Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 515.12

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ РАЗМЕРНОСТЕЙ КВАНТОВАНИЯ ИДЕМПОТЕНТНЫХ МЕР

А. В. Иванов

Аннотация. На пространстве $I(X)$ идемпотентных мер (мер Маслова), заданных на метрическом компакте X, вводится метрика ρ_I, определяющая метризацию функтора идемпотентных мер I. Для каждой меры $\mu \in I(X)$ по метрике ρ_I можно определить верхнюю и нижнюю размерности квантования этой меры, которые не превосходят соответствующих емкостных размерностей носителя меры μ. Доказана следующая теорема о промежуточных значениях размерностей квантования идемпотентных мер: на любом метрическом компакте емкостной размерности $a < \infty$ для любых двух чисел b, c, связанных неравенствами $0 \leq b \leq c \leq a$, существует идемпотентная мера, нижняя и верхняя размерности квантования которой равны b и c соответственно.

Ранее аналогичная теорема о промежуточных значениях была доказана автором для размерностей квантования вероятностных мер, идемпотентным аналогом которых являются меры Маслова.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.303

Ключевые слова: метрический компакт, емкостная размерность, размерность квантования идемпотентных мер.

1. Введение

В работе речь пойдет о мерах (вероятностных и идемпотентных), заданных на метрическом компакте (X, ρ). *Квантованием* вероятностной (борелевской) меры называется ее приближение мерами с конечными носителями. В рамках теории квантования введено понятие размерности квантования $D(\mu)$ вероятностной меры μ (см. [1]). Величина $D(\mu)$ характеризует скорость возрастания числа точек в носителе ε-аппроксимации меры μ при $\varepsilon \to 0$. Эта скорость бывает «неустойчивой» и тогда рассматривают верхнюю $\overline{D}(\mu)$ и нижнюю $\underline{D}(\mu)$ размерности квантования меры μ, связанные неравенством $\underline{D}(\mu) \leq \overline{D}(\mu)$. Известно (см. [1]), что размерности квантования вероятностной меры (верхняя и нижняя) не превосходят соответствующих емкостных размерностей ее носителя. В работе [2] была доказана следующая теорема о промежуточных значениях размерностей квантования вероятностных мер.

Теорема 1.1 [2]. *Пусть (X, ρ) — метрический компакт, емкостная размерность которого равна $a \leq \infty$. Тогда для любых двух чисел b, c, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq b \leq c \leq a$, на X существует вероятностная мера μ_{bc}, для*

Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

которой

$$\underline{D}(\mu_{bc}) = b, \quad \overline{D}(\mu_{bc}) = c.$$

Постановка вопроса о приближении предполагает наличие подходящей метрики на пространстве вероятностных мер, заданных на метрическом компакте (X, ρ). В качестве такой метрики в сформулированных выше утверждениях рассматривается расстояние Канторовича — Рубинштейна ρ_P, которое определяется по формуле

$$\rho_P(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \mathrm{Lip}_1(X)\}, \tag{1}$$

где $\mathrm{Lip}_1(X)$ — множество вещественных функций на X, удовлетворяющих условию Липшица с константой 1, и $\mu(f) = \int f\,d\mu$.

Главным результатом данной статьи является доказательство аналога теоремы 1.1 для идемпотентных мер. Основные понятия идемпотентного анализа кратко изложены в обзоре [3]. В идемпотентной математике аналогом вероятностных мер являются идемпотентные меры или меры Маслова (см. [4]), которые можно определить как нормированные функционалы $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$, линейные относительно идемпотентных арифметических операций (суммы $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и произведения $x \odot y = x + y$). Множество $I(X)$ идемпотентных мер на компакте X, наделенное слабой* топологией, всегда является компактом. Непрерывное отображение компактов $f : X \to Y$ естественно порождает отображение $I(f) : I(X) \to I(Y)$. Таким образом, конструкция I определяет ковариантный функтор в категории компактов и непрерывных отображений. Топологические свойства этого функтора исследованы в [4], где было доказано, что функтор I является нормальным в смысле Е. В. Щепина [5].

