Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.951+517.983

О ФРЕДГОЛЬМОВОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Г. Туманян

Аннотация. Исследуется фредгольмовость регулярных гипоэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами. Для данного класса операторов получены априорные оценки и установлен критерий фредгольмовости в мультианизотропных весовых соболевских пространствах на всем $\mathbb{R}^n$.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.212

Ключевые слова: фредгольмов оператор, регулярный гипоэллиптический оператор, априорная оценка, мультианизотропные весовые пространства.

Посвящается юбилею
Геннадия Владимировича Демиденко

1. Введение и основные определения

Данная работа посвящена исследованию регулярных гипоэллиптических операторов, которые являются специальным подклассом гипоэллиптических операторов по Хёрмандеру (см. [1]). Характеристические многочлены этих операторов являются мультиквазиэллиптическими, в силу чего данный класс операторов естественным образом обобщает эллиптические, параболические, $2b$-параболические и квазиэллиптические операторы. Регулярные гипоэллиптические операторы были введены в 1960–1970-х гг. и активно исследовались в работах С. М. Никольского [2], В. П. Михайлова [3], Фриберга [4], Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [5], Г. Г. Казаряна [6] и других авторов. Анализ регулярных гипоэллиптических операторов связан с определенными трудностями, поскольку соответствующие характеристические многочлены, в отличие от эллиптического и квазиэллиптического случаев, не являются однородными или обобщенно однородными. Условия разрешимости, априорные оценки, а также фредгольмовы и спектральные свойства регулярных гипоэллиптических операторов изучены лишь для отдельных классов операторов в специальных функциональных пространствах, при этом большинство известных результатов относится к эллиптическим и квазиэллиптическим операторам.

Фредгольмовы свойства эллиптических операторов в различных функциональных пространствах исследованы в работах Л. А. Багирова [7], Локкарта и

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию и науке МОНКС РА №25RG-1A205.

© **2026 Туманян А. Г.**

Маккоуна [8, 9], Шроэ [10] и других авторов. Априорные оценки и фредгольмова разрешимость квазиэллиптических операторов изучены в работах Л. А. Багирова [11], Г. А. Карапетяна и А. А. Дарбиняна [12], А. А. Дарбиняна и А. Г. Туманян [13] и др.

Вопросы корректной разрешимости и изоморфизма квазиэллиптических операторов в специальной шкале весовых соболевских пространств изучены в работах Г. В. Демиденко (см. [14–16]).

В работах Родино, Боггиатто, Бузано (см. [17]) исследованы фредгольмовы и спектральные свойства специальных классов регулярных гипоэллиптических псевдодифференциальных операторов в мультианизотропных пространствах с полиномиальными весами. Спектральные свойства гипоэллиптических псевдодифференциальных операторов типа Шредингера, а также операторов, являющихся относительно ограниченными возмущениями операторов с постоянными коэффициентами, изучены в работах Бузано и Зигиотто (см. [18, 19]). Условия фредгольмовости для регулярных гипоэллиптических операторов на соболевских шкалах $H_q^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ со специальными весовыми функциями установлены в [20, 21].

В настоящей работе исследованы нормальная разрешимость, фредгольмовость и спектральные свойства одного класса регулярных гипоэллиптических операторов с переменными коэффициентами на всем $\mathbb{R}^n$. При некоторых условиях на коэффициенты получены априорные оценки для дифференциальных операторов, действующих в мультианизотропных весовых соболевских пространствах. Установлен критерий фредгольмовости для рассматриваемого класса операторов в мультианизотропных пространствах $H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ с ограниченной весовой функцией q из специального класса. В работе также приводится описание существенного спектра таких операторов в случае $q \equiv 1$. Спектральные свойства рассматриваемых операторов отличаются от свойств операторов на весовых шкалах, изученных в предыдущих работах (см. [20–22]).

Определение 1.1. Линейный ограниченный оператор A, определенный на всем банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, назовем *n-нормальным оператором*, если выполняются следующие условия:

1) образ оператора A замкнут ($\operatorname{Im}(A) = \overline{\operatorname{Im}(A)}$);

2) ядро оператора A конечномерно ($\dim \operatorname{Ker}(A) < \infty$).

