Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 517.9

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РЕШЕНИЕ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Н. Артюшин

Аннотация. Рассматриваются вариационные неравенства с ограничением на решение для абстрактных гиперболических уравнений. Методом штрафа доказана теорема существования решения. Указаны достаточные условия геометрического характера на множество ограничения, гарантирующие сходимость штрафных решений к решению задачи. При некоторых дополнительных условиях доказывается сильная сходимость приближенных решений. В результате получается решение, для которого выполняется закон сохранения энергии, что соответствует абсолютно упругому удару.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.301

Ключевые слова: вариационные неравенства, абстрактные гиперболические уравнения.

Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием

1. Введение

Пусть X — гильбертово пространство, A — положительный самосопряженный оператор в X, $K \subset X$ — выпуклое замкнутое множество. Целью наших исследований будут вариационные неравенства для абстрактных уравнений вида

$$u''(t) + Au(t) = f(t)$$

с ограничением $u(t) \in K$.

Содержательные задачи такого рода возникают уже для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве простейшего примера можно рассмотреть движение частицы под действием внешней силы. Пусть $K \subset R^n$ — выпуклое замкнутое множество. Частица движется внутри множества K. Ее координаты в момент времени t обозначим через $x(t)$. Рассмотрим задачу

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) + h(t), \quad x(t) \in K, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1,$$

где $f(t, x, x')$ — внешняя сила, $h(t)$ — сила реакции стенки. Эта реакция, очевидно, равна 0, когда точка находится внутри K, и направлена внутрь множества K, когда точка находится на границе ∂K. Избавляясь от неизвестной функции $h(t)$, приходим к следующей задаче. Требуется найти такую функцию $x(t)$, что

$$(x''(t) - f(t, x(t), x'(t)), x(t) - \varphi(t)) \le 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

Здесь $\varphi(t)$ — произвольная гладкая функция такая, что $\varphi(t) \in K$ для $t \in [0,T]$. Очевидно, что этих соотношений еще недостаточно для описания движения частицы. Помимо этого требуется определить характер взаимодействия частицы со стенкой. Если удар о стенку абсолютно упругий, то абсолютная величина скорости частицы после удара не меняется. Если удар абсолютно неупругий, то проекция скорости частицы на нормаль к границе после удара равна 0. После того, как к указанной системе добавлены некие соотношения, регулирующие взаимодействие частицы со стенкой, можно ожидать, что задача поставлена, а значит, должна иметь место единственность решения. Разрешимость такой задачи можно доказать при достаточно общих условиях. Но единственности решения, вообще говоря, нет. При этом упругость или неупругость удара не имеет значения [1–3].

Следующая задача, вызывающая большой интерес, это вариационные неравенства для волнового уравнения в области $\Omega \in R^n$

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)$$

с ограничением $u(x,t) \in K$ для п.в. $t \in (0,T)$. Аналогично предыдущему решение определяется как функция $u(t)$, удовлетворяющая неравенству (в смысле распределений)

$$(Lu - f, u - \varphi) \leq 0$$

для всех гладких $\varphi(x,t)$ таких, что $\varphi(x,t) \in K$ для всех $t \in [0,T]$. Особый интерес представляют случаи $n = 1, 2$ и ограничение $u(x,t) \leq m(x)$, $x \in \Omega$. Соответствующее вариационное неравенство описывает колебания струны или мембраны при наличии твердой стенки, ограничивающей движение сверху. В одномерном случае методом характеристик получен ряд результатов, касающихся однозначной разрешимости [4, 5]. Для многомерного волнового уравнения отметим работу [6] с ограничением решения на границе области. Этот случай интересен тем, что задачу удалось свести к вариационному неравенству с монотонным оператором. В работе [7] рассмотрена задача с ограничением для уравнения с дробной степенью оператора Лапласа. В ней реализован любопытный подход, связанный с минимизацией выпуклого функционала.

В ряде работ изучались задачи с ограничением для уравнений вида

$$u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) = f(x,t),$$

$$u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + \Delta^2 u_t(x,t) = f(x,t).$$

Отметим лишь [8–10].

Задачи в абстрактной постановке систематически, по-видимому, не изучались. Отметим лишь работу [9]. В этой работе $A : V \to V'$ — эллиптический самосопряженный оператор, вложение $V \subset X$ плотное и компактное. Одно из основных условий требует, чтобы множество K имело непустую внутренность в интерполяционном пространстве V_θ, $0 < \theta < 1$. Как увидим далее, одного этого достаточно для разрешимости задачи. Мы еще вернемся к этому моменту ниже.

В работе автора [11] для одномерного волнового уравнения использовался метод штрафа. Предельный переход удалось обосновать с помощью некого специфического приема. Однако действующие пружины доказательства остались непонятыми. В настоящей работе удалось разобраться с механизмом предельного перехода и обобщить его на абстрактный случай. Оказывается, что решающую роль играет геометрия множества K. Например, достаточно потребовать компактность поляры множества K или (что эквивалентно) секвенциальную слабую замкнутость границы ∂K. Ниже будет дан ряд эквивалентных формулировок. При этих условиях удается получить содержательную оценку на штрафное слагаемое. Эта оценка позволяет доказать, что некоторая последовательность решений уравнений со штрафом сходится к искомому решению. При определенных дополнительных условиях на K доказывается сильная сходимость этой последовательности, а значит, предельная функция удовлетворяет закону сохранения энергии (критерий абсолютно упругого удара).

2. Основная идея

Опишем основную идею решения задачи. Пусть у нас есть линейный оператор L и мы решаем задачу

$$Lu = f$$

с ограничением $u \in K$. Далее считаем, что $0 \in K$. Воспользуемся методом штрафа и для всякого $\varepsilon > 0$ решим уравнение

$$Lu_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f$$

с монотонным оператором штрафа β, связанным с множеством K. Предположим, что для приближенных решений имеется оценка

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \le C, \tag{2.1}$$

где H — некоторое гильбертово пространство. Из этой оценки вытекает, что для некоторой подпоследовательности $\varepsilon_n \to 0$ (далее индекс n опускаем) имеет место слабая сходимость

$$u_\varepsilon \underset{H}{\rightharpoonup} u$$

и $u \in K$. Пусть $v \in K$ — пробная функция, тогда

$$(Lu_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \le (f, u_\varepsilon - v).$$

