Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.9

ПРИНЦИП СУБОРДИНАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛФЕРА

В. Е. Федоров, А. С. Скорынин

Аннотация. Принцип субординации для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах означает, что порождение линейным оператором A сильно непрерывного разрешающего семейства операторов уравнения порядка влечет порождение им разрешающего семейства операторов уравнения меньшего порядка. Ранее такой принцип был доказан для уравнений с производной Герасимова — Капуто, в том числе распределенной, дискретно распределенной, для уравнений с производной Римана — Лиувилля. В данной работе доказан принцип субординации по порядку производной для уравнений с дробными производными Хилфера вне зависимости от типов этих производных. Получены достаточные условия выполнения обратного принципа субординации. Кроме того, доказан принцип субординации по типу производных Хилфера в уравнениях, порядки которых равны. Абстрактные результаты использованы при изучении начальных задач в пространстве равномерно непрерывных и ограниченных на прямой функций для уравнений с дифференциальным или разностным по пространственным переменным оператором A для доказательства существования и единственности их решения и получения вида решения.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.213

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Хилфера, разрешающее семейство операторов, принцип субординации, преобразование Лапласа, функция Райта, уравнение в частных производных.

Посвящается 70-летию
Геннадия Владимировича Демиденко

§ 1. Введение

Дробное интегро-дифференциальное исчисление в последние годы активно используется в задачах математического моделирования [1–3] и поэтому вызывает большой интерес у исследователей [4–6]. Его активно развивающимся направлением является теория разрешающих семейств операторов для уравнений с дробными производными в банаховых пространствах. Результаты этой теории позволяют с помощью операторов таких семейств получать представления решений начальных задач для линейных однородных и неоднородных уравнений, исследовать вопросы однозначной разрешимости начальных задач для квазилинейных уравнений методом сжимающих отображений, изучать различные аспекты качественного поведения решений. Абстрактные результаты для уравнений в банаховых или более общих локально выпуклых пространствах находят

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/ и Правительства Челябинской области.

свои многочисленные приложения при исследовании начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных [7–9]. Теория разрешающих семейств операторов является обобщением теории полугрупп операторов и теории операторных косинус-функций для уравнений первого и второго порядков соответственно на случай интегральных, интегро-дифференциальных уравнений и уравнений с дробными производными [10–13].

Разрешающее семейство дифференциального (интегро-дифференциального) уравнения в банаховом пространстве состоит из операторов $S(t)$, зависящих от параметра t, которые отображают начальные данные задачи в решение соответствующей начальной задачи в момент времени t. Ключевыми результатами о разрешающих семействах операторов уравнения в банаховом пространстве $\mathscr{Z}$

$$D^\alpha z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где D^α — некоторая дробная производная порядка α, являются теоремы об условиях на оператор A в терминах расположения его резольвентного множества и оценок на резольвенту, необходимых и достаточных для существования, к примеру, сильно непрерывного или аналитического в секторе, содержащем положительную полуось, разрешающего семейства $\{S(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$. Такие результаты для сильно непрерывных и аналитических разрешающих семейств операторов уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто получены в работах [12, 14] (см. также [15]), для уравнений с производной Римана — Лиувилля — в работах [16] (аналитический случай), [17, 18] (сильно непрерывный случай), для уравнений с производной Хилфера — в [19] (аналитический случай), в работе [20] (сильно непрерывный случай).

Принцип субординации для уравнений вида (1) означает, что существование сильно непрерывного разрешающего семейства операторов уравнения (1) при $\alpha = \alpha_1$ влечет существование разрешающего семейства уравнения (1) с тем же оператором A при $\alpha = \alpha_2 < \alpha_1$. Для таких уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто принцип субординации доказан в работах [12, 14, 21], для уравнений с производной Римана — Лиувилля — в [22], для различных уравнений с распределенной, в том числе дискретно, производной Герасимова — Капуто — в работах [23–25], для интегральных уравнений Вольтерры — в монографии [11]. Принцип субординации по двум параметрам α и γ в уравнениях вида $D^\alpha z(t) + (-A)^\gamma z(t) = 0$ изучен в работах [26, 27].

В данной работе исследуется принцип субординации для уравнений

$$D^{\alpha,\beta} z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $D^{\alpha,\beta}$ — производная Хилфера [28, с. 113] порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, и типа $\beta \in [0, 1]$, которая для достаточно гладкой функции z имеет вид $D^{\alpha,\beta} z(t) = J^{\beta(m-\alpha)} D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)} z(t)$, где J^δ — оператор дробного интегрирования Римана — Лиувилля порядка $\delta > 0$, D^m — оператор дифференцирования целого порядка m.

В § 2 введено определение регуляризованной производной Хилфера, приведены вспомогательные результаты, доказана новая теорема 3 о существовании сильно непрерывного разрешающего семейства операторов уравнения (2), используемая в дальнейших рассуждениях. В § 3 приведены формулировка и доказательство основного результата данной работы — теоремы о принципе субординации по параметру α вне зависимости от типов β_1 и β_2 производных Хилфера в двух рассматриваемых уравнениях. В § 4 найдены достаточные условия выполнения обратной теоремы о принципе субординации. В § 5 доказан принцип субординации по параметру β при равных значениях порядка $\alpha_1 = \alpha_2$ дробных производных Хилфера. Это обобщение полученного ранее в работе [22] результата о том, что всякий оператор A, порождающий сильно непрерывное разрешающее семейство уравнения (1) с производной Римана — Лиувилля, порождает и сильно непрерывное разрешающее семейство уравнения (1) с производной Герасимова — Капуто. В последнем параграфе полученные результаты используются для рассмотрения некоторых начальных задач для уравнений вида (2) с $\alpha < 1$ и дифференциальным по пространственной переменной или разностным оператором A в пространстве $\mathscr{X}$ равномерно непрерывных и ограниченных на прямой функций, порождающим сильно непрерывную разрешающую полугруппу уравнения (1) при $\alpha = 1$. С помощью теоремы о принципе субординации доказана однозначная разрешимость рассмотренных задач и получены представления их решений.

§ 2. Сильно непрерывные и аналитические разрешающие семейства операторов

Пусть $\mathscr{X}$ — банахово пространство, $h \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathscr{X})$. *Дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$ для функции h* называется

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s)\, ds, \quad t > 0.$$

Дробная производная Римана — Лиувилля порядка α имеет вид $D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha} h(t)$, где $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, D^m — оператор дифференцирования целого порядка m. При $\alpha > 0$ будем использовать обозначение $J^\alpha h(t) = D^{-\alpha} h(t)$.

Обозначим $D^\gamma h(0) := \lim\limits_{t\to 0+} D^\gamma h(t)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. *Производную Хилфера* порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{Z}$, и типа $\beta \in [0,1]$ определим как

$$\begin{aligned} D^{\alpha,\beta} h(t) &= D^{m-\beta(m-\alpha)} \left(J^{(1-\beta)(m-\alpha)} h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} h(0) \frac{t^k}{k!} \right) \\ &= D^m \left(J^{m-\alpha} h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} h(0) t^{k+\beta(m-\alpha)}}{\Gamma(k+\beta(m-\alpha)+1)} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Для достаточно гладкого h равенство (3) влечет стандартную форму производной Хилфера $D^{\alpha,\beta} h(t) = J^{\beta(m-\alpha)} D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)} h(t)$ [28, с. 113].

Замечание 1. Понятно, что при $\beta = 0$ дробная производная Хилфера совпадает с дробной производной Римана — Лиувилля, а при $\beta = 1$ — с дробной производной Герасимова — Капуто.

