Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 531.911.5

МЕТОД ПРЕДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА

И. А. Финогенко

Аннотация. Метод предельных дифференциальных уравнений в сочетании с прямым методом функций Ляпунова со знакопостоянными производными является эффективным средством изучения асимптотического поведения решений неавтономных систем. В данной статье этот метод представлен в форме обобщений принципа инвариантности Ла-Салля для функционально-дифференциальных включений с запаздыванием с использованием набора дополнительных функционалов Ляпунова. Метод демонстрируется на механической системе с кулоновым трением в форме уравнений Лагранжа 2-го рода.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.214

Ключевые слова: предельное дифференциальное включение, запаздывание, функционал Ляпунова, принцип инвариантности, асимптотическое поведение решений, притяжение, механическая система с трением.

Статья посвящается
Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием

Введение

Метод функций Ляпунова является одним из основных в изучении качественных свойств решений различных классов дифференциальных уравнений. Это многочисленные вопросы устойчивости, притяжения, ограниченности, стабилизации и многие другие направления в различных областях теории дифференциальных уравнений. Обзор и классификацию качественных понятий и свойств, связанных с устойчивостью, можно найти в [1]. Одно из таких направлений относится к функциям Ляпунова со знакопостоянными производными. Оно восходит к известным теоремам Барбашина —- Красовского [2] для автономных систем

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $f : \Omega \to R^n$, $\Omega \subset R^n$ — некоторая область.

При этом дополнительное требование к множеству $E = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ нулей производной функции Ляпунова $V(x)$ об отсутствии в нем целых траекторий уравнения (1), кроме начала координат, обеспечивало асимптотическую устойчивость нулевого решения. Впоследствии выводы, которые вытекают лишь из знакопостоянства производной функции Ляпунова, были сделаны в

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России (проект № 1210401300060-4).

теореме Ла-Салля [1], известной как принцип инвариантности, так как главную роль в ней играет свойство инвариантности ω-предельных множеств траекторий автономных уравнений (1).

Принцип инвариантности в том или ином виде распространен и на другие классы автономных систем, таких как функционально-дифференциальные уравнения [3, 4].

При рассмотрении неавтономных дифференциальных уравнений на этом пути возникают трудности, связанные с описанием множества нулей производной функции Ляпунова и с отсутствием свойств типа инвариантности у ω-предельных множеств решений неавтономных систем. Попытки преодолеть эти трудности привели к теории, известной в настоящее время как метод предельных уравнений (см. [5]), начало которому положили работы Селла [6] и Артштейна [7–9] по топологической динамике неавтономных дифференциальных уравнений. Для неавтономных функционально-дифференциальных уравнений этот метод развит в [10].

При рассмотрении неавтономных дифференциальных включений возникают еще дополнительные проблемы, связанные с построением предельных дифференциальных соотношений, так как нет подходящих теорем математического (в том числе многозначного) анализа о сходимости возникающих функциональных последовательностей многозначных отображений. Эта проблема была рассмотрена в [11], где впервые появилось понятие предельного дифференциального включения.

Следует отметить, что принцип инвариантности и его обобщения методом предельных дифференциальных уравнений не позволяют в полной мере решать задачу об асимптотическом поведении решений, так как дают весьма общую оценку ω-предельных множеств. Вопрос о точном описании аттрактора системы был бы решен, если бы удалось точно описать наибольшее инвариантное множество в множестве нулей производной функции Ляпунова. Он остается открытым и всякий раз требует дополнительного исследования. Для этого могут использоваться какие-либо предположения и любые подходящие средства и факты, такие как свойства ω-предельных множеств, свойства используемых функций Ляпунова, структура исходных и предельных дифференциальных уравнений и включений и т. п. В общем виде такие исследования не всегда возможны и вряд ли целесообразны. Но использование наборов вспомогательных функций Ляпунова для таких исследований может быть представлено в достаточно общем виде. Основная идея здесь состоит в том, что может оказаться проще уметь определять те точки из множества нулей производной функции Ляпунова, которые инвариантным множествам исследуемой системы заведомо не принадлежат.

Вспомогательные функции Ляпунова являются эффективным средством исследований в теории устойчивости и рассматривались в работах многих авторов. Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы дифференциальных уравнений с использованием двух функций Ляпунова впервые дана В. М. Матросовым [12]. Для функционально-дифференциальных уравнений такие исследования имеются в [4]. Вопросы притяжения для механических систем с трением в форме уравнений Лагранжа второго рода с использованием принципа инвариантности и набора вспомогательных функций Ляпунова в автономном случае рассмотрены в [13]. Принцип инвариантности для автономных функционально-дифференциальных включений с наборами вспомогательных функционалов Ляпунова изучался в [14]. К неавтономным дифференциальным включениям (в том числе и уравнениям) метод предельных уравнений с несколькими функциями Ляпунова применен в [15].

Целью данной статьи является развитие метода предельных дифференциальных уравнений и обобщение принципа инвариантности с набором вспомогательных функционалов Ляпунова на неавтономные функционально-дифференциальные дифференциальные включения.

1. Предельные функционально-дифференциальные включения

Здесь приводится аналог принципа инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных включений, который является одним из основных методов локализации ω-предельных множеств и будет использоваться в дальнейшем.

Пусть R^n — n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\operatorname{conv} R^n$ — совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств из R^n. Для любых непустых ограниченных подмножеств A и B из R^n положим $\rho(B,A) = \sup_{b\in B} d(b,A)$, где $d(b,A) = \inf_{a\in A}\|b-a\|$. Через $A^\varepsilon = \{x : d(x,A) < \varepsilon\}$ обозначается ε-окрестность множества A и через $\overline{A}$ — замыкание множества A. Очевидно, что $\rho(B,A) < \varepsilon \Leftrightarrow B \subset A^\varepsilon$ и значение $\rho(B,A)$ не изменится, если множество A или B заменить его замыканием.

Через C_τ обозначается пространство всех непрерывных функций $\varphi(\cdot)$, определенных на отрезке $[-\tau,0]$, $\tau>0$, со значениями в R^n, снабженное sup-нормой

$$\|\varphi(\cdot)\|_C = \sup_{-\tau\le\theta\le 0}\|\varphi(\theta)\|.$$

Для любой непрерывной функции $x : R^1 \to R^n$ определим функцию $x_t(\cdot) \in C_\tau$ равенством $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\tau\le\theta\le 0$.