Теперь хотелось бы перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. В неравенстве фигурирует квадратичная нелинейность, а значит, для стандартного предельного перехода слабой сходимости u_ε недостаточно. Мы, однако, поступим иначе. А именно, умножим штрафное уравнение на $u - v$ и получим неравенство

$$(Lu_\varepsilon, u - v) \le (f, u - v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u).$$

Левая часть неравенства линейна, и к ней уже можно применять слабую сходимость. Но теперь надо доказать, что

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) \to 0.$$

И вот здесь нам поможет второе слагаемое в оценке (2.1). Обычно из этой оценки извлекают лишь включение $u \in K$. Мы же получим больше. В силу монотонности оператора β для всех $\varphi \in K$

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - \varphi) \ge 0.$$

Отсюда и из оценки (2.1) следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon),\varphi) \le \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon),u_\varepsilon) \le C.$$

Предположим, что найдется некое банахово пространство B такое, что вложение $H \subset B$ плотно и компактно. Пусть $K = K_B \cap H$, где множество $K_B \subset B$ имеет непустую внутренность и $0 \in \operatorname{int} K_B$. Тогда из последней оценки легко получаем

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\beta(u_\varepsilon)\|_{B^*} \le C. \tag{2.2}$$

В силу компактности вложения $H \subset B$ имеем $u_\varepsilon \to u$ сильно в B, а значит,

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon),u_\varepsilon - u) \to 0.$$

Такой подход можно использовать и для анализа гладкости решений вариационных неравенств. В силу оценки (2.2) имеем включение

$$Lu_\varepsilon = f - \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) \in X + B^*.$$

Из этого включения можно получить более точные оценки для решения.

В работе [11] был реализован иной способ доказательства, который иногда бывает удобнее. А именно, пусть $\gamma > 0$. В силу компактности вложения $H \subset B$ для достаточно малых ε справедливо включение $\pm\gamma(u_\varepsilon - u) \in K_B$. Отсюда следует, что $\varphi = \pm\gamma(u_\varepsilon - u) \in K$. С помощью этой пробной функции легко получается неравенство

$$0 \le \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon),u_\varepsilon - u) \le \frac{C}{\gamma}.$$

Далее устремляем $\gamma \to \infty$.

Таким образом, предельный переход будет обоснован, если найдутся подходящие пространство B и множество K_B. Следует отметить, что для эволюционных уравнений возникают определенные осложнения, поскольку в чистом виде эта схема для них неприменима. Но компактность вложения $H \subset B$ удачным образом помогает справиться со всеми проблемами.

Само по себе условие на множество K, использующее какое-то вспомогательное пространство B, выглядит не очень удобным. Поэтому хотелось бы иметь эквивалентную формулировку, выраженную во внутренних терминах самого множества K. И такую формулировку можно предъявить. Докажем одну лемму, имеющую помимо дальнейшего применения и определенный самостоятельный интерес. Сначала дадим некоторые определения. Пусть H — гильбертово пространство, $K \subset H$ — замкнутое выпуклое множество.

Определение 2.1. Будем говорить, что K *удовлетворяет C-условию*, если множество K обладает непустой внутренностью, а его граница ∂K секвенциально слабо замкнута. Иными словами, если последовательность элементов $\{x_n\}_{n\in N} \subset \partial K$ слабо сходится к некоторому элементу x, то $x \in \partial K$.

Определение 2.2. Будем говорить, что K *удовлетворяет C_0-условию*, если K удовлетворяет C-условию и $0 \in \operatorname{int} K$.

Определение 2.3. Множество $\Phi_K = \{\varphi \in H^* \mid \varphi(x) \le 1 \ \forall x \in K\}$ называется *полярой множества* K.

Хорошо известно, что поляра Φ_K — замкнутое выпуклое множество, которое однозначно определяет K, если $0 \in \operatorname{int} K$.

Лемма 2.1. *Пусть K — замкнутое выпуклое множество в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *K удовлетворяет C_0-условию.*

2. *Для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$, слабо сходящейся к 0, найдется номер n_0 такой, что $x_n \in K$ $\forall n > n_0$.*

3. *Поляра Φ_K компактна в H^*.*

4. *Существуют банахово пространство B и замкнутое выпуклое множество $K_B \subset B$ с непустой внутренностью, $0 \in \operatorname{int} K_B$, такие, что вложение $H \subset B$ плотное и компактное и, кроме того, $K = K_B \cap H$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть дана последовательность $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. Будем рассуждать от противного. Переходя, если надо, к подпоследовательности, можно считать, что $x_n \notin K$ $\forall n \in N$. Поскольку $0 \in \operatorname{int} K$, для всякого n найдется $0 < \gamma_n < 1$ такое, что $y_n = \gamma_n x_n \in \partial K$. Ясно, что $y_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. В силу условия 1 отсюда получаем $0 \in \partial K$; противоречие.

$2 \Rightarrow 3$. Прежде всего покажем, что поляра Φ_K ограничена. От противного, предположим, что найдется неограниченная последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$. По теореме Рисса для каждого n существует $x_n \in H$ такой, что $\|x_n\| = 1$ и $\varphi_n(x_n) = \|\varphi_n\|$. Положим $y_n = 2x_n/\|\varphi_n\|$. Легко видеть, что $y_n \to 0$. По условию 2 найдется n_0 такое, что $y_n \in K$ $\forall n > n_0$. Но тогда в силу определения Φ_K для этих n имеем $2 = \varphi_n(y_n) \le 1$; противоречие.

Итак, Φ_K ограничено. Теперь покажем, что из всякой последовательности $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. В силу ограниченности множества Φ_K достаточно показать, что всякая слабо сходящаяся последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$ на самом деле сходится сильно. Рассуждение вполне аналогично предыдущему. Пусть $\varphi_n \underset{H^*}{\rightharpoonup} \varphi$. Отметим, что $\varphi \in \Phi_K$, так как Φ_K — выпуклое и замкнутое множество. Обозначим $\psi_n = \varphi_n - \varphi$. Как и раньше, выбираем элементы x_n так, чтобы $\|x_n\| = 1$ и $\psi_n(x_n) = \|\psi_n\|$. Без потери общности можно считать, что $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} x$ для некоторого элемента x. Наконец, полагая $y_n = x_n - x$, получим $y_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|\psi_n\| \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} \psi_n(y_n)$. Пусть $\gamma > 0$ произвольно. Применяя условие 2 к последовательности $\{\gamma y_n\}_{n\in N}$, получим

$$\gamma \varlimsup_{n\to\infty} \psi_n(y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} (\varphi_n - \varphi)(\gamma y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} \varphi_n(\gamma y_n) \le 1.$$

Следовательно, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|\psi_n\| = 0$.