Замечание 2. При $\alpha = m$ имеем $D^{\alpha,\beta} = D^{m,\beta} = D^m$ при любом $\beta \in [0,1]$.

Преобразование Лапласа для функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{X}$ обозначим через $\widehat{h}$ или $\mathfrak{L}[h]$. Далее всюду будем использовать обозначение $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ и главную ветвь степенной функции комплексного переменного.

Лемма 1 [19]. *Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{X}$ имеет преобразование Лапласа, $J^{(1-\beta)(m-\alpha)} h \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{X})$. Тогда*

$$\mathfrak{L}[D^{\alpha,\beta} h](\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[h](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} h(0) \lambda^{m-1-k-\beta(m-\alpha)}.$$

Символом $\mathscr{L}(\mathscr{Z})$ будем обозначать банахово пространство всех линейных ограниченных операторов на пространстве $\mathscr{Z}$, а через $\mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathscr{Z}$ и действующих в это пространство. Снабдим область определения D_A оператора $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ нормой его графика $\|\cdot\|_{D_A} := \|\cdot\|_{\mathscr{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathscr{Z}}$ и получим тем самым банахово пространство D_A.

Через $AC^m(\mathbb{R}_+;\mathscr{Z})$ обозначим множество всех функций $h \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{Z})$, имеющих абсолютно непрерывную на каждом отрезке $[t_0,T] \subset \mathbb{R}_+$ производную порядка $m-1$.

Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_k, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{4}$$

для линейного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

где $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$. *Решением задачи* (4), (5) будем называть такую функцию $z \in C(\mathbb{R}_+;D_A) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathscr{Z})$, что $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{Z}) \cap AC^m(\mathbb{R}_+;\mathscr{Z})$, $D^{\alpha,\beta}z \in C(\mathbb{R}_+;\mathscr{Z})$, выполняются условия (4) и равенство (5) при $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$. Семейство операторов $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *разрешающим семейством типа* $\omega \ge 0$ *для уравнения* (5), если выполняются следующие условия:

(i) существует такое $K > 0$, что $\|S(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le Kt^{-(1-\beta)(m-\alpha)}e^{\omega t}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) $S(t)z_0 \in C(\mathbb{R}_+;\mathscr{Z})$, $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} J^{(1-\beta)(m-\alpha)}S(t) = I$ при любом $z_0 \in \mathscr{Z}$;

(iii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Az_0 = AS(t)z_0$ при всех $z_0 \in D_A$, $t \in \mathbb{R}_+$;

(iv) для любого $z_0 \in D_A$ функция $S(t)z_0$ является решением задачи типа Коши $D^{-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_0$, $D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = 0$, $k = 1,2,\dots,m-1$, для уравнения (5).

Нетрудно показать, что $\sum\limits_{k=0}^{m-1} J^kS(t)z_k$ при любых $z_0,z_1,\dots,z_{m-1} \in D_A$ является решением задачи (4), (5).

Замечание 3. Для $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$ разрешающее семейство операторов уравнения (5) имеет вид (см., например, [29])

$$S(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha l+(1-\beta)(\alpha-m)}A^l}{\Gamma(\alpha l + (1-\beta)(\alpha-m)+1)} = t^{(1-\beta)(\alpha-m)}E_{\alpha,(1-\beta)(\alpha-m)+1}(t^\alpha A),$$

$t \in \mathbb{R}_+$, где $E_{\alpha,\beta}(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$ — функция Миттаг-Леффлера.

При $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$ оператор $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ будем называть *оператором класса* $\mathscr{C}_{\alpha,\beta}(K,\omega)$ при $K>0$, $\omega \ge 0$, если выполняются следующие два условия:

(i) если $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, то $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})\}$;

(ii) при всех $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1})\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le \frac{K\Gamma((1-\beta)(\alpha-m)+n+1)}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{(1-\beta)(\alpha-m)+n+1}}.$$

Введем обозначения

$$\mathscr{C}_{\alpha,\beta}(\omega) := \bigcup_{K>0} \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(K,\omega), \quad \mathscr{C}_{\alpha,\beta} := \bigcup_{\omega\ge 0} \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(\omega).$$

Теорема 1 [20]. *Пусть $\beta \in [0,1]$, $\alpha > 2$. Тогда $\mathscr{C}_{\alpha,\beta} \subset \mathscr{L}(\mathscr{Z})$.*

Пусть $A \in \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$, $H_\beta(\lambda) := \lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$ для $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, при $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ определим операторы

$$\mathscr{S}_n(t) := e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n(n+\omega)t)^{k+1}}{k!(k+1)!} H_\beta^{(k)}(n+\omega).$$

Теорема 2 [20]. *Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$. Тогда существует разрешающее семейство операторов уравнения (5) типа $\omega \geq 0$ в том и только в том случае, когда $A \in \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$. При этом $S(t) = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}_n(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и существует преобразование Лапласа $\widehat{S}(\lambda) = \lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$ при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.*

Теорема 3. *Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$. Существует разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ типа $\omega \geq 0$ для уравнения (5), если и только если $\{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\mu > \omega\} \subset \rho(A)$ и имеется некоторое сильно непрерывное семейство операторов $\{S_0(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ такое, что*

$$\exists K > 0\, \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \|S_0(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq K t^{-(1-\beta)(m-\alpha)} e^{\omega t}$$

и

$$\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1} z_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_0(t) z_0\, dt$$

для всех $z_0 \in \mathscr{Z}$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. В таком случае $S(t) = S_0(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть существует семейство $\{S_0(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ операторов с соответствующими свойствами. Тогда

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1} z_0) = \int_0^\infty (-t)^n e^{-\lambda t} S_0(t) z_0\, dt, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}) \right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq K \int_0^\infty e^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)t} t^{n-(1-\beta)(m-\alpha)}\, dt$$
$$= \frac{K\Gamma((1-\beta)(\alpha-m)+n+1)}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{(1-\beta)(\alpha-m)+n+1}}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Следовательно, $A \in \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$ и по теореме 2 существует разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ типа $\omega \geq 0$, а его преобразование Лапласа имеет вид $\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$. Тогда равенство $S \equiv S_0$ следует из единственности обратного преобразования Лапласа.

Обратно, если существует разрешающее семейство $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ операторов, то можно взять $S_0 \equiv S$. $\square$

Обозначим $S_{\theta,\omega} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - \omega)| < \theta, \mu \neq \omega\}$ при $\theta \in [\pi/2, \pi]$, $\omega \geq 0$, $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi, t \neq 0\}$ при $\psi \in (0, \pi]$.

Разрешающее семейство операторов называется *аналитическим*, если оно аналитически продолжимо в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Аналитическое в Σ_{ψ_0} разрешающее семейство $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ имеет тип

(ψ_0, ω_0) при $\psi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $\omega_0 \geq 0$, если для любых $\psi \in (0, \psi_0)$, $\omega > \omega_0$ существует такое $C(\psi, \omega) > 0$, что при всех $t \in \Sigma_\psi$ справедливо неравенство $\|S(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq C(\psi, \omega) e^{\omega \operatorname{Re} t}$.