Будем рассматривать функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x_t(\cdot)), \quad x_{t_0}(\cdot) = \varphi_0(\cdot), \tag{2}$$

где $F : R^1 \times C_\tau \to R^n$ — многозначное отображение, $\varphi_0(\cdot) \in C_\tau$ — начальная функция в момент времени $t = t_0$.

Под *решением* задачи (2) понимается непрерывная функция $x : [t_0-\tau,\omega) \to R^n$, абсолютно непрерывная на любом отрезке $[t_0,t_1]$, $t_1<\omega$, такая, что выполняется начальное условие $x_{t_0}(\cdot) = \varphi_0(\cdot)$ и ее производная $\dot{x}(t)$ удовлетворяет включению (2) для почти всех $t \in [t_0,\omega)$.

Отображение $F : R^1 \times C_\tau \to \operatorname{conv} R^n$ называется *полунепрерывным сверху*, если для любых $(t,\varphi(\cdot)) \in R^1\times C_\tau$ и для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon,t,\varphi(\cdot)) > 0$ такое, что для всех $(t',\varphi'(\cdot))$, удовлетворяющих неравенствам $|t'-t|<\delta$, $\|\varphi'(\cdot)-\varphi(\cdot)\|_C<\delta$, выполняется $F(t',\varphi'(\cdot)) \subset F^\varepsilon(t,\varphi(\cdot))$. (Здесь и далее $F^\varepsilon(t,\varphi(\cdot))$ обозначает ε-окрестность множества $F(t,\varphi(\cdot))$.)

Отметим, что полунепрерывность сверху означает, что

$$\lim_{t'\to t,\varphi'(\cdot)\to\varphi(\cdot)} \rho(F(t',\varphi'(\cdot)), F(t,\varphi(\cdot))) = 0$$

и для ограниченных многозначных отображений необходимым и достаточным условием полунепрерывности сверху является замкнутость графика (см. [16, с. 35–40].

Сформулируем условия, которые используются при исследовании включения (2).

A1. *Значениями многозначного отображения $F(t,\varphi(\cdot))$ являются непустые, выпуклые и компактные множества.*

A2. *Многозначное отображение $(t,\varphi(\cdot)) \to F(t,\varphi(\cdot))$ полунепрерывно сверху.*

A3. *Для любого ограниченного множества $Q \subset C_\tau$ существует константа L такая, что для любых $(t,\varphi(\cdot)) \in R^1 \times Q$ и $z \in F(t,\varphi(\cdot))$ выполняется неравенство $\|z\| \leq L$.*

Теорема 1 (см. [17]). *Если выполняются условия* A1–A3, *то задача* (2) *для любой начальной функции имеет локальное решение, любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0-\tau,\omega)$ и любое ограниченное непродолжимое решение определено на промежутке $[t_0-\tau,+\infty)$.*

Введем в рассмотрение два вида многозначных отображений, которые будем называть *предельными* для многозначного отображения F:

$$F^*(t,\varphi(\cdot)) = \bigcap_{b\geq 0} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{a\geq b} F(t+a,\varphi(\cdot)), \quad F'(t,\varphi(\cdot)) = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k\geq n} F(t+t_k,\varphi(\cdot)),$$

где $a>0$, $t_k \to +\infty$ — произвольная последовательность, определяющая отображение F' (одна и та же для любых $(t,\varphi(\cdot))$), и $\overline{\mathrm{co}}$ — знак выпуклой замкнутой оболочки множества.

Следующая теорема описывает некоторые общие свойства предельных многозначных отображений из статьи [18], которые могут быть полезны для их построения и применения.

Теорема 2. *Пусть $F : R^1 \times C_\tau \to \mathrm{conv}\, R^n$ — ограниченное при каждом фиксированном $\varphi(\cdot)$ многозначное отображение. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любых фиксированных $(t,\varphi(\cdot))$ множества $F^*(t,\varphi(\cdot))$ и $F'(t,\varphi(\cdot))$ непустые, выпуклые и компактные.*

2. *Для любой функции $\varphi(\cdot)$ множество $F^*(t,\varphi(\cdot))$ не зависит от t.*

3. *Для предельного относительно последовательности $t_n \to +\infty$ отображения выполняется $F'(t,\varphi(\cdot)) \subset F^*(\varphi(\cdot))$ для любых $(t,\varphi(\cdot))$.*

4. *Если отображение $F = f(t,\varphi(\cdot))$ однозначно, то его предельные отображения в общем случае многозначны. При этом значение $f^*(\varphi(\cdot))$ (соответственно $f'(t,\varphi(\cdot))$) будет однозначно тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t,\varphi(\cdot))$ (соответственно тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{t_n\to+\infty} f(t+t_n,\varphi(\cdot))$).*

5. *При любой фиксированной функции $\varphi(\cdot)$ множество $F^*(t,,\varphi(\cdot))$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений функций $h(t) \in F(t,\varphi(\cdot))$ при условии, что $t \to +\infty$.*

6. *При любых фиксированных $(t,\varphi(\cdot))$ множество $F'(t,\varphi(\cdot))$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательностей векторов $z_k \in F(t+t_k,\varphi(\cdot))$, где $\{t_k\}$ — последовательность, которая определяет отображение $F'(t,\varphi(\cdot))$.*

Здесь и далее зависимость в обозначениях отображения F^* от переменной t не указывается и полагается, например, что $F^*(t,\varphi(\cdot)) = F^*(0,\varphi(\cdot))$.

Функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F^*(\varphi(\cdot)) \tag{3}$$

называется *предельным* для включения (2) и функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t, \varphi(\cdot)) \tag{4}$$

называется *предельным относительно последовательности* $\{t_k\}$ для включения (2).

Предельные функционально-дифференциальные включения (3) и (4) будут изучаться при дополнительном условии

A4. *Для любых* $\varphi(\cdot)$ *и* $\varepsilon > 0$ *существуют числа* $\delta = \delta(\varepsilon, \varphi(\cdot)) > 0$ *и* $\gamma = \gamma(\varepsilon, \varphi(\cdot))$ *такие, что*

$$F(t', \varphi'(\cdot)) \subset F^{\varepsilon}(t, \varphi(\cdot)) \tag{5}$$

для всех $t > \gamma$, t' *и* $\varphi'(\cdot)$ *таких, что* $|t' - t| < \delta$ *и* $\|\varphi'(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_C < \delta$.