$3 \Rightarrow 1$. Из условия 3 следует, что множество Φ_K ограничено. Пусть $M > 0$ и $\|\varphi\| \le M$ $\forall \varphi \in \Phi_K$. Тогда если $x \in H$ и $\|x\| \le 1/M$, то $\varphi(x) \le 1$ $\forall \varphi \in \Phi_K$, а значит, $x \in K$. Следовательно, внутренность K непуста и $0 \in \operatorname{int} K$.

Пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset \partial K$ и $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} x$. Так как все элементы x_n принадлежат границе ∂K, то найдется последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$ такая, что $\varphi_n(x_n) > 1 - 1/n$. В силу условия 3 из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для простоты оставим за ней прежнее обозначение φ_n. Тогда $\varphi_n \to \varphi$ сильно в H^*. А значит, $\varphi \in \Phi_K$ и

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_n) \ge 1.$$

Следовательно, $x \in \partial K$.

$4 \Rightarrow 2$. Пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$ такая, что $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. В силу компактности вложения $H \subset B$ имеем $x_n \to 0$ сильно в B и $\|x_n\|_B \to 0$. По условию (4) имеет место включение $0 \in \operatorname{int} K_B$. Значит, найдется номер n_0 такой, что $x_n \in K_B$ $\forall n > n_0$. Осталось заметить, что тогда $x_n \in K_B \cap H = K$.

$1, 2 \Rightarrow 4$. Обозначим $K_0 = K \cap (-K)$. В силу C_0-условия множество K_0 выпуклое, замкнутое, уравновешенное и имеет непустую внутренность. Значит, оно порождает некую полунорму $p(\cdot)$ в H. Пусть H_1 — произвольное банахово пространство, для которого вложение $H \subset H_1$ плотно и компактно. Норму в пространстве H_1 будем обозначать через $\|\cdot\|_1$. Наконец, обозначим через B банахово пространство, полученное замыканием H относительно нормы $\|x\|_B = p(x) + \|x\|_1$. В качестве K_B выберем замыкание множества K в норме B. Покажем, что построенные пространство B и множество K_B удовлетворяют требованиям условия 4.

Прежде всего, по построению вложение $H \subset B$ плотное. Докажем, что оно и компактное. Действительно, пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$ такая, что $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. В силу выбора пространства H_1 считаем, что $\|x_n\|_1 \to 0$. Пусть $\gamma > 0$. Используя условие 2, аналогично предыдущему легко показать, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, p(x_n) \le 1/\gamma$. Поскольку γ произвольно, отсюда вытекает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, p(x_n) = 0$. Значит, $x_n \to 0$ сильно в B.

Покажем, что множество K_B содержит единичный шар в B. Пусть $y \in B$ и $\|y\|_B \le 1$. По определению это означает, что найдется последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$ такая, что $x_n \to y$ сильно в B и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \|x_n\|_B \le 1$. В частности, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, p(x_n) \le 1$.

Предположим, что найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ такая, что на ней $p(x_{n_k}) \le 1$. Тогда $x_{n_k} \in K$ $\forall k > 0$, а значит, $y \in K_B$, коль скоро K_B — это замыкание K в B.

Предположим, что такой подпоследовательности не найдется. В этом случае можно считать, что $p(x_n) > 1$ $\forall n > 0$ и $p(x_n) \to 1$. Тогда можно положить $\overline{x}_n = x_n/p(x_n)$. Легко видеть, что $\overline{x}_n \in K$ и $\|\overline{x}_n - x_n\|_B \to 0$. Значит, $\overline{x}_n \to y$ и $y \in K_B$.

Осталось показать, что $K = K_B \cap H$. Пусть $x \in K_B \cap H$. Это значит, что найдется последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset K$ такая, что $\|x - x_n\|_B \to 0$ и, следовательно, $p(x - x_n) \to 0$. Рассмотрим произвольный функционал $\varphi \in \Phi_K$. Так как $p(x - x_n) \to 0$, то для любого $\gamma > 0$ найдется n_γ такое, что $\gamma(x - x_n) \in K_0 \subset K$ $\forall n > n_\gamma$. Отсюда получаем, что $\varphi(x - x_n) \le 1/\gamma$ $\forall n > n_\gamma$ и $\varphi(x) \le 1 + 1/\gamma$. Но γ произвольно, значит, $\varphi(x) \le 1$. В силу произвольности φ получаем $x \in K$. Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.1. Следует отметить, что данная лемма дает конструктивное описание искомого пространства B, что позволяет легко применять ее на практике. Пусть, например, $\Omega \subset R^n$, мы рассматриваем тот или иной класс заданных на Ω функций, и ограничение имеет вид $K = \{u(x) \mid u(x) \le 1,\, x \in \Omega\}$. В этом случае из построения леммы сразу же получаем, что $B = C(\Omega)$. Для наших рассуждений требуется компактность вложения $H \subset B$. Это значит, что при $n = 1$ в лемме 2.1 выполняется условие 4, если $H = W_2^1(\Omega)$. А при $n = 2, 3$ приходится повышать гладкость. В этом случае в качестве H подходит пространство $W_2^2(\Omega)$.

Замечание 2.2. В работе [9] предполагалось, что K имеет непустую внутренность в пространстве V_θ. Заметим, что при этом вложение $V \subset V_\theta$ компактно. Следовательно, в лемме 2.1 можно положить $B = V_\theta$.

3. Абстрактный результат

Пусть X, H — сепарабельные гильбертовы пространства, вложение $H \subset X$ плотно и непрерывно (компактность вложения не предполагается). Скалярное произведение в пространстве X обозначаем круглыми скобками. Отождествляя X и X^*, получим

$$H \subset X \subset H^*.$$

Пусть задан линейный оператор $A \in \mathscr{L}(H, H^*)$ такой, что $A = A_0 + A_1$, где $A_0 \in \mathscr{L}(H, H^*), A_1 \in \mathscr{L}(H, X)$, причем $A_0 = A_0^*$ и для некоторой константы $a_0 > 0$

$$(A_0 u, u) \geq a_0 \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Пусть $K \subset H$ — замкнутое выпуклое множество и $T > 0$. На интервале $(0, T)$ рассмотрим следующую задачу:

$$u''(t) + Au(t) = f(t), \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u(t) \in K \quad \text{для п.в. } t \in (0, T). \tag{3.2}$$