Следуя [12], рассмотрим класс $\mathscr{A}_\alpha(\theta_0, \omega_0)$ при некоторых $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\omega_0 \geq 0$ как множество всех операторов $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, для которых выполняются следующие условия:

(i) при любом $\lambda \in S_{\theta_0, \omega_0}$ выполняется $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) при любом $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \theta_0\right)$, $\omega > \omega_0$ существует такое $K(\theta, \omega) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta, \omega}$

$$\|(\lambda^\alpha - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq \frac{K(\theta, \omega)}{|\lambda|^\alpha}.$$

Теорема 4 [19]. *Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0, 1]$. Тогда уравнение* (5) *имеет аналитическое разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ типа $\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \omega_0\right)$, если и только если $A \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, \omega_0)$. При этом*

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{m-1-\beta(m-\alpha)} (\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu t} \, d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\Gamma = \{\delta e^{i\varphi} : \varphi \in (-\theta, \theta)\} \cup \{r e^{i\theta} : r \in [\delta, \infty)\} \cup \{r e^{-i\theta} : r \in [\delta, \infty)\}$ при некоторых $\delta > 0$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \theta_0\right)$.

Замечание 4. Из определения класса $\mathscr{A}_\alpha(\theta_0, \omega_0)$ и теоремы 4 следует, что существование аналитического разрешающего семейства уравнения (5) не зависит от типа $\beta \in [0, 1]$ производной Хилфера. Обозначим

$$\mathscr{A}_\alpha := \bigcup_{\substack{\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi], \\ \omega_0 \geq 0}} \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, \omega_0).$$

§ 3. Принцип субординации по порядку производной Хилфера

Пусть $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$. Рассмотрим два уравнения с одним и тем же оператором A

$$D^{\alpha_1, \beta_1} z(t) = A z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

$$D^{\alpha_2, \beta_2} z(t) = A z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

Найдем условия, при которых существование разрешающего семейства уравнения (6) влечет существование разрешающего семейства операторов для уравнения младшего порядка (7).

Разрешающее семейство для уравнения (6) и для уравнения (7) будем обозначать через $\{S_1(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\{S_2(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ соответственно.

Если $\alpha_1 > 2$, $A \in \mathscr{C}_{\alpha_1, \beta_1}$, то в силу теоремы 1 оператор A ограничен. А значит, с учетом замечания 3 $A \in \mathscr{C}_{\alpha_2, \beta_2}$. Поэтому будем рассматривать только случай $\alpha_1 \in (0, 2]$.

Возьмем $\gamma := \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in (0, 1)$, функция Райта имеет вид [30]

$$\Phi_{\gamma, \delta}(\lambda) := \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n! \Gamma(\delta - \gamma n)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R, \varepsilon}} \nu^{-\delta} e^{\nu - \lambda \nu^\gamma} \, d\nu, \quad \gamma \in (0, 1), \ \delta \in \mathbb{R},$$

где $\Gamma_{R,\varepsilon}=\{Re^{i\varphi}:\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right]\}\cup\{re^{i(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}:r\in(R,+\infty)\}\cup\{re^{-i(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}:r\in(R,+\infty)\}$ — контур Ганкеля, $R>0$, $\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$. Функция $\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda)$ целая.

Преобразование Меллина для функции $h:\mathbb{R}_+\to\mathscr{Z}$ имеет вид

$$\mathfrak{M}[h](\rho):=\int\limits_0^\infty t^{\rho-1}h(t)\,dt,$$

обратное преобразование Меллина есть

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\mathfrak{M}[h](\rho)t^{-\rho}\,d\rho,\quad d>0.$$

Введем обозначения для символов Похгаммера $(a)_0=1$, $(a)_1=a,\dots,$ $(a)_n=a(a+1)\dots(a+n-1)$ и для обобщенной функции Миттаг-Леффлера

$$E^\rho_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\rho)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{z^n}{n!},\quad \alpha,\beta,\rho\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}.$$

Теорема 5. *Пусть $m_1-1<\alpha_1\le m_1\in\{1,2\}$, $m_2-1<\alpha_2\le m_2\in\{1,2\}$, $\alpha_1>\alpha_2$, $\gamma=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\in(0,1)$, $\beta_1,\beta_2\in[0,1]$ и $A\in\mathscr{C}_{\alpha_1,\beta_1}$. Тогда $A\in\mathscr{A}_{\alpha_2}$, при этом порождаемое оператором A аналитическое разрешающее семейство операторов имеет вид*

$$S_2(t)z_0=t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\int\limits_0^\infty\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})S_1(s)z_0\,ds$$
$$=\frac{t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma}}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\frac{\Gamma(1-\sigma)t^{-\gamma\sigma}\mathfrak{M}[S_1(t)z_0](\sigma)\,d\sigma}{\Gamma(\gamma(1-\sigma)+\gamma\varsigma_1-\varsigma_2)},\quad z_0\in\mathscr{Z},$$

где $\varsigma_i:=m_i-1-\beta_i(m_i-\alpha_i)$, $i=1,2$, $d\in(0,1)$. Кроме того, если выполняется один из наборов соотношений: $m_1=m_2=1$, $-\gamma\beta_1(1-\alpha_1)+\beta_2(1-\alpha_2)\ge0$; $m_1=2$, $m_2=1$; $m_1=m_2=2$, $\gamma-1-\gamma\beta_1(2-\alpha_1)+\beta_2(2-\alpha_2)\ge0$, то для всех $t>0$

$$\|S_2(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\le K\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)t^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}\times\left|E^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1}_{\gamma,(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1}(\omega t^\gamma)\right|.\quad(8)$$

Доказательство. Известно асимптотическое представление функции Райта (см. [31, с. 238]), где $\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda)=W_{-\gamma,\delta}(-\lambda)$)

$$\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda)\sim C\lambda^{\frac{\frac12-\delta}{1-\gamma}}e^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}(\gamma\lambda)^{\frac{1}{1-\gamma}}},\quad|\lambda|\to\infty,\ |\arg\lambda|<\psi,\tag{9}$$

при $\psi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Так как $\frac{1}{1-\gamma}>1$, при $t\in\Sigma_{\psi_1}$, где $\psi_1:=\min\left\{\psi,\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\right\}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, имеем

$$\left\|\int\limits_0^\infty s^\beta\Phi_{\gamma,\delta}(st^{-\gamma})S_1(s)\,ds\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\le K\int\limits_0^\infty s^{\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}|\Phi_{\gamma,\delta}(st^{-\gamma})|e^{\omega s}\,ds$$

$$= K|t|^{\gamma(\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)} \int\limits_0^\infty r^{\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)} |\Phi_{\gamma,\delta}(re^{-i\gamma \arg t})| e^{\omega r|t|^\gamma}\, dr$$

$$\leq C_1|t|^{\gamma(\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)} \int\limits_0^\infty r^{\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)} r^{\frac{\frac{1}{2}-\delta}{1-\gamma}} e^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}(\gamma r)^{\frac{1}{1-\gamma}}\cos\psi_1} e^{\omega r|t|^\gamma}\, dr$$

$$= C_2|t|^{\gamma(\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)} \int\limits_0^\infty u^{\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+\frac{\frac{1}{2}-\delta}{1-\gamma}} e^{-u^{\frac{1}{1-\gamma}}} e^{\frac{\omega u|t|^\gamma}{(1-\gamma)^{1-\gamma}\gamma^\gamma \cos^{1-\gamma}\psi_1}}\, du$$

$$\leq C_3|t|^{\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+\gamma-\delta} \exp\left(\frac{C_4(\gamma)\omega^{1/\gamma}|t|}{\cos^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\psi_1}\right), \quad (10)$$

так как при $q > 1$ (см. [32, с. 141])

$$\int\limits_0^\infty s^p e^{ys-s^q}\, ds \sim C y^{\frac{2p-q+2}{2q-2}} e^{a(q)y^{\frac{q}{q-1}}}, \quad y \to +\infty.$$