В работе [6] для любого метрического компакта (X, ρ) на $I(X)$ определены непрерывные псевдометрики ρ_n, $n \in \mathbb{N}$, по формуле (1) с заменой Lip_1 на Lip_n. С помощью этих псевдометрик мы вводим расстояние ρ_I на $I(X)$, отличное от метрик, рассмотренных в [6–8]. При этом метрики ρ_I задают метризацию функтора I по В. В. Федорчуку [9]. В метрическом пространстве $(I(X), \rho_I)$ определены размерности квантования идемпотентной меры μ (верхняя $\overline{D}_I(\mu)$ и нижняя $\underline{D}_I(\mu)$), которые (как и в случае вероятностных мер) не превосходят соответствующих емкостных размерностей носителя меры μ. В работе доказано, что для размерностей квантования идемпотентных мер справедлива следующая теорема о промежуточных размерностях, аналогичная теореме 1.1. *Для любого метрического компакта (X, ρ) емкостной размерности $\dim_B X = a < \infty$ и любых двух чисел b, c, связанных неравенствами $0 \le b \le c \le a$, существует мера $\mu_{bc} \in I(X)$ такая, что*

$$\underline{D}_I(\mu_{bc}) = b, \quad \overline{D}_I(\mu_{bc}) = c.$$

При доказательстве этой теоремы используется техника работы [10], где теорема о промежуточных размерностях была доказана при ограничении $b < a/2$.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Для компактного хаусдорфова пространства (компакта) X через $C(X)$, как обычно, обозначается пространство непрерывных функций на X; c_X — постоянная функция на X со значением $c \in \mathbb{R}$.

Определение 2.1 [4]. Функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется *идемпотентной мерой* или *мерой Маслова*, если для любых $f, g \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия:

1) $\mu(c_X) = c$;

2) $\mu(c_X + f) = c + \mu(f)$;

3) $\mu(\max\{f, g\}) = \max\{\mu(f), \mu(g)\}$.

(Условие (1) является условием нормировки функционала μ, (2) и (3) — условия линейности относительно идемпотентных арифметических операций.)

Множество идемпотентных мер обозначается через $I(X)$. Любой функционал $\mu \in I(X)$ непрерывен на $C(X)$ относительно топологии равномерной сходимости и сохраняет порядок. Последнее означает, что если $f \le g$ (т. е. $f(x) \le g(x)$ для любого $x \in X$), то $\mu(f) \le \mu(g)$. Для каждой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ определена ее плотность $d_\mu : X \to \mathbb{R}_{\max}$ по формуле

$$d_\mu(x) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X),\ f \le 0_X,\ f(x) = 0\},$$

где $\mathbb{R}_{\max} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Функция d_μ удовлетворяет условию $\max d_\mu = 0$ и полунепрерывна сверху. При этом d_μ определяет исходную меру μ:

$$\mu(f) = \max\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}, \tag{2}$$

где $f \in C(X)$. (Формула (2) корректна, поскольку функция $d_\mu + f$ полунепрерывна сверху и, следовательно, $\sup\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}$ достигается в некоторой точке компакта X.) И обратно, если взять любую полунепрерывную сверху функцию $g : X \to \mathbb{R}_{\max}$, удовлетворяющую условию $\max g = 0$, то формула (2) определяет идемпотентную меру μ_g:

$$\mu_g(f) = \max\{g(x) + f(x) : x \in X\},$$

для которой $d_{\mu_g} = g$ (см. [11]). Носителем меры μ называется множество

$$\operatorname{supp}(\mu) = \overline{\{x : d_\mu(x) > -\infty\}}.$$

Множество $I(X)$ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ с тихоновской топологией. Тем самым $I(X)$ наделяется слабой* топологией. В [12] показано, что для любого компакта X пространство $I(X)$ является компактом. Для любого непрерывного отображения компактов $h : X \to Y$ определено непрерывное отображение $I(h) : I(X) \to I(Y)$ по формуле

$$I(h)(\mu)(f) = \mu(f \circ h)$$

для каждого $f \in C(Y)$. Таким образом, конструкция I является ковариантным функтором в категории Comp компактов и непрерывных отображений, который (как показано в [4]) является нормальным в смысле Е. В. Щепина (см. [5]).