Для определения решения этой задачи рассмотрим пространство

$$W = \{u(t) \mid u \in L_2(0, T; H),\ u' \in L_2(0, T, X)\}$$

и множество

$$W_K = \{u(t) \in W \mid u(t) \in K \text{ для п.в. } t \in (0, T)\}.$$

Для произвольных $u(t), v(t) \in W$ и $\Phi(t) \in C^1[0, T]$ положим

$$L(u, v, \Phi) = -\int\limits_0^T ((u'(t), v'(t))\Phi(t) + (u'(t), v(t))\Phi'(t))\, dt + \int\limits_0^T (Au(t), v(t))\Phi(t)\, dt.$$

Пусть $u_0 \in K,\ u_1 \in X,\ f(t) \in L_2(0, T; X)$. *Решением задачи* (3.1), (3.2) назовем функцию $u(t) \in W_K$ такую, что $u(0) = u_0$ и для любых $\varphi(t) \in W_K$ и $\Phi(t) \in C^1[0, T]$, $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(T) = 0$, справедливо неравенство

$$L(u, u - \varphi, \Phi) \leq \int\limits_0^T (f(t), u(t) - \varphi(t))\Phi(t) dt + (u_1, u(0) - \varphi(0))\Phi(0). \tag{3.3}$$

Данное неравенство получено формальным умножением уравнения (3.1) на $(u(t) - \varphi(t))\Phi(t)$ и интегрированием по частям. Как увидим позже, решение задачи будет более гладким. В связи с этим введем пространство

$$W^\infty = \{u(t) \mid u \in L_\infty(0, T; H),\ u' \in L_\infty(0, T, X)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W^\infty} = \|u\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|u'\|_{L_\infty(0,T,X)}.$$

Решение вариационного неравенства будем получать методом штрафа. Для обоснования предельного перехода нам понадобится следующая

Лемма 3.1. *Пусть множество K удовлетворяет C-условию. Пусть даны последовательности $\{u_{1n}\}_{n\in N} \subset X$, $\{f_n(t)\}_{n\in N} \subset L_2(0,T;X)$, $\{u_n(t)\}_{n\in N} \subset W^\infty$, удовлетворяющие неравенству (3.3) для всякого n. Предположим, что для некоторых $u_1, f(t), u(t)$ при $n\to\infty$ имеют место сходимости*

$$\begin{gathered} u_{1n} \to u_1 \quad \text{сильно в } X, \\ f_n(t) \to f(t) \quad \text{сильно в } L_2(0,T;X), \\ u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H), \\ u_n'(t) \rightharpoonup u'(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;X). \end{gathered}$$

Тогда $u_1, f(t), u(t)$ тоже удовлетворяют неравенству (3.3).

Доказательство. Совершим предельный переход при $n\to\infty$ в неравенстве (3.3). Правая часть в этом неравенстве линейная по u. Кроме этого

$$L(u_n, u_n-\varphi, \Phi) = L(u_n, u-\varphi,\Phi) + L(u_n, u_n-u,\Phi).$$

Первое слагаемое в правой части данного равенства линейно по u_n, поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} L(u_n, u_n-u,\Phi) = 0.$$

Пусть $w_0 \in \operatorname{int} K$. Положим $K_0 = K - w_0$. Тогда это множество удовлетворяет C_0-условию. Применим к нему лемму 2.1 и обозначим через B и K_B соответствующее банахово пространство и его подмножество. По условию теоремы $u_n(t)$ и $u_n'(t)$ равномерно ограничены в пространствах $L_\infty(0,T;H)$ и $L_\infty(0,T;X)$ соответственно. В силу компактности вложения $H\subset B$ семейство функций $u_n(t)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $C([0,T];B)$. А значит, по теореме Асколи — Арцела имеет место сильная сходимость $u_n(t)\to u(t)$ в $C([0,T];B)$. Для доказательства равностепенной непрерывности заметим, что для всякого $\varepsilon>0$ справедливо неравенство (см., например, [12, лемма 5.1])

$$\|u_n\|_B \le \varepsilon\|u_n\|_H + C(\varepsilon)\|u_n\|_X.$$

Следовательно,

$$\|u_n(t+\delta)-u_n(t)\|_B \le 2\varepsilon\|u_n\|_{L_\infty(0,T;H)} + C(\varepsilon)|\delta|\|u_n'\|_{L_\infty(0,T;X)}.$$

Напомним, что $0\in\operatorname{int} K_B$. Значит, для любого $\gamma>0$ найдется номер n_γ такой, что $\pm\gamma(u_n(t)-u(t))\in K_B$ $\forall t\in[0,T]$, если $n>n_\gamma$. Обозначим

$$\varphi_{\pm\gamma}(t) = w_0 \pm \gamma(u_n(t)-u(t)).$$

Тогда для почти всех $t\in(0,T)$ имеет место включение $\varphi_{\pm\gamma}(t)\in w_0+(K_B\cap H) = K$. Подставляя эту функцию в неравенство (3.3), после несложных преобразований получим

$$\mp\gamma L(u_n,u_n-u,\Phi) \pm \gamma\int_0^T (f_n(t), u_n(t)-u(t))\Phi(t)dt \pm \gamma(u_{1n}, u_n(0)-u(0))\Phi(0) \le C,$$

а значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |(L(u_n,u_n-u,\Phi)| \le C/\gamma.$$

Отсюда в силу произвольности γ заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} L(u_n,u_n-u,\Phi) = 0.$$

Лемма доказана. □

Следствие 3.1. *Пусть множество K удовлетворяет C-условию. Пусть для некоторых $u_0 \in K$, $u_1 \in X$, $f \in L_2(0,T;X)$ имеется последовательность $\{u_n(t)\}_{n \in N} \subset W^{\infty}$ решений задачи* (3.1), (3.2). *Предположим, что для некоторой $u \in W^{\infty}$*

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad *\text{-слабо в } L_{\infty}(0,T;H),$$

$$u_n'(t) \rightharpoonup u'(t) \quad *\text{-слабо в } L_{\infty}(0,T;X).$$

Тогда $u(t)$ тоже решение задачи (3.1), (3.2).