Отметим, что условие (5) является некоторым усилением свойства полунепрерывности сверху многозначного отображения $(t, \varphi(\cdot)) \to F(t, \varphi(\cdot))$ и всегда выполняется, если это отображение полунепрерывно сверху в каждой точке $(t, \varphi(\cdot))$ равномерно относительно переменной t.

Теорема 3. *Если для многозначного отображения F выполняются условия* A1–A4, *то для предельных многозначных отображений F^* и F' выполняются условия* A1–A3.

Доказательство. Условия A1 и A3 для отображений F' и F^* вытекают непосредственно из условий A1 и A3 и определений. Так как многозначное отображение F^* не зависит от переменной t, его полунепрерывность по переменной $\varphi(\cdot)$ следует из [18, лемма 2].

Докажем A2 для предельного многозначного отображения $F'(t, \varphi(\cdot))$, определенного последовательностью $\{t_k\}$. Для этого достаточно показать, что для любых фиксированных $(t, \varphi(\cdot))$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(t, \varphi(\cdot), \varepsilon)$ > 0 такое, что при условиях $|t' - t| < \delta$ и $\|\varphi'(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_C < \delta$ выполняется неравенство

$$\rho(F'(t', \varphi'(\cdot)), F'(t, \varphi(\cdot))) < \varepsilon. \tag{6}$$

Из условия A4 получаем, что для любой функции $\varphi(\cdot)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta = \delta(\varphi(\cdot), \varepsilon) > 0$ и номер $m = m(\varphi(\cdot), \varepsilon)$ такие, что

$$\overline{\text{co}} \bigcup_{k \geq n} F(t' + t_k, \varphi'(\cdot)) \subset \overline{\text{co}} \bigcup_{k \geq n} (F(t + t_k, \varphi(\cdot)))^{\varepsilon} \tag{7}$$

для всех $n \geq m$, $|t' - t| < \delta$ и $\|\varphi'(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_C < \delta$. Здесь учтено, что для любого ограниченного множества $A \subset R^n$ выполняется (см. [19, с. 50])

$$\overline{\text{co}} A = \text{co}\, \overline{A}, \quad (\text{co}\, A)^{\varepsilon} = \text{co}(A^{\varepsilon}).$$

Из (7) получаем, что $F'(t', \varphi'(\cdot)) \subset \overline{(F'(t, \varphi(\cdot)))^{\varepsilon}}$ для всех $|t' - t| < \delta$ и $\|\varphi'(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_C < \delta$, откуда вытекает (6) и теорема доказана.

2. Принцип инвариантности

Всюду в дальнейшем полагаем, что все ограниченные решения включений (2)–(4) определены на правых максимальных промежутках существования $[t_0 - \tau, +\infty)$.

Будем говорить, что множество $D \subset C_\tau$ *полуинвариантно*, если для любой функции $\psi(\cdot) \in D$ существует решение $y(t)$ включения (3) такое, что $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Множество $D \subset C_\tau$ *квазиинвариантно*, если для любой функции $\psi(\cdot) \in D$ существует решение $y(t)$ включения (4) с некоторым предельным многозначным отображением $F'(t, \varphi(\cdot))$ в правой части такое, что $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Функцию $\psi(\cdot)$ назовем *ω-предельной* для решения $x(t)$ включения (2), определенного на промежутке $[t_0 - \tau, +\infty)$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $x_{t_n}(\cdot) \to \psi(\cdot)$. Множество всех ω-предельных функций обозначим через $\Lambda^+(x)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* A1–A4. *Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ включения* (2) *множество $\Lambda^+(x)$ непусто, компактно, связно, квазиинвариантно и $d_C(x_t(\cdot), \Lambda^+(x)) \to 0$ при $t \to +\infty$, где d_C означает расстояние от точки до множества в пространстве C_τ.*

В рамках сделанных предположений утверждение теоремы 4 вытекает из [18, теорема 3].

Замечание 1. Поскольку $F(t, \varphi(\cdot)) \subset F^*(\varphi(\cdot))$ при любых $(t, \varphi(\cdot))$, то свойство квазинвариантности влечет свойство полуинвариантности для множества $\Lambda^+(x)$. Существование и продолжимость решений включений (3) и (4) в рамках предположений теоремы 3 необходимы при рассмотрении произвольного квазиваинвариантного множества D

Для конструктивного описания множеств точек нулей производной (и самой производной) функционала Ляпунова в силу функционально-дифференциального включения будем использовать специальный класс инвариантно дифференцируемых функционалов, который был введен в [20] для решения задач теории устойчивости в рамках прямого метода Ляпунова.

Для произвольных функции $\varphi(\cdot) \in C_\tau$ и числа $\Delta > 0$ через $E_\Delta(\varphi(\cdot))$ обозначим множество всех непрерывных продолжений $\Phi(\cdot)$ функции $\varphi(\cdot)$ на отрезок $[-\tau, \Delta]$. Для каждых функции $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\varphi(\cdot))$ и числа $\xi \in [0, \Delta)$ через $\Phi_\xi(\theta)$ обозначим $\Phi_\xi(\theta) = \Phi(\xi + \theta)$, где $-\tau \leq \theta \leq 0$.

Определение 1. Функционал $W : C_\tau \to R^1$ имеет *инвариантную производную* $\partial_\varphi W$ в точке $\varphi(\cdot) \in C_\tau$, если для любой $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\varphi(\cdot))$ функция $Y_\Phi(\xi) = W(\Phi_\xi(\cdot))$ имеет в нуле конечную правую производную $\partial Y_\Phi / \partial\xi|_{\xi=+0}$, инвариантную относительно функций $\Phi(\cdot)$. Последнее означает, что значение правой производной в нуле одно для всех $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\varphi(\cdot))$.