В работе [6] для каждого $n \in \mathbb{N}$ на $I(X)$ определена непрерывная псевдометрика ρ_n по формуле

$$\rho_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \operatorname{Lip}_n(X)\}, \tag{3}$$

где $\operatorname{Lip}_n(X)$ — множество функций на X, удовлетворяющих условию Липшица с константой n. В силу условия 2 определения 2.1 в формуле (3) достаточно рассматривать функции из $\operatorname{Lip}_n(X)$, принимающие нулевое значение в некоторой фиксированной точке x_0. Множество таких функций равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Следовательно, по теореме Арцела — Асколи это множество компактно. Таким образом, в формуле (3) sup можно заменить на max. Заметим, что $f \in \mathrm{Lip}_n(X)$ тогда и только тогда, когда $f/n \in \mathrm{Lip}_1(X)$.

В [8] для каждой возрастающей последовательности натуральных чисел $\alpha = (n_i : i \in \mathbb{N})$ определена совместимая с топологией метрика $\rho_{I\alpha}$ на $I(X)$ по формуле

$$\rho_{I\alpha}(\mu, \nu) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\rho_{n_i}(\mu, \nu)}{n_i 2^i}. \tag{4}$$

Модифицируем формулу (4), заменив в ней ряд коэффициентов $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i}$ рядом $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i^2}$ (напомним, что его сумма равна $\pi^2/6$). В качестве α возьмем последовательность $(2^i : i \in \mathbb{N})$ и положим

$$\rho_I(\mu, \nu) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\rho_{2^i}(\mu, \nu)}{2^i \cdot i^2}. \tag{5}$$

Почти дословно повторив рассуждения, приведенные при доказательстве предложений 3.2 и 3.4 из [8], можно утверждать, что формула (5) определяет совместимую с топологией метрику ρ_I на $I(X)$ и метрики ρ_I задают метризацию функтора I в терминологии В. В. Федорчука.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $I_n(X) = \{\mu \in I(X) : |\operatorname{supp}(\mu)| \le n\}$ замкнуто в $I(X)$ и $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n(X)$ всюду плотно в $I(X)$ (см. [4]). Поэтому для любой меры $\mu \in I(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ определено натуральное число $N(\mu, \varepsilon)$, равное наименьшей мощности носителя ε-приближения меры μ по метрике ρ_I:

$$N(\mu, \varepsilon) = \min\{n : \rho_I(\mu, I_n(X)) \le \varepsilon\}.$$

Если μ имеет бесконечный носитель, то $N(\mu, \varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \to 0$. Скорость этого возрастания характеризует размерность квантования $D_I(\mu)$ меры μ:

$$D_I(\mu) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\mu, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}$$

(если указанного предела не существует, то рассматриваются верхний и нижний пределы, и мы получаем верхнюю $\overline{D}_I(\mu)$ и нижнюю $\underline{D}_I(\mu)$ размерности квантования μ).

Нам понадобится также понятие емкостных размерностей (верхней $\overline{\dim}_B F$ и нижней $\underline{\dim}_B F$) замкнутого подмножества F метрического компакта (X, ρ) (см. [12]). Для множества F и $\varepsilon > 0$ через $N(F, \varepsilon)$ обозначим наименьшее число точек в ε-сети для F. Тогда

$$\overline{\dim}_B F = \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(F, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}, \quad \underline{\dim}_B F = \varliminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(F, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}.$$

В случае совпадения этих пределов используют обозначение $\dim_B F$ и говорят о *емкостной размерности* F.