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3.1, имеем сильную сходимость $u_n(t) \to u(t)$ в $C([0,T];B)$. По условию $u_n \in W_K$ для всех n. Следовательно, $u \in K_B$ для всех $t \in [0,T]$, а значит, $u \in K_B \cap H = K$ для п.в. $t \in [0,T]$. Таким образом, $u \in W_K$. Остается применить лемму 3.1. $\square$

Замечание 3.1. Для последовательностей $\{u_{1n}\}_{n \in N}$ и $\{f_n(t)\}_{n \in N}$ мы потребовали сильную сходимость. Однако это условие зачастую можно ослабить. Все, что нам надо, это сходимость к нулю $(u_{1n}, u_n(0) - u(0))$ и $(f_n(t), u_n(t) - u(t))$. Пусть, например, вложение $H \subset X$ компактно. Тогда $u_n(t) \to u(t)$ сильно в $C([0,T],X)$, а значит, вместо сильной сходимости последовательностей можно ограничиться слабой.

Может показаться, что условие леммы слишком ограничительное. Однако вот пример, в котором слабый предел решений задачи решением не является. Пусть $X = H = \ell_2$. Естественный базис в этом пространстве обозначим через $\{e_n\}_{n \in N}$. Будем выделять первую компоненту элементов из X и записывать $x = (x_1, x_2, \dots)$ в виде $x = (x_1, y)$, где $y = (x_2, x_3, \dots)$. Множество K — объединение двух конусов с общим основанием: $K = K_1 \cup K_2$

$$K_1 = \left\{ x \in X \mid x_1 \geq 0, x_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}|y| \leq 1 \right\},$$

$$K_2 = \{x \in X \mid x_1 \leq 0, -x_1 + 2\sqrt{3}|y| \leq 3\}.$$

Будем рассматривать простейшее уравнение

$$u''(t) = 0.$$

По аналогии с конечномерным случаем будем говорить о движении частицы в множестве K. В начальный момент $u'(0) = (1, 0, 0, \dots)$. Предполагается, что все удары частицы абсолютно упругие. Углы конусов подобраны так, что частица сначала движется до столкновения с границей конуса ∂K_1, отразившись от стенки движется до границы ∂K_2, на которую она падает под прямым углом. Значит, после отражения частица движется обратно по той же самой траектории. Главной особенностью данного примера является следующий факт. Изначально вся энергия сосредоточена в первой компоненте («гармонике»). После первого удара некоторая (вполне определенная) часть энергии переносится в другие компоненты, а в какие именно зависит от начального значения $u(0)$. Выбирая $u(0)$ подходящим образом, можно добиться передачи энергии во все более дальние компоненты. В соответствии с этим для всякого $n > 1$ рассмотрим движение частицы с начальными данными $u_{0n} = \frac{1}{n} e_n$. Рассмотрим слабый предел решений задачи с этими начальными данными. Легко видеть, что предельная функция $u(t)$ имеет следующий вид:

$$u(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{при } t \le 1, \\ (1 - \frac{t-1}{2}, 0) & \text{при } 1 \le t \le 3, \\ \left(\frac{t-3}{2}, 0\right) & \text{при } 3 \le t. \end{cases}$$

Сначала частица движется с единичной скоростью до тех пор, пока не попадет в вершину конуса K_1. После этого происходит отражение и частица движется обратно со скоростью $1/2$. Предельная функция все еще является решением задачи, хотя часть энергии уже потеряна (удар оказался неупругим). Но когда частица приходит в точку $x = 0$, скорость вновь меняет знак, как если бы произошло отражение. В этот момент данная функция перестает быть решением задачи.

Данный пример может показаться искусственным, но он важен тем, что наглядно показывает роль геометрии границы множества K. Углы способны непредсказуемым образом перемещать энергию из одних «гармоник» в другие. Это лишний раз показывает, что трудности в обосновании предельного перехода носят объективный характер и связаны с существом дела. В частности, нет каких-то особых оснований ожидать, что решения уравнений со штрафом будут сходиться к решению исходной задачи. В этом контексте стоит отметить, что C-условие запрещает появление конических углов на границе K.

Нам понадобится еще одна техническая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть $\psi \in H^*$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon)$ такая, что*

$$|\psi(u)| \le \varepsilon \|u\|_H + C(\varepsilon)\|u\|_X \quad \forall u \in H.$$

Доказательство стандартное от противного. Пусть утверждение неверно для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда для всякого $n > 0$ найдется такой элемент $u_n \in H$, что $\|u_n\|_H = 1$ и

$$|\psi(u_n)| > \varepsilon + n\|u_n\|_X.$$

Переходя, если надо, к подпоследовательности, отсюда заключаем, что для некоторого $v \in H$ имеет место слабая сходимость $u_n \underset{H}{\rightharpoonup} v$. Следовательно, $\psi(u_n) \to \psi(v)$. С другой стороны, $u_n \to 0$ сильно в X. Значит, $v = 0$ и получаем противоречие: $\varepsilon < |\psi(u_n)| \to 0$. $\square$

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать разрешимость задачи (3.1), (3.2).

Теорема 3.1. *Пусть множество K удовлетворяет C-условию. Пусть $u_0 \in K$, $u_1 \in X$, $f \in L_2(0, T; X)$. Тогда существует решение $u(t)$ задачи* (3.1), (3.2) *такое, что $u \in W^\infty$.*

Доказательство. Воспользуемся методом штрафа. Для этого надо построить соответствующий оператор штрафа. Пусть $w_0 \in \operatorname{int} K$. Положим $K_0 = K - w_0$. Это множество удовлетворяет C_0-условию. Далее исключительно ради простоты считаем, что $w_0 = 0$ и $K_0 = K$. В общем случае следует использовать сдвиг вида $u(t) - w_0$.

В силу леммы 2.1 множество Φ_{K_0} компактно. Значит, по теореме Крейна — Мильмана оно является замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Обозначим его через E_K. Пусть $\{\psi_k\}_{k\in N} \subset E_K$ — счетное плотное подмножество в E_K. Как обычно, определяем положительную срезку

$$\xi^+ = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \geq 0. \end{cases}$$

Для всякой $u(t) \in W$ и $k \geq 1$ обозначим

$$b^+_{k,u}(t) = (\psi_k(u(t)) - 1)^+,$$

и для всякого $n \geq 1$ определим $\beta_{n,u}(t) \in H^*$ по формуле

$$\beta_{n,u}(t) = n \sum_{k=1}^{n} b^+_{k,u}(t)\psi_k.$$

С геометрической точки зрения мы заменили множество K_0 пересечением конечного количества полупространств, порожденных некоторыми опорными функционалами. Элемент $\beta_{n,u}$ состоит из суммы слагаемых, каждое из которых штрафует выход из соответствующего полупространства.

