorphisms of finite linear groups // Canad. J. Math. 1960. V. 12. P. 606–615.
5. *Humphreys J. E.* On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 908–911.
6. *Borel A., Tits J.* Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples // Ann. Math. 1973. V. 97, N 3. P. 499–571.
7. *Carter R. W., Chen Yu.* Automorphisms of affine Kac–Moody groups and related Chevalley groups over rings // J. Algebra. 1993. V. 155, N 1. P. 44–94.
8. *Chen Yu.* Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1994. V. 92. P. 231–237.
9. *Chen Yu.* Automorphisms of simple Chevalley groups over $\mathbb{Q}$-algebras // Tôhoku Math. J. 1995. V. 47, N 1. P. 81–97.
10. *Chen Yu.* On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras // Proc. Am. Math. Soc. 1995. V. 123, N 8. P. 2357–2361.
11. *Chen Yu.* Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Am. Math. Soc. 1996. V. 348, N 2. P. 521–541.
12. *Chen Yu.* Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. 2000. V. 226, N 2. P. 719–741.
13. *Abe E.* Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra Analysis. 1993. V. 5, N 2. P. 74–90.
14. *Klyachko A. A.* Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras // J. Algebra. 2010. V. 324, N 10. P. 2608–2619.
15. *Бунина Е. И.* Автоморфизмы элементарных присоединенных групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с 1/2 // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 4. С. 443–470.
16. *Бунина Е. И.* Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с 1/2 // Фундамент. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 2. С. 35–59.
17. *Бунина Е. И.* Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами // Фундамент. и прикл. математика. 2007. Т. 13, № 4. С. 3–29.

18. *Bunina E. I.* Automorphisms of Chevalley groups of type $\mathbf{F}_4$ over local rings with 1/2 // J. Algebra. 2010. V. 323, N 8. P. 2270–2289.
19. *Bunina E. I.* Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. 2012. V. 355, N 1. P. 154–170.
20. *Bourbaki N.* Groupes et algèbres de Lie. Paris: Hermann, 1968.
21. *Humphreys J. E.* Introduction to Lie algebras and representation theory. New York: Springer, 1978.
22. *Steinberg R.* Lectures on Chevalley groups. Mew Haven: Yale Univ., 1967.
23. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1989.
24. *Петечук В. М.* Автоморфизмы групп SL_n, GL_n над некоторыми локальными кольцами // Мат. заметки. 1980. Т. 28, № 2. С. 187–204.
25. *Abe E.* Chevalley groups over local rings // Tôhoku Math. J. 1969. V. 21, N 3. P. 474–494.
26. *Abe E.* Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Contemp. Math. 1989. V. 83. P. 1–17.
27. *Costa D. L., Keller G. E.* On the normal subgroups of $\mathbf{G_2}(A)$ // Trans. Am. Math. Soc. 1999. V. 351, N 12. P. 5051–5088.
28. *McDonald B. R.* Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$ // Trans. Am. Math. Soc. 1976. V. 215. P. 145–159.
29. *Samelson H.* Notes on Lie algebras. New York: Springer, 1990.
30. *Cohen A. M., Murray S. H., Taylor D. E.* Computing in groups of Lie type // Math. Comp. 2004. V. 73, N 247. P. 1477–1498.
31. *Gilkey P. B., Seitz G. M.* Some representations of exceptional Lie algebras // Geom. Dedicata. 1988. V. 25. P. 407–416.

Поступила в редакцию 18 февраля 2026 г.
После доработки 18 февраля 2026 г.
Принята к публикации 10 марта 2026 г.

Киракосян Вазген Валерикович (ORCID 0009-0005-7393-890X)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
vazgen.kirakosyan@gmail.com