Определение 2. Функционал $W : R^1 \times R^n \times C_\tau \to R$ *инвариантно дифференцируем* в точке $p = (t, x, \varphi(\cdot)) \in R^1 \times R^n \times C_\tau$, если в этой точке существуют конечные $\partial W/\partial t, \nabla_x W, \partial_\varphi W$ и для любой $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\varphi(\cdot))$ выполняется равенство

$$W(t + \zeta, x + z, \Phi_\xi(\cdot)) - W(t, x, \varphi(\cdot)) = \frac{\partial W[p]}{\partial t} \cdot \zeta + \langle \nabla_x W[p], z \rangle + \partial_\varphi W[p] \cdot \xi + o(\sqrt{\|z\|^2 + \zeta^2 + \xi^2})$$

при каждых $z \in R^n$, $\xi \in [0,\Delta]$, $\zeta \geq 0$, причем $o(\cdot)$ зависит от выбора $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$. (Здесь $\nabla_x W$ — градиент функционала W по переменной x, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — знак скалярного произведения.)

Замечание 2. Для того чтобы функционал W был инвариантно дифференцируем в точке $p = (t, x, \varphi(\cdot))$, необходимо, чтобы он имел в этой точке частные производные $\nabla_x W$, $\partial_\psi W$, и достаточно, чтобы они были инвариантно непрерывны в точке p. Эти и другие факты относительно инвариантно дифференцируемых функционалов, а также примеры имеются в [20].

Будем рассматривать инвариантно-дифференцируемый функционал Ляпунова $V(t,x,\varphi(\cdot))$. Его верхнюю $\dot V^+(t,\varphi(\cdot))$ и нижнюю $\dot V^-(t,\varphi(\cdot))$ производные в силу функционально-дифференциального включения (2) определим следующими равенствами:

$$\dot V^+ = \sup_{y\in F(t,\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V, y\rangle + \partial_\varphi V + \partial_t V)|_{\,x=\varphi(0)},$$

$$\dot V^- = \inf_{y\in F(t,\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V, y\rangle + \partial_\varphi V + \partial_t V)|_{\,x=\varphi(0)}.$$

Замечание 3. Инвариантная производная функционала V не зависит от продолжения функции $\varphi(\cdot)$ вправо и, следовательно, не зависит от решения функционально-дифференциального включения (2). Функционал V рассматривается как функция трех переменных $(t, x, \varphi(\cdot))$, и это позволяет конструктивно вычислять полные производные функционала V в силу функционально-дифференциального включения (2), не зная решения. Иными словами, в производных $\dot V^+$ и $\dot V^-$ выделена бесконечномерная составляющая (инвариантная производная), не зависящая от правой части включения (2), и конечномерная (градиент), которая эту зависимость обеспечивает. Связь между производными вдоль решения и производными в силу исследуемых систем для функционально-дифференциальных уравнений установлена в [20]. Для функционально-дифференциальных включений эту связь обеспечивает следующая

Лемма 1 (см. [21, лемма 1]). *Пусть выполняются условия* A1–A3, $x(t)$ — *решение дифференциального включения* (2), *определенное на некотором промежутке* $[t_0 - \tau, t_1)$, *и* $V(t,x,\varphi(\cdot))$ — *инвариантно-дифференцируемый функционал.*

Тогда справедливы неравенства

$$\dot V^-(t, x_t(\cdot)) \leq D_-v(t) \leq D^+v(t) \leq \dot V^+(t, x_t(\cdot)) \tag{8}$$

для всех $t \in [t_0, t_1)$, *где* $D_-v(t)$ *и* $D^+v(t)$ — *правое нижнее и соответственно правое верхнее производные числа Дини функции* $v(t) = V(t, x(t), x_t(\cdot))$.

Неравенства (8) позволяют установить связь между производной функционалов $V(p)$, $p = (t, x, \varphi(\cdot))$, вдоль решения и производной в силу включения (2).

Через $w(t,\varphi(\cdot)) \geq 0$ будем обозначать измеримую по t, непрерывную по $\varphi(\cdot)$ и ограниченную на каждом множестве $R^1 \times K$ функцию, где $K \subset C_\tau$ — компактное множество, для которой выполняется условие

$$\lim_{t\to+\infty,\varphi(\cdot)'\to\varphi(\cdot)} |w(t,\varphi(\cdot)') - w(t,\varphi(\cdot))| = 0. \tag{9}$$

Условие (9) означает, что для w выполняется условие A4. Для этого достаточно также, чтобы функция w была непрерывна по $\varphi(\cdot)$ равномерно относительно t.

Сформулируем две теоремы из [18], которые являются аналогами принципа инвариантности для функционально-дифференциальных включений, и будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* A1–A3 *и для включения* (2) *существует инвариантно-дифференцируемый функционал* $V(t,x,\varphi(\cdot))$, *ограниченный снизу на каждом множестве вида* $R^1 \times K[0] \times K$, *где* $K \subset C_\tau$ — *компактное множество*, $K[0] = \{\varphi(0) : \varphi(\cdot) \in K\}$, *такой, что выполняется условие*

$$\dot V^+(t,\varphi(\cdot)) \le -w(t,\varphi(\cdot)). \tag{10}$$

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ *включения* (2) *множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества*

$$E_w = \{\varphi(\cdot) \in C_\tau : \alpha(\varphi(\cdot)) = 0\}, \tag{11}$$

где $\alpha(\varphi(\cdot))$ — *нижний предел функции* $t \to w(t,\varphi(\cdot))$ *при* $t \to +\infty$.

Отметим, что для каждого фиксированного $\varphi(\cdot)$ значение функции $\alpha(\varphi(\cdot))$ реализуется на некоторой последовательности $w(t_k,\varphi(\cdot))$ при $t_k \to +\infty$. Поэтому формуле (11) можно придать вид

$$E_w = \{\varphi(\cdot) \in C_\tau : \exists t_k \to +\infty,\ \lim_{k\to+\infty} w(t_k,\varphi(\cdot)) = 0\}.$$

Теорема 6. *Пусть в условиях теоремы* 5 *инвариантно-дифференцируемый функционал* $V(x,\varphi(\cdot))$ *не зависит от переменной* t. *Введем обозначения:*

$$\dot V^{*+}(\varphi(\cdot)) = \sup_{y\in F^*(\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V(x,\varphi(\cdot)), y\rangle + \partial_\varphi V(x,\varphi(\cdot)))|_{\,x=\varphi(0)},$$

$$\dot V'^{+}(t,\varphi(\cdot)) = \sup_{y\in F'(t,\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V(x,\varphi(\cdot)), y\rangle + \partial_\varphi V(x,\varphi(\cdot)))|_{\,x=\varphi(0)}.$$

Тогда для любого ограниченного решения включения (2) *с* ω-*предельным множеством* $\Lambda^+(x)$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любой начальной функции* $\varphi_0(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ *существуют предельное относительно некоторой последовательности* $\{t_k\}$ *отображение* $F'(t,\varphi(\cdot))$ *и решение* $y(t)$ *включения* (4) *с начальным условием* $y_0 = \varphi_0(\cdot)$ *такие, что выполняется равенство*

$$\dot V'^{+}(t,y_t(\cdot)) = 0$$

для п. в. $t \ge 0$.