Оператор A назовем *фредгольмовым*, если выполняются условия 1, 2 и

3) коядро оператора A конечномерно ($\dim \operatorname{coker}(A) = \dim(Y/\operatorname{Im}(A)) < \infty$).

Определение 1.2. Пусть A — замкнутый оператор с плотной областью определения в банаховом пространстве X. *Существенным спектром* $\sigma_{ess}(A)$ назовем множество комплексных чисел λ, для которых $A - \lambda I$ не является фредгольмовым.

Разность между размерностями ядра и коядра оператора A называется индексом оператора:

$$\operatorname{ind}(A) = \dim \operatorname{Ker}(A) - \dim \operatorname{coker}(A).$$

Определение 1.3. Для линейного ограниченного оператора A, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y ($A : X \to Y$), линейные ограниченные операторы $R_1 : Y \to X$ и $R_2 : Y \to X$ назовем соответственно *левым и правым регуляризаторами*, если выполняются следующие условия: $R_1A = I_X + T_1, AR_2 = I_Y + T_2$, где I_X, I_Y — единичные операторы, а $T_1 : X \to X$ и $T_2 : Y \to Y$ — компактные операторы. Линейный ограниченный оператор $R : Y \to X$ назовем *регуляризатором* для оператора $A : X \to Y$, если он одновременно является и левым, и правым регуляризатором.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+^n$, $\mathbb{N}^n$ соответственно множества n-мерных мультииндексов и n-мерных мультииндексов с натуральными компонентами. Пусть $\mathscr{N} \subset \mathbb{Z}_+^n$ — некоторое конечное множество мультииндексов, $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\mathscr{N})$ — минимальный выпуклый многогранник, содержащий элементы из $\mathscr{N}$.

Определение 1.4. Многогранник $\mathscr{R}$ назовем *вполне правильным*, если выполняются следующие условия:

а) $\mathscr{R}$ является полным многогранником: $\mathscr{R}$ имеет вершины в начале координат и на каждой оси координат $\mathbb{R}^n$, отличные от начала координат;

б) все компоненты внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathscr{R}$ положительные.

Пусть $\mathscr{R}$ — вполне правильный многогранник. Обозначим через $\mathscr{R}_j^{n-1}$, $j = 1, \ldots, I_{n-1}$, $(n-1)$-мерные некоординатные грани $\mathscr{R}$ с соответствующими внешними нормалями μ^j такими, что для всех мультииндексов $\alpha \in \mathscr{R}_j^{n-1}$ выполняется $(\alpha : \mu^j) = \frac{\alpha_1}{\mu_1^j} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\mu_n^j} = 1$, $\partial\mathscr{R} = \bigcup\limits_{j=1}^{I_{n-1}} \mathscr{R}_j^{n-1}$. Для $k > 0$ обозначим $k\mathscr{R} := \{k\alpha = (k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n) : \alpha \in \mathscr{R}\}$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1.1}$$

где

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n},\ D_j = i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Обозначим

$$P(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$|\xi|_{\mathscr{R}} = \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} |\xi^\alpha|, \quad |\xi|_{\partial\mathscr{R}} = \sum_{\alpha \in \partial\mathscr{R}} |\xi^\alpha|.$$

Определение 1.5. Дифференциальный оператор $P(x, \mathbb{D})$ назовем *регулярным в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$1 + |P(x_0, \xi)| \geq \delta |\xi|_{\mathscr{R}} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Оператор $P(x, \mathbb{D})$ назовем *регулярным в* $\mathbb{R}^n$, если $P(x, \mathbb{D})$ является регулярным в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$, и *равномерно регулярным в* $\mathbb{R}^n$, если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$1 + |P(x, \xi)| \geq \delta |\xi|_{\mathscr{R}} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим примеры таких операторов.

1. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\mathscr{R}$ — многогранник Ньютона для точек $(0,0,\ldots,0)$, $(m,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,m)$. В этом случае определения (определение 1.5) соответствуют определениям эллиптичности с $|\xi|_{\partial\mathscr{R}} = |\xi|_m = \sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i^m|$.