Отметим, что для любой $\varphi(t) \in W_K$ справедливо неравенство

$$\beta_{n,u}(t)(u(t) - \varphi(t)) \geq 0 \quad \text{для п.в. } t \in (0,T). \tag{3.4}$$

Действительно, рассмотрим какое-нибудь $k \geq 1$. По определению Φ_{K_0} для почти всех $t \in (0,T)$ имеем неравенство $\psi_k(\varphi(t)) \leq 1$. Но тогда там, где $b^+_{k,u}(t) > 0$, выполняется неравенство $\psi_k(u(t) - \varphi(t)) \geq 0$. А значит, $b^+_{k,u}(t)\psi_k(u(t) - \varphi(t)) \geq 0$ для п.в. $t \in (0,T)$.

На интервале $(0,T)$ рассмотрим следующую штрафную задачу:

$$u''(t) + Au(t) + \beta_{n,u}(t) = f(t), \tag{3.5}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{3.6}$$

Разрешимость этой задачи легко устанавливается методом Галёркина. Все действия абсолютно стандартны, поэтому ниже мы даем лишь схему доказательства, опуская второстепенные детали. Пусть $\{e_j\}_{j\in N}$ — ортонормированный базис в H. При этом если $u_0 \neq 0$, то

$$e_1 = u_0/\|u_0\|_H.$$

В противном случае выбор базиса произвольный. Как обычно, для $M > 0$ будем искать приближенное решение u_M в виде

$$u_M = \sum_{j=1}^{M} a_{M,j}(t)e_j.$$

Начальные данные $a_{M,j}(0), a'_{M,j}(0)$ задаем следующим образом. Обозначим $H_M = \mathrm{span}\{e_j\}_{j\leq M}$. Тогда для задания начальных данных $a_{M,j}(0)$, $a'_{M,j}(0)$ следует указать два элемента $u_{0M}, u_{1M} \in H_M$. В силу специального выбора базиса можно положить $u_{0M} = u_0$. При этом, очевидно, $u_{0M} \in H_M \cap K$. Пусть P_M — ортогональный проектор в пространстве X на подпространство H_M. Положим $u_{1M} = P_M u_1$. Так как вложение $H \subset X$ плотно, а конечные линейные комбинации всех базисных элементов плотны в H, то $u_{1M} \to u_1$ в X при $M \to \infty$.

Далее для простоты записи индекс M опускаем. Для получения первой оценки умножаем уравнение (3.5) на $u'(t)$ и интегрируем по t. Заметим, что поскольку $u_0 \in K$, то $b^+_{k,u}(0) = 0$, $k \le n$. В результате для всех $t \in (0,T)$ получим

$$\|u'(t)\|^2_X + (A_0 u(t), u(t)) + n\sum_{k=1}^{n}(b^+_{k,u}(t))^2 \le C + C\int_0^t \left(\|u'(s)\|^2_X + \|u(s)\|^2_H + \|u(s)\|^2_X\right) ds.$$

Воспользовавшись леммой Гроноулла и условием на оператор A_0, отсюда получаем оценку

$$\|u'(t)\|^2_X + \|u(t)\|^2_H + n\sum_{k=1}^{n}(b^+_{k,u}(t))^2 \le C_0 \quad \forall t \in (0,T). \tag{3.7}$$

Вторую оценку (она нам понадобится позже) получаем умножением уравнения (3.5) на $u(t)$:

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_0^T b^+_{k,u}(t)\,dt \le C_1. \tag{3.8}$$

Важно отметить, что константы C_0, C_1 в этих оценках зависят только от f, u_0, u_1 и не зависят от M, n.

Из этих оценок вытекает существование решения $u_M(t)$ на всем интервале $(0,T)$. Далее переходим к пределу при $M \to \infty$. В результате получим $\overline{u}(t) \in W^\infty$. При этом можно считать, что

$$u_M(t) \rightharpoonup \overline{u}(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H),$$
$$u'_M(t) \rightharpoonup \overline{u}'(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;X).$$

Легко видеть, что это и есть решение задачи (3.5), (3.6). Некоторые вопросы может вызвать лишь обоснование предельного перехода

$$(\psi_k(u_M(t)) - 1)^+ \to (\psi_k(\overline{u}(t)) - 1)^+ \text{ для п.в. } t \in (0,T).$$

Пусть $1 \le k \le n$. Покажем, что $p_M(t) = \psi_k(u_M(t))$ сходятся к $p(t) = \psi_k(\overline{u}(t))$ сильно в $C[0,T]$ при $M \to \infty$. Для этого применим теорему Асколи — Арцела. Равномерная ограниченность всех $p_M(t)$ следует из равномерной ограниченности $\|u_M\|_H$ (оценка (3.7)). Покажем, что семейство этих функций равностепенно непрерывно. Рассуждение совершенно аналогично тому, что было при доказательстве леммы 3.1. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t_2 > t_1$. Применяя лемму 3.2 к функционалу ψ_k, получаем

$$|p_M(t_2) - p_M(t_1)| \le 2C_0\varepsilon + C(\varepsilon)\int_{t_1}^{t_2} \|u'(t)\|_X dt \le C(\varepsilon + C(\varepsilon)|t_2 - t_1|).$$

Правую часть в этом неравенстве можно сделать сколь угодно малой, если сначала выбрать малое ε, а затем потребовать нужную малость $|t_2 - t_1|$.

Итак, решение задачи со штрафом получено. Обозначим его через $v_n(t)$. Теперь перейдем к пределу по n. Заметим, что в силу (3.4) для любых $\varphi(t) \in W_K$ и $\Phi(t) \in C^1[0,T]$, $\Phi(T) = 0$, для функции $v_n(t)$ справедливо неравенство (3.3). Семейство функций $\{v_n(t)\}_{n\in N}$ равномерно ограничено в W^∞. Значит, найдутся элемент $u(t) \in W^\infty$ и подпоследовательность $\{v_{n_k}(t)\}_{k\in N}$ такие, что

$$v_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H),$$

$$v'_{n_k}(t) \rightharpoonup u'(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;X).$$

По лемме 3.1 функция $u(t)$ тоже удовлетворяет неравенству (3.3). При этом $v_n(0) = u_0$, а значит, и $u(0) = u_0$. Осталось показать, что $u(t) \in W_K$. Фиксируем k и рассмотрим функционал ψ_k. Из оценки (3.7) следует, что для любого $t \in (0,T)$

$$\psi_k(v_n(t)) \leq 1 + \sqrt{C_0/n}.$$

Как и раньше, с помощью леммы 3.2 показываем, что $\psi_k(v_n(t)) \to \psi_k(u(t))$ сильно в $C[0,T]$. Следовательно, $\psi_k(u(t)) \leq 1\ \forall t \in (0,T)$. Отсюда сначала заключаем, что соответствующее неравенство верно для всех $\psi \in E_K$, а затем и для всех $\psi \in \Phi_{K_0}$. Теорема доказана. $\square$

4. Абсолютно упругий удар

Пусть $u(t)$ — решение задачи (3.1), (3.2). Положим

$$E(t) = \|u'(t)\|_X^2 + 2(A_0u(t), u(t)).$$

Будем говорить, что для $u(t)$ выполняется *закон сохранения энергии*, если для любой функции $\Phi(t) \in C^1[0,T]$, $\Phi(T) = 0$, справедливо равенство

$$E(0)\Phi(0) + \int_0^T E(s)\Phi'(s)\,ds = 2\int_0^T (A_1u(s) - f, u'(s))\Phi(s)\,ds.$$

Неформально будем говорить, что в этом случае удары абсолютно упругие.