2. *Множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества*

$$E^* = \{\varphi(\cdot) \in C_\tau : \dot V^{*+}(\varphi(\cdot)) = 0\}. \tag{12}$$

Множества (11) и (12) являются аналогами множества нулей производной функции Ляпунова в принципе инвариантности Ла-Салля для автономных дифференциальных уравнений.

3. Принцип инвариантности с набором вспомогательных функционалов Ляпунова

Пусть $V_j(x,\varphi(\cdot))$ — инвариантно-дифференцируемые функционалы, $j \in \{1,\dots,m\}$. Введем обозначения:

$$\dot V'^{+}_j(t,\varphi(\cdot)) = \sup_{y\in F'(t,\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V_j(x,\varphi(\cdot)), y\rangle + \partial_\varphi V_j(x,\varphi(\cdot)))|_{x=\varphi(0)},$$

$$\dot V^{*+}_j(\varphi(\cdot)) = \sup_{y\in F^*(\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V_j(x,\varphi(\cdot)), y\rangle + \partial_\varphi V_j(x,\varphi(\cdot)))|_{x=\varphi(0)}$$

и

$$\dot V'^{-}_j(t,\varphi(\cdot)) = \inf_{y\in F'(t,\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V_j(x,\varphi(\cdot)), y\rangle + \partial_\varphi V_j(x,\varphi(\cdot)))|_{x=\varphi(0)},$$

$$\dot V^{*-}_j(\varphi(\cdot)) = \inf_{y\in F^*(\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V_j(x,\varphi(\cdot)), y\rangle + \partial_\varphi V_j(x,\varphi(\cdot)))|_{x=\varphi(0)}.$$

Теорема 7. *Пусть выполняются все предположения теоремы 5, условие* A4, $M \subset E_w$ *— замкнутое множество и существуют инвариантно-дифференцируемые функционалы* $V_j(x, \varphi(\cdot))$, $j = 1, \dots, m$, *такие, что для любой функции* $\varphi(\cdot) \in E_w \backslash M$ *найдется индекс* $j \in \{1, \dots, m\}$ *такой, что*

$$V_j(\varphi(0), \varphi(\cdot)) = 0 \tag{13}$$

и выполняется одно из условий:

$$\dot{V}_j'^{+}(0, \varphi(\cdot)) < 0, \quad \dot{V}_j'^{-}(0, \varphi(\cdot)) > 0 \tag{14}$$

для любого предельного отображения $F'(t, \varphi(\cdot))$ *и для каждой функции* $\varphi(\cdot) \in E_w \backslash M$.

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ *включения* (2) *выполняется*

$$\Lambda^+(x) \subset M. \tag{15}$$

Доказательство. Предположим, что условие (15) не выполняется. Тогда существует функция $\varphi_0(\cdot) \in \Lambda^+(x) \backslash M$. В соответствии с теоремой 4 множество $\Lambda^+(x)$ квазиинвариантно. Тогда существует решение $y^1(t)$ включения (4) с начальным условием $y_0^1(\cdot) = \varphi_0(\cdot)$, удовлетворяющее $y_t^1(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$. Поскольку множество M замкнуто, то $y_t^1(\cdot) \notin M$ для всех $t \in [0, h_0)$ для некоторого достаточно малого $h_0 > 0$, а в соответствии с теоремой 5 выполняется $y_t^1(\cdot) \in E_w$ для всех $t \geq 0$. Тогда в соответствии с неравенствами (14) и леммой 1, примененной к включению (4), найдутся функционал V_{j_1} и число $0 < h_1 < h_0$ такие, что

$$V_{j_1}(y^1(0), y_0^1(\cdot)) = 0, \quad V_{j_1}(y^1(h_1), y_{h_1}^1(\cdot)) \neq 0, \quad y_{h_1}^1(\cdot) \in \Lambda^+(x) \backslash M.$$

Аналогично вышесказанному существуют решение $y^2(t)$ включения (4) с начальным условием $y_0^2(\cdot) = y_{h_1}^1(\cdot)$, удовлетворяющее $y_t^2(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$, число $h_2 > 0$ и функционал V_{j_2}, $j_1 \neq j_2$, такие, что

$$V_{j_2}\big(y^2(0), y_0^2(\cdot)\big) = 0, \quad V_{j_2}\big(y^2(h_2), y_{h_2}^2(\cdot)\big) \neq 0, \quad y_{h_2}^2(\cdot) \in \Lambda^+(x) \backslash M.$$

Так как $V_{j_1}(y^1(h_1), y_{h_1}^1(\cdot)) \neq 0$, то число h_2 можно взять настолько малым, что будет выполняться $V_{j_1}\big(y^2(h_2), y_{h_2}^2(\cdot)\big) \neq 0$. Продолжая этот процесс, получим точку h_m такую, что $y_{h_m}^m(\cdot) \in E_w \backslash M$ и $V_j(y^m(h_m), y_{h_m}^m(\cdot)) \neq 0$ для всех $j = 1, \dots, m$. Последнее противоречит условию (13), и теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть выполняются все условия теоремы* 5, *множество* E^* *определено равенством* (12), $M \subset E^*$ *— замкнутое множество. Предположим, что существуют инвариантно-дифференцируемые функционалы* $V_j(\varphi(\cdot))$, $j = 1, \dots, m$, *такие, что для любого* $\varphi(\cdot) \in E^* \backslash M$ *найдется индекс* $j \in \{1, \dots, m\}$ *такой, что выполняются* (13) *и одно из условий*

$$\dot{V}_j^{*+}(\varphi(\cdot)) < 0, \quad \dot{V}_j^{*-}(\varphi(\cdot)) > 0. \tag{16}$$

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ *включения* (2) *выполняется* (15).