Предложение 2.2. *Для любой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ имеют место неравенства*

$$\overline{D}_I(\mu) \le \overline{\dim}_B(\operatorname{supp}(\mu)), \quad \underline{D}_I(\mu) \le \underline{\dim}_B(\operatorname{supp}(\mu)).$$

Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством аналогичных неравенств в [7, предложение 4.3 и следствие 4.4].

Подмножество A метрического компакта (X, ρ) называется *ε-разделенным* ($\varepsilon > 0$), если $\rho(x, y) > \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in A$.

Следующее предложение доказано в [10].

Предложение 2.3 [10, предложение 2.5]. *Пусть последовательность положительных чисел ε_n монотонно ($\varepsilon_n \ge \varepsilon_{n+1}$) сходится к нулю,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \varepsilon_{n+1}} = 1,$$

и пусть T_n — последовательность ε_n-разделенных ε_n-сетей в X. Тогда

$$\overline{\dim}_B X = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |T_n|}{-\log \varepsilon_n}, \quad \underline{\dim}_B X = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |T_n|}{-\log \varepsilon_n}.$$

Из доказанного в [10] предложения 2.1 следует

Предложение 2.4. *Если последовательность ε_n удовлетворяет условиям предложения 2.3, то*

$$\underline{D}_I(\mu) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log N(\mu, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}, \quad \overline{D}_I(\mu) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log N(\mu, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}.$$

Пусть $\mu \in I(X)$ и d_μ — функция плотности меры μ. Положим

$$K(\mu) = \{x : d_\mu(x) = 0\}.$$

Предложение 2.5. *Для любой меры $\mu \in I(X)$ имеют место неравенства*

$$\underline{D}_I(\mu) \ge \underline{\dim}_B K(\mu), \quad \overline{D}_I(\mu) \ge \overline{\dim}_B K(\mu).$$

Доказательство. Опираясь на результаты [7, леммы 3.3, 4.5], легко проверить, что имеет место неравенство

$$N(\mu, \varepsilon) \ge N(K(\mu), \varepsilon),$$

из которого следует утверждение предложения. □

Для замкнутого подмножества F метрического компакта X определим идемпотентную меру λ_F по формуле

$$\lambda_F(f) = \max\{f(x) : x \in F\},$$

где $f \in C(X)$. Очевидно, что мера λ_F имеет функцию плотности d_{λ_F}, которая тождественно равна нулю на F и принимает значение $-\infty$ во всех остальных точках X. Из предложений 2.2 и 2.5 вытекает

Следствие 2.6. *Для любого замкнутого подмножества* $F \subset X$

$$\underline{D}_I(\lambda_F) = \underline{\dim}_B F, \quad \overline{D}_I(\lambda_F) = \overline{\dim}_B F.$$

В пространстве $I(X)$ определено идемпотентное сложение $\oplus$. Для $\mu, \nu \in I(X)$ мера $\mu \oplus \nu \in I(X)$ определяется по формуле

$$(\mu \oplus \nu)(f) = \max\{\mu(f), \nu(f)\},$$

где $f \in C(X)$. Очевидно, что

$$d_{\mu\oplus\nu}(x) = \max\{d_\mu(x), d_\nu(x)\}.$$

Имеют место следующие утверждения, доказательства которых почти тождественны доказательствам соответствующих предложений из [7].

Предложение 2.7 [7, предложение 4.10]. *Для любых* $\mu, \nu \in I(X)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство*

$$N(\mu \oplus \nu, 2\varepsilon) \leq N(\mu, \varepsilon) + N(\nu, \varepsilon).$$

Следствие 2.8 [7, следствие 4.11]. *Для любых мер* $\mu, \nu \in I(X)$

$$\overline{D}_I(\mu \oplus \nu) \leq \max\{\overline{D}_I(\mu), \overline{D}_I(\nu)\}.$$

3. Теорема о промежуточных значениях размерностей квантования

Пусть (X, ρ) — метрический компакт, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Замкнутый ε-шар точки x будем обозначать через $B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$.