Теорема 3.1 дает существование какого-то решения, но не дает никакой информации о том, сохраняется для него энергия или нет. Отметим, что это свойство эквивалентно сильной сходимости последовательности решений уравнений со штрафом. Судя по всему, в некоторых случаях такой сходимости нет и энергия не сохраняется. Однако при некоторых дополнительных условиях на множество K требуемую сходимость получить все-таки удается.

Теорема 4.1. *Пусть множество $K_X \subset X$ удовлетворяет C-условию в пространстве X, $K = K_X \cap H$. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и $\{v_n\}_{n\in N}$ — последовательность решений уравнений со штрафом, которая сходится к решению $u(t)$ задачи (3.1), (3.2). Тогда*

$$v_n(t) \to u(t) \quad \textit{сильно в } L_\infty(0,T;H), \tag{4.1}$$

$$v'_n(t) \to u'(t) \quad \textit{сильно в } L_2(0,T;X) \tag{4.2}$$

и для $u(t)$ выполняется закон сохранения энергии.

Доказательство. Пусть $\overline{w} \in \operatorname{int} K_X \cap H$. Пусть $K_0 = K_X - \overline{w}$, $\Phi_{K_0} \subset X$ — поляра множества K_0 (напомним, что мы отождествляем X и X^*). Как и ранее, для простоты считаем, что $\overline{w} = 0$.

Прежде всего, сделаем одно замечание относительно функционалов $\psi_k \in H^*$ из доказательства теоремы 3.1. Рассмотрим какой-нибудь такой функционал ψ_k. По условию теоремы $\operatorname{int} K_X \neq \varnothing$ и $K = K_X \cap H$. Значит, для некоторого $r > 0$ и любого $w \in H$ имеем

$$\pm r \frac{w}{\|w\|_X} \in K, \quad |\psi_k(w)| \leq \frac{\|w\|_X}{r}.$$

Следовательно, по непрерывности функционал ψ_k продолжается до функционала $\psi'_k \in X^*$, причем $\|\psi'_k\|_{X^*} \leq 1/r$. Кроме этого, по непрерывности имеет место неравенство $\psi'_k(x) \leq 1$ для всех $x \in K_X$. Поэтому $\psi'_k \in \Phi_{K_0}$. В дальнейшем просто считаем, что $\psi_k \in \Phi_{K_0}$.

Пусть $n, m > 0$. Положим $w_{n,m}(t) = v_n(t) - v_m(t)$. Далее там, где это не вызовет недоразумений, индексы n, m будем опускать. Кроме этого, вместо $b^+_{k,u}$ и $\beta_{n,u}$ пишем просто b^+_k и β_n. Легко видеть, что функция $w(t)$ удовлетворяет системе

$$w''(t) + Aw(t) + \chi(t) = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \tag{4.3}$$

где $\chi(t) = \beta_n(t) - \beta_m(t)$. Мы хотели бы умножить уравнение (4.3) на $w'(t)$ и получить оценку для $w(t)$ в пространстве W^∞. Но такое простое рассуждение не проходит. Вместо этого будем умножать уравнение на $Qw'(t)$, где Q — некий специальный проектор в X. Этот проектор будет подобран так, чтобы $(\chi(t), Qw'(t))$ было мало, но при этом $(A_0 w, Qw'(t)) \sim (A_0 w, w'(t))$.

Сначала докажем сходимость (4.1). В силу условий на A_0, A_1 найдется такое $q > 0$, что

$$q(\|u\|^2_X + (A_0 v, v)) \geq |(A_1 v, u)| \quad \forall u \in X, \forall v \in H.$$

По лемме 2.1 поляра $\Phi_{K_0} \subset X$ компактна, а значит, вполне ограничена. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется семейство $\eta_1, \dots, \eta_L \subset H$, образующее ε-сеть в Φ_{K_0}. Вообще говоря, элементы η_k могут не принадлежать Φ_{K_0}, но для нас это неважно, главное чтобы это семейство было ограничено в X константой, не зависящей от ε. Рассмотрим штрафное слагаемое $\beta_n(t)$. По построению оно имеет вид

$$\beta_n(t) = n \sum_{k=1}^{n} b^+_k(t) \psi_k,$$

где $\psi_k \in \Phi_{K_0}$, $k = \overline{1, n}$. Используя ε-сеть, это слагаемое можно записать в виде

$$\beta_n(t) = n \sum_{k=1}^{n} b^+_k(t)(\psi_k - \eta_{j_k}) + \sum_{j=1}^{L} \widetilde{b}_j(t) \eta_j,$$

причем $\|\psi_k - \eta_{j_k}\|_X \leq \varepsilon$, $k = \overline{1, n}$. Аналогичное представление имеет место и для $\beta_m(t)$. В результате с учетом оценки (3.8) получаем, что

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \sum_{j=1}^{L} \theta_j(t) \eta_j,$$

где $\|\chi_0(t)\|_{L_1(0,T;X)} \leq 2C_1 \varepsilon$ и $\|\theta_j(t)\|_{L_1(0,T)} \leq 2C_1$, $j = \overline{1, L}$.