Доказательство повторяет доказательство теоремы 7 с заменой производных $\dot{V}'^{+}(t, \varphi(\cdot))$ и $\dot{V}'^{-}(t, \varphi(\cdot))$ на $\dot{V}^{*+}(\varphi(\cdot))$ и $\dot{V}^{*-}(\varphi(\cdot))$, множества E_w на множество E^* соответственно и использовании неравенств (16) вместо неравенств (14).

Следствие 1. *В рамках предположений теоремы* 7 *или теоремы* 8 *для любого ограниченного решения дифференциального включения* (2) *выполняется* $d(x_t(\cdot), M) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство вытекает из теорем 7, 8 и теоремы 4.

Замечание 4. Полученные результаты могут применяться к обыкновенным дифференциальным уравнениям и включениям без запаздывания. Отметим, что важным условием при этом является ограниченность решений. Основы теории ограниченности решений систем дифференциальных уравнений на основе метода функций Ляпунова заложены в работе Иосидзавы [22]. Различные типы ограниченности решений и их сравнительный анализ имеются в [1]. В [23] к теории ограниченности решений применяются методы вектор-функций Ляпунова. Достаточные условия существования ограниченных и периодических решений дифференциальных включений представлены в [19].

Для функционально-дифференциальных включений здесь приведем лишь одно простое утверждение.

Функционал $V(t, x, \varphi(\cdot))$ будем называть *бесконечно большим*, если для любого числа $A > 0$ существует число $B > 0$ такое, что $|V(t, \varphi(0), \varphi(\cdot))| > A$ для всех $t \le B$ и $\|\varphi(\cdot)\|_C > B$.

Следствие 2. *В рамках предположений теорем* 7 *или* 8 *с бесконечно большим и ограниченным снизу функционалом* $V(t, x, \varphi(\cdot))$ *утверждения этих теорем и следствия* 1 *справедливы для любого решения* $x(t)$ *включения* (2).

Доказательство. Из неравенства (10) и леммы 1 вытекает, что для любого решения $x(t)$ включения (2) функция $t \mapsto V(t, x(t), x_t(\cdot))$ не возрастает. Кроме того, она ограничена снизу и поэтому для неограниченного решения $x(t)$ эта функция ограничена, что противоречит условию быть бесконечно большим для функционала V. Следовательно, любое решение функционально-дифференциального включения (2) ограничено и утверждения теорем 7, 8 и следствия 1 справедливы для всех решений включения (2).

Замечание 5. В теоремах 7, 8 множества E_w и E^* могут быть заменены любым содержащим их множеством E и при этом останутся справедливыми утверждения следствий 1 и 2.

4. Притяжение для механических систем с трением

Принцип инвариантности не позволяют в полной мере решать задачу притяжения для включения (2), так как множество M заранее неизвестно и может формироваться, по сути дела, лишь в ходе анализа множеств нулей верхних производных функционала V. В результате этого и появляются вспомогательные функционалы V_j, определяющие те области из множеств E_w и E^*, которым притягивающее множество заведомо не принадлежит. Продемонстрируем это для механической системы в форме уравнений Лагранжа 2-го рода с k степенями свободы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i^A + Q_i^T, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{17}$$

под действием потенциальных и диссипативных активных сил Q_i^A и сил трения скольжения Q_i^T. Для таких систем функция Ляпунова в форме энергии имеет знакопостоянную производную. Детальное описание и исследование вопросов притяжения для (17) в автономном случае имеется в [23].

Используются следующие обозначения: $q = (q_1, \ldots, q_k)'$, $q = (\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^k)'$, $q = (\ddot{q}^1, \ldots, \ddot{q}^k)'$, $Q^A = (Q_1^A, \ldots, Q_k^A)'$ — векторы обобщенных координат, скоростей, ускорений и активных сил. (Здесь $'$ — знак транспонирования.)

Исследование системы (17) проводится с целью показать детали предлагаемого метода, связанные со вспомогательными функционалами Ляпунова. Поэтому мы ограничиваемся случаем, когда кинетическая энергия T системы представляет собой положительно определенную квадратичную форму

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

обобщенных скоростей с симметричной положительно определенной матрицей $A(q) = [a_{ij}(q)]_1^k$, а от переменной t зависят лишь коэффициенты трения.

Активные силы Q^A представляют собой сумму потенциальных сил $K = (K_1(q), \ldots, K_k(q))'$, $K_i(q) = -\partial \Pi(q)/\partial q^i$, где $\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы, и диссипативных сил

$$D = (D_1(q, \dot{q}), \ldots, D_k(q, \dot{q}))', \quad D(q, 0) = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} D_i(q, \dot{q}) \dot{q}^i \leq 0,$$

которые могут представлять силы вязкого трения или силы сопротивления среды. Здесь предполагаем также, что на систему действуют активные силы, зависящие от предшествующего состояния системы. Это могут быть возмущения или разрывные позиционные управляющие силы любой физической природы с запаздыванием. Они выделяются в отдельный класс внешних сил $G(\dot{q}(t - \tau))$.

Обобщенные силы трения скольжения при условии $\dot{q}^i \neq 0$ имеют вид

$$Q_i^T(q, \dot{q}) = -f_i(t, q, \dot{q}) |N_i(q, \dot{q})| \operatorname{sgn} \dot{q}^i, \tag{18}$$

где $|N_i(q, \dot{q})|$ — модули нормальных реакций в точках соприкосновения трущихся тел, $f_i(t, q, \dot{q}) > 0$ — коэффициенты трения, $1 \leq s \leq k$.

Отметим, что если активные силы, действующие на систему, известны, то реакции связей с трением $N_i(q, \dot{q})$ неизвестны и подлежат определению (см. [23, 24]. В данной статье эти вопросы не затрагиваются.