Теорема 3.1. *Пусть* (X, ρ) *— метрический компакт и* $\dim_B X = a < \infty$. *Тогда для любых чисел* b, c, *удовлетворяющих неравенствам* $0 \leq b \leq c \leq a$, *существует мера* $\mu_{bc} \in I(X)$ *такая, что*

$$\underline{D}_I(\mu_{bc}) = b, \quad \overline{D}_I(\mu_{bc}) = c.$$

Доказательство. Покажем вначале, что на X существует идемпотентная мера μ, для которой $D_I(\mu) = b$. Для $b = 0$ в качестве μ можно взять любую меру с конечным носителем. При $b = a$ искомой мерой μ является мера λ_X в силу следствия 2.6.

В дальнейшем $b \in (0, a)$. Положим $\varepsilon_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем в X возрастающую (по включению) последовательность подмножеств $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$, где $|T_0| = 1$ и каждое T_n при $n \in \mathbb{N}$ является ε_n-разделенной ε_n-сетью в X. Такую последовательность легко построить по индукции, дополняя на шаге $n+1$ уже построенное T_n до максимального ε_{n+1}-разделенного подмножества T_{n+1}, которое (в силу максимальности) будет ε_{n+1}-сетью.

Положим

$$b_n = 2^{2^{np}},$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $p > 0$ — числовой параметр. Определим функцию $d : X \to \mathbb{R}_{\max}$ следующим образом: $d(x) = 0$ при $x \in T_0$; $d(x) = -b_n$ при $x \in T_n \setminus T_{n-1}$; $d(x) =$

$-\infty$ при $x \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$. Легко проверить, что функция d полунепрерывна сверху и $\max d = 0$. Следовательно, d есть функция плотности некоторой идемпотентной меры μ. Покажем, что при изменении параметра p размерность квантования меры μ принимает все значения в диапазоне $(0, a)$.

Оценка снизу. Пусть мера ν имеет конечный носитель $\mathrm{supp}(\nu) = B$ и $|B| < |T_n|$. Множество T_n является ε_n-разделенным, следовательно, шары $B(x, \varepsilon_n/2)$, $x \in T_n$, попарно не пересекаются. Таким образом, существует точка $t \in T_n$, для которой $B(t, \varepsilon_n/2) \cap B = \varnothing$, и, значит, $\rho(t, B) > \varepsilon_n/2$. Поскольку функция $\rho(x, B)$ принадлежит $\mathrm{Lip}_1(X)$, для любого $i \in \overset{\circ}{N}$ получаем

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) \geq |\mu(2^i \rho(x, B)) - \nu(2^i \rho(x, B))|.$$

Множество B является носителем меры ν и $\rho(x, B) = 0$ при $x \in B$. Следовательно, $\nu(2^i \rho(x, B)) = 0$. При этом

$$\mu(2^i \rho(x, B)) \geq 2^i \rho(t, B) + d(t) > 2^i \varepsilon_n/2 - b_n.$$

Таким образом,

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) \geq 2^i \varepsilon_n/2 - b_n.$$

Положим

$$i(n) = [2^{np}] + n + 2.$$

Легко проверить, что для всех $i > i(n)$ выполняется неравенство

$$2^i \varepsilon_n/4 > b_n.$$

Таким образом, при $i > i(n)$

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) > 2^i \varepsilon_n/4.$$

Следовательно,

$$\rho_I(\mu, \nu) \geq \frac{6}{\pi^2} \sum_{i > i(n)} \frac{\rho_{2^i}(\mu, \nu)}{2^i \cdot i^2} > \frac{6}{\pi^2} \frac{\varepsilon_n}{4(i(n)+1)}.$$

Введем обозначение

$$\delta_n = \frac{6}{\pi^2} \frac{\varepsilon_n}{4(i(n)+1)}.$$

Нетрудно показать, что последовательность δ_n удовлетворяет условиям предложения 2.3 и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \delta_n} = \frac{1}{p+1}.$$