2. Пусть $\nu \in \mathbb{N}^n$ и $\mathscr{R}$ — многогранник Ньютона для точек $(0,0,\ldots,0)$, $(\nu_1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,\nu_n)$. В этом случае определения (определение 1.5) соответствуют определениям квазиэллиптичности с

$$|\xi|_{\partial\mathscr{R}} = |\xi|_\nu = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i^{\nu_i}|.$$

3. Пусть $n=2$ и $\mathscr{R}$ — многогранник Ньютона для точек $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,8)$ и $(6,4)$. Тогда

$$P(x,\mathbb{D}) = a_1D_1^8 + a_2D_1^6D_2^4 + a_3D_2^8 + q(x),$$

где $a_1,a_2,a_3>0$ и $q \in C(\mathbb{R}^2)$, является регулярным в $\mathbb{R}^2$.

4. Пусть $n=3$ и $\mathscr{R}$ — многогранник Ньютона для точек $(0,0,0)$, $(8,0,0)$, $(0,8,0)$, $(6,4,0)$, $(6,0,6)$, $(0,6,6)$ и $(0,0,12)$. Тогда

$$P(x,\mathbb{D}) = D_1^8 + D_1^6D_2^4 + D_2^8 + D_1^6D_3^6 + D_2^6D_3^6 + D_3^{12} + q(x),$$

где $q \in C(\mathbb{R}^3)$, является регулярным в $\mathbb{R}^3$.

5. Пусть $\mathscr{R}$ — вполне правильный многогранник с вершинами, имеющими четные координаты. Тогда

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{\alpha\in\partial\mathscr{R}} D^\alpha + q(x),$$

где $q \in C(\mathbb{R}^n)$, является регулярным в $\mathbb{R}^n$.

Пусть последовательность $\{a_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = \infty$ и выполняется неравенство $a_{i+1} < \gamma a_i$, где $\gamma > 0$ и $i = 0,1,\ldots$. Аналогично определениям из работ [7, 20], используя последовательность $\{a_i\}_{i=0}^\infty$, определим специальное покрытие $\{W_m\}_{m=1}^\infty$ пространства $\mathbb{R}^n$ с помощью конечного открытого покрытия $\{U_j\}_{j=1}^l$ единичной сферы, где l не зависит от m, а также системы функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ и $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$. Системы функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ и $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$ обладают следующими свойствами:

1) $\operatorname{supp}\varphi_m \subset \operatorname{supp}\psi_m \subset W_m$;

2) $\psi_m(x)\varphi_m(x) = \varphi_m(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

3) для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ существует постоянная $C_\alpha > 0$ такая, что

$$|D^\alpha\psi_m(x)| \le C_\alpha(a_{[\frac{m-1}{l}]})^{-|\alpha|},\ |D^\alpha\varphi_m(x)| \le C_\alpha(a_{[\frac{m-1}{l}]})^{-|\alpha|}\ \forall x \in \mathbb{R}^n, m = 1,2,\ldots;$$

4) $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\varphi_m(x) \equiv 1$.

Обозначим $Q := \{g \in C(\mathbb{R}^n) : g(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$.

Для вполне правильного многогранника $\mathscr{R}$ обозначим через $Q^{\mathscr{R}}$ множество функций $g \in Q$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\frac{1}{g(x)} \to 0$ при $|x| \to \infty$;

2) $D^\beta g(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ для $\beta \in \mathscr{R}\beta \ne 0$ и существует $C_\beta > 0$ такая, что $\frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)^{1+(\beta:\mu^j)}} \le C_\beta$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $j = 1,\ldots,I_{n-1}$;

3) для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0 = m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $m > m_0$ при $\max\limits_{j=1,\dots,l} \operatorname{diam} U_j < \delta$ выполняется

$$\max_{x,y\in\overline{W}_m} \frac{|g(x)-g(y)|}{g(y)} < \varepsilon, \quad \max_{x,y\in\overline{W}_m} \frac{1}{g(x)^{\frac{1}{\mu_{\max}}} a_{[\frac{m-1}{l}]}} < \varepsilon,$$

где $\mu_{\max} = \max\limits_{1\le i\le I_{n-1}} \max\limits_{1\le j\le n} \{\mu^i_j\}$.