Применим к силам трения в точках разрыва простейшее выпуклое доопределение в смысле А. Ф. Филиппова [19] и тогда вместе с (18) получим общее выражение сил трения в виде

$$Q_i^T(t, q, \dot{q}) = \begin{cases} -f_i |N_i| \operatorname{sgn} \dot{q}, & \text{если } \dot{q}^i \neq 0, \\ [-f_i |N_i|, f_i |N_i|], & \text{если } \dot{q}^i = 0, \end{cases}$$

для каждого $i = 1, \ldots, k$.

Введем в рассмотрение функцию $g = (g_1, \ldots, g_k)'$, определенную равенствами

$$g_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q^i} \dot{q}^\nu \dot{q}^j - \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^\nu} \dot{q}^\nu \dot{q}^j.$$

Тогда (17) в развернутом виде запишется так:

$$A(q)\ddot{q} \in g(q, \dot{q}) + D(q, \dot{q}) + K(q) + G(\dot{q}(t - \tau)) + Q^T(t, q, \dot{q}). \tag{19}$$

Полагая $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, $x = (x_1, x_2)$ и $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$, стандартными преобразованиями включение (18) можно привести к виду

$$\dot{x} \in F(t, x_t(\cdot)). \tag{20}$$

Применительно к включению (20) могут использоваться результаты предыдущих разделов данной статьи. Далее рассматриваем систему (17) в удобной для нас форме (19).

Положим

$$a_i(x) = \varliminf_{t\to+\infty} f_i(t,x), \quad b_i(x) = \varlimsup_{t\to+\infty} f_i(t,x), \quad i = 1,\ldots,k,$$

и определим многозначную функцию со значениями $Q^*(x) = Q_1^*(x)\times\ldots\times Q_k^*(x)$ равенствами

$$Q_i^*(x) = \begin{cases} [a_i|N_i|, b_i|N_i|], & \text{если } \dot q^i < 0, \\ [-b_i|N_i|, -a_i|N_i|], & \text{если } \dot q^i > 0, \\ [-b_i|N_i|, b_i|N_i|], & \text{если } \dot q^i = 0. \end{cases}$$

Предельное функционально-дифференциальное включение, построенное с использованием теоремы 2, имеет вид

$$A(q)\ddot q \in g(q,\dot q) + D(q,\dot q) + K(q) + G(\dot q(t-\tau)) + Q^*(q,\dot q). \tag{21}$$

Функционал Ляпунова возьмем в виде

$$V(x,\varphi(\cdot)) = c(T(x)+\Pi(x)) + \int\limits_{-\tau}^{0} G^2(\varphi_2(\theta))\,d\theta, \tag{22}$$

где $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot),\varphi_2(\cdot))$, $c>0$ и

$$G^2(\varphi_2(\theta)) = \sum_{i=1}^{k} G_i^2(\varphi_2(\theta))$$

для всех $\theta\in[-\tau,0]$. Функционал (22) инвариантно дифференцируем, и его инвариантная производная по переменной $\varphi(\cdot)$ при условии $x=\varphi(0)$ определяется равенством [20]

$$\partial_\varphi V = G^2(\varphi_2(0)) - G^2(\varphi_2(-\tau)).$$

Используя леммы 3 и 4 из [25], заключаем, что

$$\dot V^+(t,\varphi(\cdot)) = c\Bigg(\sum_{i=1}^{k} D_i(x)\varphi_{2i}(0) - \sum_{i=1}^{k} f_i(t,x)|N_i(x)||\varphi_{2i}(0)| + \sum_{i=1}^{k} G_i(\varphi_2(-\tau))\varphi_{2i}(0)\Bigg)\Bigg|_{x=\varphi(0)} + \partial_\varphi V,$$

$$\dot V^{*+}(\varphi(\cdot)) = c\Bigg(\sum_{i=1}^{k} D_i(x)\varphi_{2i}(0) - \sum_{i=1}^{k} a_i(x)|N_i(x)||\varphi_{2i}(0)| + \sum_{i=1}^{k} G_i(\varphi_2(-\tau))\varphi_{2i}(0)\Bigg)\Bigg|_{x=\varphi(0)} + \partial_\varphi V.$$

Если $\dot V^+(t,\varphi(\cdot))\le 0$, то в соответствии с теоремой 8 множество $\Lambda^+(x)$ любого ограниченного решения $x(t) = (q(t),\dot q(t))$ включения (21) принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества

$$E^* = \left\{\varphi(\cdot) : c\left(\sum_{i=1}^{k} D_i(x)\varphi_{2i}(0) - \sum_{i=1}^{k} a_i(x)|N_i(x)||\varphi_{2i}(0)| + \sum_{i=1}^{k} G_i(\varphi_2(-\tau))\varphi_{2i}(0)\right)\Bigg|_{x=\varphi(0)} + \partial V_\varphi = 0\right\}. \quad (23)$$

Таким образом, принцип инвариантности для системы (17) в форме включения (21) сводится к условиям знакопостоянства производной $\dot{V}^+(t, \varphi(\cdot))$, а вспомогательные функционалы должны определяться в результате анализа множества (23).

Предположим, что диссипация является полной относительно всех обобщенных скоростей $q^1, \dots, q^k$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{k} D_i(q, \dot{q}^i)\dot{q}^i \le -\gamma \sum_{i=1}^{k} \dot{q}^{i2}, \quad (24)$$

и рассмотрим множество

$$E_0^* = \left\{\varphi(\cdot) : -c\left(\gamma \sum_{i=1}^{k} \varphi_{2i}^2(0) + \sum_{i=1}^{k} a_i(\varphi(0))|N_i(\varphi(0))||\varphi_{2i}(0)| - \sum_{i=1}^{k} G_i(\varphi_2(-\tau))\varphi_{2i}(0)\right) + \partial V_\varphi = 0\right\}.$$

Из условия (24) вытекает, что $E^* \subset E_0^*$, и, как отмечено в замечании 5, в теореме 8 может быть использовано вместо множества E^* множество E_0^*.

Выберем $c = 2$ и $\gamma > 1/2$. Тогда

$$E_0^* = \left\{\varphi(\cdot) : -\sum_{i=1}^{k} \big(\varphi_{2i}(0) - G_i(\varphi_2(-\tau))\big)^2 - 2\sum_{i=1}^{k} a_i(\varphi(0))\,|N_i(\varphi(0))|\,|\varphi_{2i}(0)| - \sum_{i=1}^{k} \big(\alpha^2\varphi_{2i}^2(0) - G_i^2(\varphi_2(0))\big) = 0\right\}, \quad (25)$$

где $\alpha^2 = 2\gamma - 1$.