Возьмем $\mu = \lambda^\gamma$, тогда

$$\lambda^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\widehat{S_1}(\lambda^\gamma) = \mu^{\frac{\varsigma_2}{\gamma}-\varsigma_1}\widehat{S_1}(\mu) = \mu^{\frac{\varsigma_2}{\gamma}}(\mu^{\alpha_1}-A)^{-1} = \lambda^{\varsigma_2}(\lambda^{\alpha_2}-A)^{-1} = \widehat{S_2}(\lambda).$$

Для достаточно большого $R > 0$ и $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\pi}{2\gamma} - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right\}$ получим $\operatorname{Re}\lambda^\gamma > 0$ при любом $\lambda \in \Gamma_{R,\varepsilon}$. Поэтому для всех $t \in \Sigma_{\min\{\psi, \frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\}}$, $z_0 \in \mathscr{Z}$

$$S_2(t)z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\omega^{1/\gamma}+\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\widehat{S_1}(\lambda^\gamma)e^{\lambda t} z_0\, d\lambda$$

$$= \frac{t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}}{2\pi i} \int\limits_{t\cdot(\omega^{1/\gamma}+\Gamma_{R,\varepsilon})} \nu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1} e^\nu \int\limits_0^\infty S_1(s)z_0 e^{-\nu^\gamma s t^{-\gamma}}\, ds d\nu$$

$$= t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1} \int\limits_0^\infty \Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma}) S_1(s)z_0\, ds.$$

Таким образом, обозначим для $z_0 \in \mathscr{Z}$

$$S_2(t)z_0 := t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1} \int\limits_0^\infty \Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma}) S_1(s)z_0\, ds.$$

Имеем

$$\lim_{t\to 0+} J^{(1-\beta_2)(m_2-\alpha_2)} S_2(t)z_0$$

$$= \lim_{t\to 0+} J^{(1-\beta_2)(m_2-\alpha_2)} \left[t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma} \int\limits_0^\infty \Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(r) S_1(rt^\gamma)z_0\, dr\right]$$

$$= \lim_{t\to 0+} \int\limits_0^\infty J^{(1-\beta_2)(m_2-\alpha_2)} \Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(r)$$

$$\times\left[t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma}\left(\frac{r^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}t^{\gamma(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}}{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}+o(t^{\gamma(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)})\right)\right]z_0\,dr$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\Gamma(\gamma\alpha_1-m_2+\beta_2(m_2-\alpha_2)+1)}{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}\int\limits_0^\infty(r^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}+o(1))\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(r)z_0\,dr$$

$$=\frac{\Gamma((1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1)}{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\nu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{\nu-r\nu^\gamma}\,d\nu r^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}z_0\,dr$$

$$=\frac{\Gamma((1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1)}{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\int\limits_0^\infty r^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}e^{-r\nu^\gamma}\,dr\nu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{\nu}z_0\,d\nu$$

$$=\frac{\Gamma((1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\frac{\nu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{\nu}z_0\,d\nu}{\nu^{\gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}}=z_0$$

в силу формулы Ганкеля.

Далее,

$$t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t^{-1}\cdot\Gamma_{R,\varepsilon}}\lambda^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{t\lambda-s\lambda^\gamma}\,d\lambda,$$

поэтому для $s>0$, $\operatorname{Re}\mu>0$, $\varepsilon\in\left(0,\min\left\{\frac{\pi}{2\gamma}-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right\}\right)$ и $R\in(0,|\mu|)$

$$\mathfrak{L}[t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})](\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t^{-1}\cdot\Gamma_{R,\varepsilon}}\lambda^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{-s\lambda^\gamma}\int\limits_0^\infty e^{t\lambda-\mu t}\,dtd\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t^{-1}\cdot\Gamma_{R,\varepsilon}}\lambda^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\frac{e^{-s\lambda^\gamma}}{\mu-\lambda}\,d\lambda=\mu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{-s\mu^\gamma},$$

где $\mathfrak{L}$ — преобразование Лапласа по переменной t. При этом мы учитываем, что контур $t^{-1}\cdot\Gamma_{R,\varepsilon}$ обходит точку μ в отрицательном направлении и $-s\operatorname{Re}\lambda^\gamma=-s|\lambda|^\gamma\cos(\gamma\arg\lambda)<0$ для всех $\lambda\in t^{-1}\cdot\Gamma_{R,\varepsilon}$ в силу выбора параметра ε. По теореме Фубини при любом $z_0\in\mathscr{Z}$

$$\mathfrak{L}[S_2(t)z_0](\mu)=\int\limits_0^\infty\mathfrak{L}[t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})](\mu)S_1(s)z_0\,ds$$

$$=\mu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\int\limits_0^\infty e^{-s\mu^\gamma}S_1(s)z_0\,ds=\mu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\mathfrak{L}[S_1(t)z_0](\mu^\gamma)$$

$$=\mu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\mu^{\gamma\varsigma_1}(\mu^{\alpha_2}-A)^{-1}z_0=\mu^{\varsigma_2}(\mu^{\alpha_2}-A)^{-1}z_0.$$

В силу теоремы 3 получаем первое из требуемых равенств.

Для функции Райта известны равенства $D^n\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda)=(-1)^n\Phi_{\gamma,\delta-\gamma n}(\lambda)$, $n\in\mathbb{N}$. Поэтому при $s>0$, $t\in\Sigma_{\min\{\psi,\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\}}$

$$D^1(t^\beta\Phi_{\gamma,\delta}(st^{-\gamma}))=\beta t^{\beta-1}\Phi_{\gamma,\delta}(st^{-\gamma})+s\gamma t^{\beta-1-\gamma}\Phi_{\gamma,\delta-\gamma}(st^{-\gamma}).$$

Параметр $\delta(\beta_1,\beta_2):=\gamma\varsigma_1-\varsigma_2$ является линейной функцией по переменным $(\beta_1,\beta_2)\in[0,1]\times[0,1]$, поэтому экстремальные значения может принимать только в углах квадрата $[0,1]\times[0,1]$, т. е. в точках (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Имеем

$\delta(0,0)=\gamma(m_1-1)-m_2+1$. Возможны три случая различных значений пары m_1, m_2. Если $m_1=m_2=1$, то $\delta(0,0)=0$; если $m_1=2$, $m_2=1$, то $\delta(0,0)=\gamma\in(0,1)$; если $m_1=m_2=2$, то $\delta(0,0)=\gamma-1\in(-1,0)$. Далее рассматриваем значение $\delta(0,1)=\gamma(m_1-1)-m_2+1+m_2-\alpha_2=\gamma(m_1-1)+1-\alpha_2$. Если $m_1=1$, то $\delta(0,1)=1-\alpha_2\in(0,1)$; если $m_1=2$, то $\delta(0,1)=\gamma+1-\alpha_2=\alpha_2(\alpha_1^{-1}-1)+1\in(0,1)$, поскольку при этом $\alpha_2\in(0,2)$, $\alpha_1\in(1,2]$, $\alpha_1^{-1}-1\in[-\frac{1}{2},0)$, $\alpha_2(\alpha_1^{-1}-1)\in(-1,0)$. Для $\delta(1,0)=\gamma(\alpha_1-1)-m_2+1$ имеем: $\delta(1,0)=\gamma(\alpha_1-1)\in(-1,1)$ при $m_2=1$, $\delta(1,0)=\gamma(\alpha_1-1)-1\in(-1,0)$ при $m_2=2$, так как в этом случае $\alpha_1\in(1,2]$. Наконец, $\delta(1,1)=\gamma(\alpha_1-1)-\alpha_2+1=1-\gamma\in(0,1)$. Таким образом, при всех значениях $(\beta_1,\beta_2)\in[0,1]\times[0,1]$ имеем $|\delta(\beta_1,\beta_2)|<1$. Следовательно, при $t\in\Sigma_{\min\{\psi,\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\}}$

$$D^1S_2(t)z_0=(\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1)t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-2}\int\limits_0^\infty\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})S_1(s)z_0\,ds$$
$$+\gamma t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-\gamma-2}\int\limits_0^\infty s\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-\gamma}(st^{-\gamma})S_1(s)z_0\,ds.$$