Примеры весовых функций из множества $Q^{\mathscr{R}}$ включают как полиномиальные, так и экспоненциальные весовые функции, например, $|x|^l_{\mathscr{R}}$, $\exp(|x|^r_{\mathscr{R}})$ при $l, r > 0$.

Для вполне правильного многогранника $\mathscr{R}$ обозначим через $\widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ множество функций $g \in Q$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) существует постоянная $C > 0$ такая, что $0 < g(x) \le C$;

2) $D^\beta g(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ для $\beta \in \mathscr{R}, \beta \ne 0$, и существует $C_\beta > 0$ такая, что $\frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)^{1+(\beta:\mu^j)}} \le C_\beta$ для всех $x \in \mathbb{R}^n, j = 1,\dots,I_{n-1}$;

3) для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0 = m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $m > m_0$ при $\max\limits_{j=1,\dots,l} \operatorname{diam} U_j < \delta$ выполняется

$$\max_{x,y\in\overline{W}_m} \frac{|g(x)-g(y)|}{g(y)} < \varepsilon, \quad \max_{x,y\in\overline{W}_m} \frac{1}{g(x)^{\frac{1}{\mu_{\min}}} a_{[\frac{m-1}{l}]}} < \varepsilon,$$

где $\mu_{\min} = \min\limits_{1\le i\le I_{n-1}} \min\limits_{1\le j\le n} \{\mu^i_j\}$.

Например, в класс весовых функций $\widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ входит $|x|^l_{\mathscr{R}}$, где $-\frac{\mu_{\min}}{\mu_{\max}} < l \le 0$.

Для $k \in \mathbb{R}$, вполне правильного многогранника $\mathscr{R}$ и $1 < p < \infty$ обозначим

$$H^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathscr{S}' : \|u\|_{k,\mathscr{R},p} := \|F^{-1}(1+|\xi|_{\partial\mathscr{R}})^k Fu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

где $\mathscr{S}'$ — пространство обобщенных функций медленного роста.

Для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\dot{H}^{k,\mathscr{R},p}(\Omega)$ пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{k,\mathscr{R},p}$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $q \in Q$, вполне правильного многогранника $\mathscr{R}$ и $1 < p < \infty$ обозначим

$$H_q^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) := \Big\{u : \|u\|_{H_q^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)} := \|u\|_{k,\mathscr{R},p,q} := \sum_{\alpha\in k\mathscr{R}} \|D^\alpha u \cdot q^{k-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty\Big\}.$$

В случае $k \in \mathbb{Z}_+$ и $q \equiv 1$ введенные пространства совпадают.

Для $k = 1$ обозначим $H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) := H_q^{1,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$, $H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) := H^{1,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$. Для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$H_q^{k,\mathscr{R},p}(\Omega) := \Big\{u : \|u\|_{H_q^{k,\mathscr{R},p}(\Omega)} := \sum_{\alpha\in k\mathscr{R}} \|D^\alpha u \cdot q^{k-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\|_{L_p(\Omega)} < \infty\Big\},$$

$$H_{q(x_0)}^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) := \Big\{u : \|u\|_{H_{q(x_0)}^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)} := \|u\|_{k,\mathscr{R},p,q(x_0)} := \sum_{\alpha\in k\mathscr{R}} \|D^\alpha u \cdot q(x_0)^{k-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty\Big\}.$$

Введенные пространства являются обобщением мультианизотропных соболевских пространств (см. [6]).

2. Априорные оценки и нормальная разрешимость

Рассмотрим дифференциальный оператор $P(x,\mathbb{D})$ (см. (1.1)), представимый в следующем виде:

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a_\alpha(x)D^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} \big(a^0_\alpha(x)q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} + a^1_\alpha(x)\big)D^\alpha, \tag{2.1}$$

где $q\in Q$, $a^0_\alpha(x)$, $a^1_\alpha(x)$ — ограниченные непрерывные функции на $\mathbb{R}^n$, $a^1_\alpha(x) = o(q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)})$ при $|x|\to\infty$ для всех $\alpha\in\mathscr{R}$.