Пусть для любого $z \in R^k$ выполняется $\|G(z)\| \le \alpha\|z\|$ и

$$a_i(x)|N_i(x)| \ne 0 \quad (26)$$

для всех $i = 1, \dots, k$, и $x \in R^{2k}$. Тогда множество (25), очевидно, определяется условием

$$\varphi(\cdot) \in E_0^* \;\Leftrightarrow\; \varphi_2(0) = 0 \;\text{ и }\; G(\varphi_2(-\tau)) = 0. \quad (27)$$

Далее предположим, что $A = E$ — единичная матрица. Некоторые вопросы общей теории для такого случая исследовались в [26]. Здесь рассмотрим асимптотическое поведение решений с использованием теоремы 8. Определим множество

$$M = \{\varphi(\cdot) : \varphi_{2i}(0) = 0,\, G(\varphi_2(-\tau)) = 0,\; |K_i(\varphi_1(0))| \le b_i(\varphi(0))|N_i(\varphi(0))|,\; i = 1, \dots, k\} \quad (28)$$

и возьмем в качестве вспомогательных функционалов $V_i(x, \varphi(\cdot)) = \dot{x}_{2i}$, $i = 1, \dots, k$. Тогда $M \subset E_0^*$. Если $\varphi(\cdot) \in E_0^* \backslash M$, то для некоторого индекса i выполняется $|K_i(\varphi_1(0)| > b_i(\varphi(\cdot))|N_i(\varphi(\cdot))|$ и непосредственно из определений вытекает, что $V_i(\varphi(0), \varphi(\cdot)) = 0$ и выполняется одно из условий: $\dot{V}^{*+} = b_i - K_i < 0$ или $\dot{V}^{*-} = -b_i - K_i > 0$. Поэтому в соответствии с теоремой 8 заключаем, что $\Lambda^+(x) \subset M$ для любого ограниченного решения включения (19). В силу следствия 1 $d(x_t(\cdot), M) \to 0$ и поэтому $\Lambda^+(x) \subset \{\varphi(\cdot) : \varphi_2(\theta) \equiv 0\}$. Следовательно,

$$\Lambda^+(x(\cdot)) \subset \{\varphi(\cdot) : \varphi_2(\cdot) = 0,\ |K_i(\varphi_1(0)| \le b_i(\varphi(\cdot))|N_i(\varphi(\cdot))|,\ i = 1, \dots, k\},$$

Функционал V является бесконечно большим и ограниченным снизу. В силу следствия 2 в терминах исходной системы (19) заключаем, что любое ее решение $x(t) = (q(t), \dot{q}(t)))$ стремится к множеству

$$M^* = \{(q, \dot{q}) : \dot{q}^i = 0,\ |K_i(q)| \le b_i(q, \dot{q})|N_i(q, \dot{q})|,\ i = 1, \dots, k\}. \tag{29}$$

В заключение отметим, что множество (28) оказалось возможным описать достаточно конструктивно, используя неравенства (24) и (26), так как они обеспечивали структуру множества E^* и выбор вспомогательных функционалов V_i. Множество (29) представляет собой множество неизолированных положений равновесия предельного включения (21) с нулевой функцией G. Если все коэффициенты трения $f_i(t, q, \dot{q})$ являются невозрастающими по переменной t функциями, то, как нетрудно видеть, стационарные множества исходной и предельной систем совпадают. Тогда из следствия 2 вытекает, что при всех сделанных выше предположениях система (19) дихотомична, т. е. любое ее ограниченное решение стремится к стационарному множеству M^*. Вопрос о том, стремится ли это решение к какому-либо конкретному положению равновесия, остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руш Н., Абетс М., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
2. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1983.
4. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
5. *Мартынюк А. А., Като Д., Шестаков А. А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наук. думка, 1990.
6. *Sell G. R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I, II // Trans. Am. Math. Soc. 1967. V. 127, N 2. P. 241–283.
7. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equ. 1977. V. 23, N 2. P. 216–223.
8. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equations and Kurzweil equations // J. Differ. Equ. 1977. V. 23, N 2. P. 224–243.
9. *Artstein Z.* The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations // J. Differ. Equ. 1977. V. 25. P. 184–202.
10. *Андреев А. С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.
11. *Финогенко И. А.* Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности неавтономных систем // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 454–471.
12. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, № 6. С. 992–1002.
13. *Матросов В. М., Финогенко И. А.* О притяжении для автономных механических систем с трением скольжения // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 1. С. 100–120.

14. *Финогенко И. А.* О притяжении и слабом притяжении для автономных функционально-дифференциальных включений с использованием нескольких функционалов Ляпунова // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 12. С. 213–221.
15. *Финогенко И. А.* Об асимптотическом поведении решений неавтономных дифференциальных включений с набором нескольких функций Ляпунова // Вестн. российских университетов. Математика. 2025. Т. 30, № 150. С. 170–182.
16. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.
17. *Куржанский А. Б.* О существовании решений уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 6, № 10. С. 1800–1809.
18. *Финогенко И. А.* Принцип инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных включений // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 271–184.
19. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
20. *Ким А. В.* i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
21. *Сурков А. В.* Об устойчивости функционально-дифференциальных включений с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1055–1063.
22. *Yoshizawa T.* Liapunov′s function and boundedness of solutions // Funkcialaj Ekvacioj. 1959. V. 2. P. 95–142.
23. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
24. *Матросов В. М., Финогенко И. А.* О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 6. С. 3–10.
25. *Finogenko I. A.* On the asymptotic behavior of mechanical systems with friction // Sib. Math. J. 2022. V. 63, N 5. P. 974–982.
26. *Lamarque C-H., Bastien J., Holland M.* Study of maximal monotone model with a delay term // SIAM J. Numer. Anal. 2003. V. 41, N 4. P. 1286–1300.

Поступила в редакцию 15 января 2026 г.
После доработки 15 января 2026 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Иван Анатольевич Финогенко (ORCID 0000-0001-6821-3385)
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
`fin2709@mail.ru`