При этом принимается во внимание, что полученный интеграл сходится равномерно по t на компактных подмножествах сектора $\Sigma_{\min\{\psi,\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\}}$. Таким образом, семейство операторов $S_2(t)$ аналитично в секторе Σ_{ψ_1}. При малых по модулю $t\in\Sigma_{\min\left\{\psi,\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\right\}}$ имеем

$$\|S_2(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\leq|t|^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma}\int\limits_0^\infty|\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(r)|\|S_1(rt^\gamma)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\,dr$$
$$\leq C_1|t|^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma+\gamma(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}\int\limits_0^\infty r^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}|\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(r)|\,dr$$
$$=C_2|t|^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}$$

в силу соотношения (9), аналитичности Φ в $\mathbb{C}$ и включения $(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)\in(-1,0]$. С учетом (10) отсюда получаем, что при всех $t\in\Sigma_{\min\left\{\psi,\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\right\}}$

$$\|S_2(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\leq C_3|t|^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}\exp\left(\frac{C_4(\gamma)\omega^{1/\gamma}|t|}{\cos^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\psi_1}\right)$$
$$\leq C_3|t|^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}e^{C_5(\gamma,\psi_1)\,\mathrm{Re}\,t}.$$

Поэтому $\{S_2(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{Z}):t\in\mathbb{R}_+\}$ — аналитическое в секторе Σ_{ψ_1} разрешающее семейство операторов типа $(\psi_1,C_5(\gamma,\psi_1))$. По теореме 4 $A\in\mathscr{A}_{\alpha_2}(\psi_1+\frac{\pi}{2},C_5(\gamma,\psi_1))$.

Преобразование Меллина функции Райта, как известно, имеет вид

$$\mathfrak{M}[\Phi_{\gamma,\delta}](\rho)=\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma\rho+\delta)},\quad \mathrm{Re}\,\rho>0,$$

поэтому при $d\in(0,1)$ по формуле обратного преобразования Меллина

$$\Phi_{\gamma,\delta}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma\rho+\delta)}t^{-\rho}\,d\rho.$$

А значит, для любого $z_0 \in \mathscr{Z}$

$$S_2(t)z_0 = t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\int\limits_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\frac{\Gamma(\rho)s^{-\rho}t^{\gamma\rho}d\rho}{\Gamma(\gamma\rho+\gamma\varsigma_1-\varsigma_2)}S_1(s)z_0\,ds$$
$$= t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\frac{\Gamma(\rho)t^{\gamma\rho}}{\Gamma(\gamma\rho+\gamma\varsigma_1-\varsigma_2)}\int\limits_0^\infty s^{-\rho}S_1(s)z_0\,dsd\rho$$
$$= t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-d-i\infty}^{1-d+i\infty}\frac{\Gamma(1-\sigma)t^{-\gamma\sigma}}{\Gamma(\gamma(1-\sigma)+\gamma\varsigma_1-\varsigma_2)}\int\limits_0^\infty s^{\sigma-1}S_1(s)z_0\,dsd\sigma.$$

Отсюда сразу следует второе представление $S_2(t)$ из формулировки теоремы.

В [30, формула (2.2.77)] показано, что

$$\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda) = \frac{1}{\pi(1-\gamma)}\int\limits_0^\pi r(\varphi)^{1-\delta}\left(\frac{\gamma\sin((1-\gamma-\delta)\varphi)}{\sin(\gamma\varphi)}+\frac{\sin(\delta\varphi)}{\sin\varphi}\right)e^{-\lambda r(\varphi)^\gamma k(\varphi)}\,d\varphi$$

при некоторых неотрицательных функциях $r(\varphi)$ и $k(\varphi)$. Пусть выполняется один из наборов соотношений: $m_1 = m_2 = 1$, $\delta := \gamma\varsigma_1-\varsigma_2 = -\gamma\beta_1(1-\alpha_1)+\beta_2(1-\alpha_2) \geq 0$; $m_1 = 2, m_2 = 1$, тогда $\delta := \gamma\varsigma_1-\varsigma_2 = \gamma-\gamma\beta_1(2-\alpha_1)+\beta_2(1-\alpha_2) \geq 0$; $m_1 = m_2 = 2$, $\delta := \gamma\varsigma_1-\varsigma_2 = \gamma-1-\gamma\beta_1(2-\alpha_1)+\beta_2(2-\alpha_2) \geq 0$. В силу [30, лемма 2.2.4] $\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$ и для $t > 0$

$$\|S_2(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq Kt^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\int\limits_0^\infty |\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})|s^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}e^{\omega s}\,ds$$
$$= Kt^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\nu^{-\gamma\varsigma_1+\varsigma_2}e^{\nu-st^{-\gamma}\nu^\gamma}\,d\nu s^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}e^{\omega s}\,ds\right|$$
$$= Kt^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\frac{1}{2\pi i}\left|\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\int\limits_0^\infty s^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}e^{s(\omega-t^{-\gamma}\nu^\gamma)}ds\nu^{-\gamma\varsigma_1+\varsigma_2}e^\nu\,d\nu\right|$$
$$= Kt^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\left|\frac{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\frac{\nu^{-\gamma\varsigma_1+\varsigma_2}e^\nu\,d\nu}{(t^{-\gamma}\nu^\gamma-\omega)^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1}}\right|$$
$$= K\left|\frac{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)t^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\frac{\nu^{-(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)-1}e^\nu\,d\nu}{(1-t^\gamma\nu^{-\gamma}\omega)^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1}}\right|$$
$$= K\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)t^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}$$
$$\times\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty\frac{\omega^nt^{\gamma n}}{n!}((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)_n\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\nu^{-(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)-1-\gamma n}e^\nu\,d\nu\right|$$
$$= K\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)t^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}\left|\sum_{n=0}^\infty\frac{((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)_n\omega^nt^{\gamma n}}{n!\Gamma((1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1+\gamma n)}\right|.$$

Теорема доказана.

Замечание 5. Утверждение теоремы 5 при $\beta_1 = \beta_2 = 1$, т. е. для уравнений с производными Герасимова — Капуто разных порядков, ранее доказано в работе [12].

Замечание 6. Утверждение теоремы 5 при $\beta_1 = \beta_2 = 0$, т. е. для уравнений с производными Римана — Лиувилля разных порядков, ранее доказано в работе [22].