Пусть $X_L = \operatorname{span}\{\eta_j\}_{j\le L}$, $X_L \subset X$. Обозначим через P ортогональный проектор в X на это подпространство X_L и $Q = I - P$. Умножая уравнение (4.1) на $2e^{-2qt}Qw'(t)$ и интегрируя, для $t \in (0,T)$ получаем

$$e^{-2qt}(A_0 w(t), w(t)) \le 4\varepsilon C_1 \|w_t\|_{L_\infty(0,T;X)} + 2\int\limits_0^t e^{-2qs}(A_0 w(s), Pw'(s))\,ds. \quad (4.4)$$

Строгое обоснование этой оценки можно получить, если рассматривать функцию $w(t)$ как единственное решение задачи (4.3). Доказываем ее разрешимость методом Галёркина, причем функции $\{\eta_j\}_{j\le L}$ включаем в базис. Требуемая оценка будет выполнена для приближенных решений с достаточно большим номером. После этого она переносится на функцию $w(t)$ с помощью предельного перехода.

Пусть $e_1, \dots, e_L$ — ортонормированный базис в X_L. Заметим, что в силу выбора элементов $\eta_j \in H$ имеем и $e_j \in H$, $j = \overline{1,L}$. Тогда

$$(A_0 w(s), Pw'(s)) = \sum_{j=1}^{L} (w'(s), e_j)(w(s), A_0 e_j). \quad (4.5)$$

Напомним, что речь идет о функции $w_{n,m}(t) = v_n(t) - v_m(t)$. По построению все эти функции равномерно ограничены в W^∞. Поэтому $(w'_{n,m}(s), e_j) \in L_\infty(0,T)$ $\forall j = \overline{1,L}$. Как и раньше, из леммы 3.2 получаем, что $(w_{n,m}(s), A_0 e_j) \to 0$ $\forall j = \overline{1,L}$ сильно в $C[0,T]$. Соединяя (4.4) и (4.5), переходим к пределу при $n, m \to \infty$. В результате имеем неравенство

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}} \|v_n(t) - v_m(t)\|_{L_\infty(0,T;H)} \le C\sqrt{\varepsilon}.$$

Отсюда и из произвольности ε следует (4.1).

Теперь уже легко доказать сходимость (4.2). Пусть весовая функция $\Phi(t) \in C^1[0,T]$ такова, что $\Phi(t) \ge 0$, $t \in (0,T)$ и $\Phi(T) = 0$. Умножаем уравнение (4.3) на $\Phi(t)w(t)$ и интегрируем:

$$\int\limits_0^T \|w'(t)\|_X^2 \Phi(t)\,dt = \int\limits_0^T \Phi(t)\left((Aw(t), w(t)) + (\chi(t), w(t))\right)\,dt + \int\limits_0^T (w'(t), w(t))\Phi'(t)\,dt.$$

Заметим, что $\chi \in L_1(0,T;X)$. В силу равномерной ограниченности всех $w'_{n,m}(t)$ в $L_\infty(0,T;X)$ и сходимости (4.1) получаем

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}} \int\limits_0^T \|v'_n(t) - v'_m(t)\|_X^2 \Phi(t)\,dt = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем весовую функцию $\Phi(t)$ так, чтобы $\Phi(t) = 1$ для $0 \le t \le T - \varepsilon$. Тогда

$$\int\limits_0^T \|v'_n - v'_m\|_X^2\,dt \le \int\limits_0^T \|v'_n(t) - v'_m(t)\|_X^2 \Phi(t)\,dt + 2\varepsilon\big(\|v'_n\|^2_{L_\infty(0,T;X)} + \|v'_m\|^2_{L_\infty(0,T;X)}\big).$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}} \int\limits_0^T \|v_n' - v_m'\|_X^2 \, dt \le C\varepsilon.$$

Отсюда следует (4.2).

Покажем, что для предельного решения выполняется закон сохранения энергии. Пусть $\Phi(t) \in C^1[0,T]$, $\Phi(T) = 0$. Мы только что доказали сильную сходимость последовательности $v_n(t)$. В силу этого достаточно установить, что

$$J_n = \int\limits_0^T (\beta_n(s), v_n'(s))\Phi(s)\, ds \to 0$$

при $n \to \infty$. Легко видеть, что

$$2J_n = -\int\limits_0^T n \sum_{k=1}^n (b_k^+(s))^2 \Phi'(s)\, ds.$$

Отсюда, используя (3.7) и (3.8), получаем

$$2|J_n| \le C \sup_{k,s} b_k^+(s) \le C/\sqrt{n}.$$

Следовательно, $J_n \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Стоит отметить, что главную роль в этом доказательстве играет некоторая специальная ε-сеть. Существование такой сети обеспечивает C-условие для множества K_X. В том случае, когда вложение $H \subset X$ компактно, условия на множество K можно ослабить. Эти условия носят несколько громоздкий характер, и мы их не приводим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Paoli L., Schatzman M.* Mouvement à un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales: cas avec perte d′énergie // Modél. Math. and Computer Modelling (M2AN). 1993. V. 27. P. 673–717.
2. *Schatzman M.* Uniqueness and continuous dependence on data for one-dimensional impact problems // Math. and Computer Modelling. 1998. V. 28, N 4–8. P. 1–18.
3. *Ballard P.* The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints // Arch. Rational Mech. Anal. 2000. V. 154. P. 199–274.
4. *Schatzman M.* A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints: The vibrating string with a concave obstacle // J. Math. Anal. Appl. 1980. V. 73, N 1. P. 138–191.
5. *Bamberger A., Schatzman M.* New results on the vibrating string with a continuous obstacle // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14, N 3. P. 560–595.
6. *Lebeau G., Schatzman M.* A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary // J. Differ. Equ. 1984. V. 53. P. 309–361.
7. *Bonafini M., Novaga M., Orlandi G.* A variational scheme for hyperbolic obstacle problems // Nonlinear Anal. 2019. V. 188. P. 389–404.
8. *Ahn J., Steawart D. E.* An Euler–Bernoulli beam with dynamic contact: discretization, convergence and numerical results // SIAM J. Numer. Anal. 2005. V. 43, N 4. P. 1455–1480.
9. *Ahn J., Steawart D. E.* Existence of solutions for a class of impact problems without viscosity // SIAM J. Math. Anal. 2006. V. 38, N 1. P. 37–63.
10. *Ahn J., Park Eun-Jae.* Dynamic frictionless contact of a nonlinear beam with two stops // Appl. Anal.: An Intern. J. 2014. DOI:10.1080/00036811.2014.931026.
11. *Артюшин А. Н.* Вариационные неравенства для волнового уравнения с ограничением на решение. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 5. С. 1033–1035.

12. *Лионс Ж. -Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 15 марта 2026 г.
После доработки 30 марта 2026 г.
Принята к публикации 10 апреля 2026 г.

Артюшин Александр Николаевич
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
alexsp3@yandex.ru