Итак, доказано, что если носитель меры ν имеет мощность меньше $|T_n|$, то $\rho_I(\mu, \nu) > \delta_n$. Следовательно,

$$N(\mu, \delta_n) \geq |T_n|. \tag{6}$$

Из неравенства (6) и предложений 2.3, 2.4 получаем

$$\underline{D}_I(\mu) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log N(\mu, \delta_n)}{-\log \delta_n} \geq \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{\log |T_n|}{-\log \varepsilon_n} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \delta_n} \right) = \frac{\dim_B X}{p+1}.$$

Оценка сверху. Для каждого n определим функцию $d_n : X \to \mathbb{R}_{\max}$ следующим образом: $d_n(x) = d(x)$ при $x \in T_n$; $d_n(x) = -\infty$ при $x \notin T_n$. Очевидно, что d_n является функцией плотности некоторой меры ν_n с носителем $\operatorname{supp}(\nu_n) = T_n$. Для $i \in \mathbb{N}$ оценим величину

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = \max\{|\mu(2^i f) - \nu_n(2^i f)| : f \in \operatorname{Lip}_1(X)\}. \qquad (7).$$

Пусть g — функция из $\operatorname{Lip}_1(X)$, на которой достигается максимум правой части формулы (7), т. е.

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = |\mu(2^i g) - \nu_n(2^i g)|.$$

В силу формулы (2) для некоторой точки $y \in X$ имеет место равенство $\mu(2^i g) = 2^i g(y) + d(y)$. Если $y \in T_n$, то легко проверить, что $\mu(2^i g) = \nu_n(2^i g)$ и тогда $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = 0$. Если $y \notin T_n$, то существует точка $t \in T_n$ такая, что $\rho(t, y) \le \varepsilon_n$, поскольку T_n является ε_n-сетью. Имеем

$$2^i g(t) + d(t) \le \nu_n(2^i g) < 2^i g(y) + d(y) = \mu(2^i g).$$

Следовательно,

$$|\mu(2^i g) - \nu_n(2^i g)| \le 2^i |g(y) - g(t)| + d(y) - d(t).$$

При этом $|g(y) - g(t)| \le \varepsilon_n$, $d(y) \le -b_{n+1}$, $-d(t) \le b_n$. Таким образом,

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \le 2^i \varepsilon_n - (b_{n+1} - b_n). \qquad (8)$$

Пусть $i = j(n)$ — наименьшее натуральное число, для которого правая часть формулы (8) больше нуля. Легко проверить, что

$$j(n) = [\log_2(b_{n+1} - b_n)] + n + 1$$

(здесь мы считаем, что n достаточно велико, так, что $\log_2(b_{n+1} - b_n) > 0$).

Поскольку $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \ge 0$, правая часть формулы (8) не может быть отрицательной. Отсюда следует, что при $i < j(n)$ случай $y \notin T_n$ заведомо исключен. Таким образом, $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = 0$ при $i < j(n)$ и $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \le 2^i \varepsilon_n$ при $i \ge j(n)$. Следовательно,

$$\rho_I(\mu, \nu_n) \le \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=j(n)}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{i^2} \le \frac{6\varepsilon_n}{\pi^2([\log_2(b_{n+1} - b_n)] + n)}. \qquad (9)$$

Положим

$$\xi_n = \frac{6\varepsilon_n}{\pi^2([\log_2(b_{n+1} - b_n)] + n)}.$$

Нетрудно доказать, что последовательность ξ_n удовлетворяет условиям предложения 2.3 и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \xi_n} = \frac{1}{p+1}.$$

Из неравенства (9) следует, что

$$N(\mu, \xi_n) \le |T_n|,$$

откуда по аналогии с полученной выше нижней оценкой для $\underline{D}_I(\mu)$ получаем

$$\overline{D}_I(\mu) \le \frac{\dim_B X}{p+1}.$$

Теперь для данного $b \in (0, \dim_B X)$ достаточно взять значение p, для которого $\dim_B X/(p+1) = b$, и мы получим меру μ с размерностью квантования $D_I(\mu) = b$.