§ 4. Обращение принципа субординации по порядку производной

Пусть $A \in \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(0)$, $0 \in \rho(A)$. Тогда при $\operatorname{Re}\sigma \in (m-\beta(m-\alpha)-\alpha, m-\beta(m-\alpha))$ можно определить дробные степени оператора $-A$:

$$(-A)^{-\sigma} := \frac{\sin \pi\sigma}{\pi} \int\limits_0^\infty s^{m-1-\beta(m-\alpha)-\sigma}(s^\alpha I - A)^{-1}\, ds.$$

Теорема 6. *Пусть* $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [0,1]$, $A \in \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(0)$, $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ — *сильно непрерывное разрешающее семейство операторов для уравнения* $D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t)$, $0 \in \rho(A)$,

$$\exists K > 0 \; \exists \delta > m - \beta(m-\alpha) - \alpha \; \forall t \geq 0 \quad \|S(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq \frac{K}{1+t^\delta}. \tag{11}$$

Тогда при $\operatorname{Re}\sigma \in (m - \beta(m-\alpha) - \alpha, \min\{1, \delta, m - \beta(m-\alpha)\})$

$$(-A)^{-\sigma} = \frac{\mathfrak{M}[S](\sigma)}{\Gamma(\sigma)}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы

$$\left\| \int\limits_0^\infty t^{\sigma-1} S(t) dt \right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq K \int\limits_0^\infty \frac{t^{\operatorname{Re}\sigma - 1}\, dt}{1+t^\delta} < \infty,$$

так как $m - \beta(m-\alpha) - \alpha = (1-\beta)(m-\alpha) \in [0,1)$, $\operatorname{Re}\sigma \in (m-\beta(m-\alpha)-\alpha, \delta)$. Согласно теореме 2 и в силу включения $\operatorname{Re}\sigma \in (m - \beta(m-\alpha) - \alpha, \min\{1, m - \beta(m-\alpha)\})$ имеем

$$(-A)^{-\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)} \int\limits_0^\infty s^{-\sigma} \int\limits_0^\infty e^{-st} S(t)\, dt ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int\limits_0^\infty S(t) \int\limits_0^\infty \frac{e^{-st}s^{-\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)} ds dt = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int\limits_0^\infty t^{\sigma-1} S(t)\, dt.$$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [0,1]$, $A \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, 0)$ *при некотором* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $0 \in \rho(A)$, $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ — *аналитическое разрешающее семейство операторов для уравнения* $D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t)$, *удовлетворяющее условию* (11). *Тогда при* $\operatorname{Re}\sigma \in (m - \beta(m-\alpha) - \alpha, \min\{1, \delta, m - \beta(m-\alpha)\})$

$\forall \theta \in (\pi/2, \theta_0)\, \forall \omega > 0 \exists C(\theta, \omega) > 0$

$$\|(-A)^{-\sigma}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq C(\theta,\omega) e^{(\pi-\theta)|\operatorname{Im}\sigma|} \int\limits_0^\infty \frac{y^{-\operatorname{Re}\sigma}\, dy}{1 + y^{(1-\beta)(\alpha-m)+1}}.$$

Доказательство. Из теорем 4 и 6 следует, что при $\operatorname{Re}\sigma \in (m-\beta(m-\alpha)-\alpha, \min\{1,\delta, m-\beta(m-\alpha)\})$

$$(-A)^{-\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int\limits_0^\infty t^{\sigma-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\mu^\alpha I - A)^{-1}e^{\mu t}\,d\mu dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\mu^{m-1-\beta(m-\alpha)}}{(-\mu)^\sigma}(\mu^\alpha I - A)^{-1}\,d\mu,$$

поэтому при $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$, $\omega > 0$

$$\|(-A)^{-\sigma}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le \frac{K(\theta,\omega)}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{|d\mu|}{|\operatorname{Re}\mu - \omega|^{(1-\beta)(\alpha-m)+1}|(-\mu)^\sigma|}$$

$$\le C(\theta,\omega)e^{(\pi-\theta)|\operatorname{Im}\sigma|}\int\limits_0^\infty \frac{y^{-\operatorname{Re}\sigma}\,dy}{1+y^{(1-\beta)(\alpha-m)+1}} < \infty,$$

так как $0 \le (1-\beta)(m-\alpha) < \operatorname{Re}\sigma < 1$. $\square$

Как и прежде, будем использовать обозначения $\varsigma_i := m_i - 1 - \beta_i(m_i - \alpha_i)$, $i = 1, 2$.

Теорема 7. *Пусть $m_1 - 1 < \alpha_1 \le m_1 \in \{1,2\}$, $m_2 - 1 < \alpha_2 \le m_2 \in \{1,2\}$, $\alpha_1 > \alpha_2$, $\gamma = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in (0,1)$, $\beta_1, \beta_2 \in [0,1]$, $A \in \mathscr{A}_{\alpha_2}(\theta_0, 0)$ при некотором $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2\gamma}, \pi)$, $0 \in \rho(A)$, $\{S_2(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ удовлетворяет условию (11) при $\delta > m_2 - \beta_2(m_2-\alpha_2) - \alpha_2$,*

$$\max\{m_2 - \beta_2(m_2-\alpha_2) - \alpha_2, \gamma\varsigma_1 - \varsigma_2 + 1\} < \min\{1, \delta, m_2 - \beta_2(m_2-\alpha_2)\}.$$

Тогда $A \in \mathscr{C}_{\alpha_1,\beta_1}(0)$ и при $z_0 \in \mathscr{Z}$ и

$$d \in (\max\{m_2 - \beta_2(m_2-\alpha_2) - \alpha_2, \gamma\varsigma_1 - \varsigma_2 + 1\}, \min\{1, \delta, m_2 - \beta_2(m_2-\alpha_2)\})$$

будет

$$S_1(t)z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1-1}}{\Gamma\big(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1\big)}(-A)^{-\sigma}z_0\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(1-\sigma)t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1-1}}{\Gamma\big(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1\big)}\mathfrak{M}[S_2(t)z_0](\sigma)\,d\sigma, \quad t > 0.$$

Доказательство. Для $\sigma = d + i\eta$, $\eta \in \mathbb{R}$ согласно (3.25) в [12] при $|\eta| \to \infty$ имеем

$$\Gamma(\sigma) = \sqrt{2\pi}|\eta|^{d-1/2}e^{-\frac{\pi}{2}|\eta|}(1+O(1/\eta)), \tag{12}$$

$$\frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1)} = \sqrt{2\pi}|\eta|^{-\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-d+1)+\varsigma_1+\frac{1}{2}}e^{-(1-\frac{1}{2\gamma})\pi|\eta|}(1+O(1/\eta)).$$

Согласно лемме 2 при $\operatorname{Re}\sigma = d \in (m_2 - \beta_2(m_2-\alpha_2) - \alpha_2, \min\{1, \delta, m_2 - \beta_2(m_2-\alpha_2)\})$, $\theta \in (\frac{\pi}{2\gamma}, \theta_0)$, $\omega > 0$

$$\|(-A)^{-\sigma}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le C(\theta,\omega)e^{(\pi-\theta)|\eta|}\int\limits_0^\infty \frac{y^{-\operatorname{Re}\sigma}\,dy}{1+y^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1}},$$

$$\left\| \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1-1}}{\Gamma\big(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1\big)}(-A)^{-\sigma}\,d\sigma \right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}$$
$$\leq C_1 t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-d+1)-\varsigma_1-1} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\eta|)^{-\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-d+1)+\varsigma_1+\frac{1}{2}} e^{(\frac{\pi}{2\gamma}-\theta)|\eta|}\,d\eta \int_0^{\infty} \frac{y^{-d}\,dy}{1+y^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1}}$$
$$= C_2 t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-d+1)-\varsigma_1-1} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\eta|)^{-\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-d+1)+\varsigma_1+\frac{1}{2}} e^{(\frac{\pi}{2\gamma}-\theta)|\eta|}\,d\eta.$$

Последний интеграл сходится при всех $t>0$. С учетом теоремы 6 оператор-функция

$$S(t)z_0 := \frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(1-\sigma)t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1-1}}{\Gamma\big(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1\big)}\mathfrak{M}[S_2(t)z_0](\sigma)\,d\sigma$$

определена при $t>0$. Заметим, что условие данной теоремы $d>\gamma\varsigma_1-\varsigma_2+1$ влечет неравенство $\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2+\operatorname{Re}\sigma-1)-\varsigma_1>0$.

Поскольку $\mathfrak{M}[e^{-t}](\rho)=\Gamma(\rho)$, то при $d\in(0,1)$, $t>0$

$$e^{-t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-d-i\infty}^{1-d+i\infty} \Gamma(\rho)t^{-\rho}\,d\rho = \frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \Gamma(1-\sigma)t^{\sigma-1}\,d\sigma. \tag{13}$$

В силу (12) последний интеграл сходится и бесконечно дифференцируем по параметру при всех $t\in\Sigma_\pi$, поэтому по теореме о единственности аналитической функции равенство (13) выполняется на Σ_π. Следовательно, при $\operatorname{Re}\lambda>0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}S(t)z_0\,dt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(1-\sigma)t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1-1}}{\Gamma\big(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1\big)}\int_0^{\infty} s^{\sigma-1}S_2(s)z_0\,ds d\sigma dt$$
$$= \lambda^{\varsigma_1-\frac{1}{\gamma}\varsigma_2}\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty}\Gamma(1-\sigma)(\lambda^{\frac{1}{\gamma}}s)^{\sigma-1}\,d\sigma S_2(s)z_0\,ds$$
$$= \lambda^{\varsigma_1-\frac{1}{\gamma}\varsigma_2}\int_0^{\infty} e^{-s\lambda^{\frac{1}{\gamma}}}S_2(s)z_0\,ds = \lambda^{\varsigma_1-\frac{1}{\gamma}\varsigma_2}\lambda^{\frac{1}{\gamma}\varsigma_2}(\lambda^{\frac{\alpha_2}{\gamma}}I-A)^{-1} = \lambda^{\varsigma_1}(\lambda^{\alpha_1}I-A)^{-1}.$$

Поэтому по теореме 3 $S(t)\equiv S_1(t)$.

§ 5. Принцип субординации по типу производной Хилфера

В [17] было напрямую доказано, что $\mathscr{C}_{\alpha,0}(\omega)\subset\mathscr{C}_{\alpha,1}(\omega)$ при $\alpha\in(0,1)$, в [18, лемма 2.1] этот результат был распространен на случай любого $\alpha>0$.

Используя подход, аналогичный доказательству теоремы 5, покажем, что $\mathscr{C}_{\alpha,\beta_1}(\omega)\subset\mathscr{C}_{\alpha,\beta_2}(\omega)$ при $0\leq\beta_1<\beta_2\leq1$.

Будем, как и в предыдущем параграфе, обозначать разрешающее семейство операторов уравнения $D^{\alpha,\beta_i}z(t)=Az(t)$ через $\{S_i(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{Z}):t\in\mathbb{R}_+\}$, $i=1,2$.

Теорема 8. *Пусть* $m-1<\alpha\leq m\in\{1,2\}$, $0\leq\beta_1<\beta_2\leq 1$, $\omega\geq 0$, $A\in\mathscr{C}_{\alpha,\beta_1}(\omega)$. *Тогда* $A\in\mathscr{C}_{\alpha,\beta_2}(\omega)$ *и* $S_2(t)=J^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)}S_1(t)$.

Доказательство. При $\operatorname{Re}\lambda>\omega$ имеем

$$\lambda^{(\beta_1-\beta_2)(m-\alpha)}\widehat{S}_1(\lambda)=\lambda^{m-1-\beta_2(m-\alpha)}(\lambda^\alpha-A)^{-1},$$

поэтому для $c>\omega$ и всех $t>0$, $z_0\in\mathscr{Z}$ определим

$$\begin{aligned}S_2(t)z_0 :&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\lambda^{(\beta_1-\beta_2)(m-\alpha)}\widehat{S}_1(\lambda)e^{\lambda t}z_0\,d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\lambda^{(\beta_1-\beta_2)(m-\alpha)}e^{\lambda t}\int\limits_0^\infty S_1(s)z_0e^{-\lambda s}\,dsd\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty S_1(s)z_0\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\lambda^{(\beta_1-\beta_2)(m-\alpha)}e^{\lambda(t-s)}\,d\lambda ds\\ &= \int\limits_0^t\frac{(t-s)^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)-1}}{\Gamma((\beta_2-\beta_1)(m-\alpha))}S_1(s)z_0\,ds=J^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)}S_1(t).\end{aligned}$$

Тогда при $t>0$ имеем

$$\begin{aligned}\|S_2(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} &\leq \int\limits_0^t\frac{(t-s)^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)-1}}{\Gamma((\beta_2-\beta_1)(m-\alpha))}\|S_1(s)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\,ds\\ &\leq Ke^{\omega t}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)-1}}{\Gamma((\beta_2-\beta_1)(m-\alpha))}s^{-(1-\beta_1)(m-\alpha)}\,ds\\ &= Kt^{-(1-\beta_2)(m-\alpha)}e^{\omega t}\frac{B((\beta_2-\beta_1)(m-\alpha),1-(1-\beta_1)(m-\alpha))}{\Gamma((\beta_2-\beta_1)(m-\alpha))}\\ &= \frac{K\Gamma(1-(1-\beta_1)(m-\alpha))t^{-(1-\beta_2)(m-\alpha)}e^{\omega t}}{\Gamma(1-(1-\beta_2)(m-\alpha))}.\end{aligned}$$

По теореме 3 отсюда следует, что $A\in\mathscr{C}_{\alpha,\beta_2}(\omega)$ и $\{S_2(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{Z}):t\geq 0\}$ — разрешающее семейство операторов уравнения $D^{\alpha,\beta_2}z(t)=Az(t)$.

Замечание 7. Утверждение теоремы 8 при $\beta_1=0$, $\beta_2=1$, т. е. для уравнений с производной Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто соответственно, ранее доказано в работе [22].

Замечание 8. Обратное вложение $\mathscr{C}_{\alpha,\beta_2}(\omega)\subset\mathscr{C}_{\alpha,\beta_1}(\omega)$ при $0\leq\beta_1<\beta_2\leq 1$, вообще говоря, не выполняется. В частности, в [18] показано, что при $\alpha\in(0,1)$ оператор $A\{z_n\}=\{ne^{i\pi\alpha/2}z_n\}$ с областью определения $D_A=\{\{z_n\}\in l_1:\{nz_n\}\in l_1\}$ в пространстве последовательностей l_1 принадлежит классу $\mathscr{C}_{\alpha,1}(0)$, но не лежит в $\mathscr{C}_{\alpha,0}(0)$.

Однако в случае аналитического разрешающего семейства $\{S_2(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{Z}):t>0\}$ оператор A лежит в классе $\mathscr{A}_\alpha(\theta_0,\omega)$, который не зависит от параметра β_2. Поэтому A порождает и аналитическое разрешающее семейство $\{S_1(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{Z}):t\geq 0\}$, операторы которого в силу аналитичности по t и теоремы 8 имеют вид $S_1(t)=D^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)}S_2(t)$ при $t>0$.