Переходим к построению искомой меры μ_{bc} для $c \in [b, a]$. В работе [13] доказано, что в компакте X существует замкнутое подмножество F, для которого $\underline{\dim}_B F = 0$, $\overline{\dim}_B F = c$. Рассмотрим идемпотентную меру λ_F. В силу следствия 2.6

$$\underline{D}_I(\lambda_F) = 0, \quad \overline{D}_I(\lambda_F) = c. \tag{10}$$

Таким образом, при $b = 0$ мера λ_F является искомой мерой μ_{bc}. Если $b = c = a$, то $\mu_{bc} = \lambda_X$.

При $b \in (0, a)$ положим

$$\mu_{bc} = \mu \oplus \lambda_F,$$

где μ — идемпотентная мера размерности $D_I(\mu) = b$, построенная выше. В силу следствия 2.8 и равенств (10) $\overline{D}_I(\mu_{bc}) \le c$. При этом $K(\mu_{bc}) \supset F$. Следовательно, $\overline{D}_I(\mu_{bc}) \ge \overline{\dim}_B F = c$ в силу предложения 2.5. Итак, $\overline{D}_I(\mu_{bc}) = c$.

Согласно предложению 2.7

$$N(\mu_{bc}, 2\varepsilon) \le N(\mu, \varepsilon) + N(\lambda_F, \varepsilon).$$

Поскольку $\underline{D}_I(\lambda_F) = 0$, существует последовательность $\varepsilon_i \to 0$, для которой

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log N(\lambda_F, \varepsilon_i)}{-\log \varepsilon_i} = \underline{D}_I(\lambda_F) = 0.$$

При этом при малых ε_i выполняется неравенство $N(\mu, \varepsilon_i) > N(\lambda_F, \varepsilon_i)$, так как $D_I(\mu) = b > 0$. Следовательно,

$$\underline{D}_I(\mu_{bc}) = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\mu_{bc}, 2\varepsilon)}{-\log \varepsilon} \le \varliminf_{i\to\infty} \frac{\log 2N(\mu, \varepsilon_i)}{-\log \varepsilon_i} = b.$$

Для доказательства обратного неравенства $\underline{D}_I(\mu_{bc}) \ge b$ достаточно дословно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве неравенства $\underline{D}_I(\mu) \ge \dim_B X/(p+1)$ для меры μ, с заменой μ на μ_{bc}. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Graf S., Luschgy H.* Foundations of quantization for probability distributions. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2000.
2. *Иванов А. В.* О размерности квантования вероятностных мер // Мат. сб. 2024. Т. 215, № 8. С. 41–51.
3. *Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б.* Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 5. С. 758–797.
4. *Заричный М. М.* Пространства и отображения идемпотентных мер // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74, № 3. С. 45–64.
5. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 3–62.
6. *Bazylevych L., Repovs D., Zarichnyi M.* Spaces of idempotent measures of compact metric spaces // Topology Appl. 2010. V. 157, N 1. P. 136–144.
7. *Ivanov A. V.* On quantization dimensions of idempotent probability measures // Topology Appl. 2022. V. 306. 107931.
8. *Ivanov A. V.* On metrization of the idempotent measures functor and quantization dimensions // Topology Appl. 2023. V. 329. 108362.
9. *Федорчук В. В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 2. С. 396–417.

10. *Иванов А. В.* О промежуточных значениях размерностей квантования идемпотентных мер // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 139–148.

11. *Akian M.* Densities of idempotent measures and large deviations // Trans. Am. Math. Soc. 1999. V. 351, N 11. P. 4515–4543.

12. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2013.

13. *Иванов А. В.* О промежуточных значениях емкостных размерностей // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 540–545.

Поступила в редакцию 1 декабря 2025 г.
После доработки 1 декабря 2025 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Иванов Александр Владимирович (ORCID 0000-0002-4436-4805)
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН,
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск 185910
alvlivanov@krc.karelia.ru