§ 6. Примеры

При $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in [0, 1]$ рассмотрим задачу типа Коши

$$D_t^{\alpha,\beta} v(\xi, t) = \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{14}$$

$$J_t^{(1-\beta)(1-\alpha)} v(\xi, 0) = v_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

где нижний индекс t обозначает переменную, по которой вычисляется дробная производная или дробный интеграл. Выберем пространство $\mathscr{Z} = C(\mathbb{R})$ ограниченных и равномерно непрерывных функций на $\mathbb{R}$. В таком пространстве оператор $A_1 = D_\xi^1 = \frac{\partial}{\partial \xi}$ с областью определения $D_{A_1} = \{w \in C(\mathbb{R}) : D_\xi^1 w \in C(\mathbb{R})\}$ является генератором сжимающей полугруппы операторов сдвига $S_1(t)v_0(\xi) = v_0(\xi + t)$ класса (C_0) [7, с. 325], т. е. $A_1 \in \mathscr{C}_{1,\delta}(0)$ при любом $\delta \in [0, 1]$. По теореме 5 для $\alpha < 1$ будет $A_1 \in \mathscr{A}_\alpha$, а значит, при любом $v_0 \in D_{A_1}$ существует единственное решение задачи (14), (15), при этом оно имеет вид

$$v(\xi, t) = S_2(t)v_0(\xi) = t^{\beta(1-\alpha)-1} \int_0^\infty \Phi_{\alpha,\beta(1-\alpha)}(st^{-\alpha}) v_0(\xi + s)\, ds, \tag{16}$$

так как в данном случае $\varsigma_1 = 0$, $\varsigma_2 = -\beta(1-\alpha)$, $\gamma = \alpha$.

Для уравнения

$$D_t^{\alpha,\beta} v(\xi, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{17}$$

возьмем то же пространство $\mathscr{Z} = C(\mathbb{R})$ и оператор $A_2 = \frac{1}{2} D_\xi^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ с областью определения $D_{A_2} = \{w \in C(\mathbb{R}) : D_\xi^2 w \in C(\mathbb{R})\}$. Поскольку оператор A_2 порождает сжимающую (C_0)-непрерывную полугруппу операторов [7, с. 335]

$$S_1(t)v_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(\xi - r)^2}{2t}} v_0(r)\, dr, \quad t > 0,$$

по теореме 5 $A_2 \in \mathscr{A}_\alpha$. Следовательно, при любом $v_0 \in D_{A_2}$ существует единственное решение задачи (15), (17), при этом оно имеет вид

$$v(\xi, t) = \frac{t^{\beta(1-\alpha)-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} \Phi_{\alpha,\beta(1-\alpha)}(st^{-\alpha}) \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(\xi - r)^2}{2s}} v_0(r)\, drds. \tag{18}$$

При $\lambda, \mu > 0$ рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$D_t^{\alpha,\beta} v(\xi, t) = \lambda(v(\xi - \mu, t) - v(\xi, t)), \quad (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \tag{19}$$

В пространстве $\mathscr{Z} = C(\mathbb{R})$ зададим оператор $A_3 w(\xi) = \lambda(w(\xi - \mu) - w(\xi))$ с областью определения $D_{A_3} = \{w \in C(\mathbb{R}) : w(\xi - \mu) - w(\xi) \in C(\mathbb{R})\}$, порождающий [7, с. 337] сжимающую (C_0)-непрерывную полугруппу операторов

$$S_1(t)v_0(\xi) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k t^k}{k!} v_0(\xi - k\mu), \quad t > 0.$$

Следовательно, $A_3 \in \mathscr{A}_\alpha$ и при любом $v_0 \in D_{A_3}$ существует единственное решение задачи (15), (19), при этом оно имеет вид

$$v(\xi, t) = t^{\beta(1-\alpha)-1} \int_0^\infty \Phi_{\alpha,\beta(1-\alpha)}(st^{-\alpha}) e^{-\lambda s} \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k s^k}{k!} v_0(\xi - k\mu)\, ds. \tag{20}$$

Замечание 9. Из полученных результатов следует, что решения (16), (18), (20) аналитичны по t в секторе $\Sigma_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}$ при некотором $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. *Tarasov V. E.* Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. New York: Springer, 2011.
3. *Uchaykin V. V.* Fractional derivatives for physicists and engineers: I. Background and theory. II. Applications. Berlin: Springer, 2013.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
5. *Podlubny I.* Fractional differential equations. Boston: Acad. Press, 1999.
6. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Sci. Publ., 2006.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
8. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999.
9. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
10. *Da Prato G., Iannelli M.* Linear integro-differential equations in Banach spaces // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 1980. V. 62. P. 207–219.
11. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. Basel: Birkhäuser-Verl., 1993.
12. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces. Ph. D. Dissertation. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001.
13. *Kostić M.* Abstract Volterra integro-differential equations. Boca Raton: CRC Press, 2015.
14. *Bazhlekova E.* The abstract Cauchy problem for the fractional evolution equation // Fractional Calculus and Applied Analysis. 1998. V. 1, N 3. P. 255–270.
15. *Fedorov V. E., Skorynin A. S.* Strongly continuous resolving families of operators for equations with a fractional derivative // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 7. P. 2651–2659.
16. *Федоров В. Е., Авилович А. С.* Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 461–477.
17. *Глушак А. В.* О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физика, математика. 2001. № 2. С. 74–77.
18. *Fedorov V. E., Vershinina D. A.* Strongly continuous resolving families of equations with Riemann–Liouville derivative // J. Math. Sci. 2025. V. 287, N 1. P. 52–68.
19. *Fedorov V. E., Skorynin A. S.* Analytic resolving families of operators for linear equations with Hilfer derivative // J. Math. Sci. 2023. V. 277, N 3. P. 385–402.
20. *Fedorov V. E., Du W.-Sh., Kostić M., Plekhanova M. V., Skorynin A. S.* Criterion of the existence of a strongly continuous resolving family for a fractional differential equation with the Hilfer derivative // Fractal and Fractional. 2025. V. 9, N 2. Article number 81.
21. *Bazhlekova E. G.* Subordination principle for fractional evolution equations // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2000. V. 3, N 3. P. 213–230.
22. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Vershinina D. A.* Subordination principle for equations with Riemann–Liouville derivative // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46, N 11. P. 5578–5588.
23. *Bazhlekova E.* Subordination in a class of generalized time-fractional diffusion-wave equations // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2018. V. 21, N 4. P. 869–900.
24. *Bazhlekova E., Bazhlekov I.* Subordination approach to multi-term time-fractional diffusion-wave equation // J. Comput. Appl. Math. 2018. V. 339. P. 179–192.
25. *Fedorov V. E., Filin N. V.* Subordination principle for equations with proportional distributed Gerasimov–Caputo derivatives // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46, N 1. P. 404–416.
26. *Bazhlekova E., Bazhlekov I.* Subordination approach to space-time fractional diffusion // Mathematics. 2019. V. 7, N 5. Article number 415.
27. *Luchko Yu.* Subordination principles for the multi-dimensional space-time-fractional diffusion-wave equation // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2019. V. 98. P. 127–147.
28. *Hilfer R.* Applications of fractional calculus in physics. Singapore: WSPC, 2000.
29. *Волкова А. Р., Федоров В. Е., Гордиевских Д. М.* О разрешимости некоторых классов уравнений с производной Хилфера в банаховых пространствах // Челяб. физ.-мат. журн. 2022. Т. 7, № 1. С. 11–19.
30. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.

31. *Mainardi M.* Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models. Singapore: World Sci., 2010.

32. *Evgrafov M. A.* Asymptotic estimates and entire functions. New York: Gordon and Breach, 1961.

Поступила в редакцию 4 января 2026 г.
После доработки 4 января 2026 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Федоров Владимир Евгеньевич (ORCID 0000-0002-0787-3272),
Антон Сергеевич Скорынин (ORCID 0009-0002-1260-7830)
Челябинский государственный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
kar@csu.ru, skorynin@csu.ru