Легко проверить, что $P(x,\mathbb{D})$ порождает линейный ограниченный оператор, действующий из $H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Для $N>0$ и $x_0\in\mathbb{R}^n$ обозначим

$$K_N(x_0) := \{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|\le N\}, \quad K_N := K_N(0).$$

В дальнейшем будем использовать следующую теорему, которая является следствием теоремы 7.1 из работы [23].

Теорема 2.1. *Пусть $q\in Q$ и $P(x,\mathbb{D})$ — дифференциальный оператор* (2.1). *Тогда $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n)$ является n-нормальным тогда и только тогда, когда существуют постоянные $\kappa>0$ и $N>0$ такие, что имеет место оценка*

$$\|u\|_{\mathscr{R},p,q} \le \kappa(\|Pu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_p(K_N)}) \quad \forall u\in H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 2.2. *Пусть $q\in\widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ и $P(x,\mathbb{D})$ — дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими $\lim\limits_{m\to\infty}\max\limits_{x,y\in\overline{W_m}}\big|a^0_\alpha(x)-a^0_\alpha(y)\big| = 0$ для всех $\alpha\in\mathscr{R}$. Пусть существуют постоянные $\kappa>0$ и $N>0$ такие, что*

$$\|u\|_{\mathscr{R},p,q} \le \kappa(\|Pu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_p(K_N)}) \quad \forall u\in H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n). \tag{2.2}$$

Тогда $P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и существуют постоянные $\delta>0$ и $M>0$ такие, что

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x)q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\xi^\alpha\Big| \ge \delta(q(x)+|\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ |x|>M. \tag{2.3}$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 работы [22] следует, что $P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$. Докажем оценку (2.3).

Пусть $m\in\mathbb{N}$, $x_m\in W_m$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $\widetilde{u}_m(x) := \exp(i(\xi,x))\psi_m(x)$.

В силу того, что $q\in\widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$, для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta(\varepsilon)>0$ и $m_0(\varepsilon)>0$ такие, что для всех $m>m_0$ при $\max\limits_{j=1,\dots,l}\operatorname{diam}U_j<\delta$

$$|q(x)-q(y)| \le \varepsilon q(y) \quad \forall x,y\in W_m.$$

Тогда для любого $r>0$ имеет место неравенство

$$|q(x)^r - q(x_m)^r| \le \tau_r(\varepsilon)q(x_m)^r \quad \forall x\in W_m, \tag{2.4}$$

где $\tau_r(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Из неравенства (2.4) и того факта, что $\operatorname{supp}\widetilde{u}_m \subset W_m$, следует, что существует функция $\tau(\varepsilon)$ такая, что $\tau(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и имеют место неравенства

$$\|\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q} \ge (1-\tau(\varepsilon))\|\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q(x_m)}.$$

Для достаточно большого m_0 и при достаточно малом значении $\max\limits_{j=1,\dots,l}\operatorname{diam} U_j$ для $m > m_0$ имеет место неравенство

$$\|\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q} \ge \frac{1}{2}\|\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q(x_m)}. \tag{2.5}$$

Учитывая свойства $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ и то, что $(\gamma:\mu^i) - \frac{|\gamma|}{\mu_{\min}} \le 0$ для $\gamma \in \mathscr{R}$ и $i = 1,\dots,I_{n-1}$, получим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in \mathscr{R}$, $\gamma \ne 0$, существуют $\delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для $m > m_0$ и $\max\limits_{j=1,\dots,l}\operatorname{diam} U_j < \delta$ выполняется неравенство

$$\frac{|D^\gamma\psi_m(x)|}{q(x)^{(\gamma:\mu^i)}} = \frac{|D^\gamma\psi_m(x)|a^{|\gamma|}_{[\frac{m-1}{l}]}}{q(x)^{(\gamma:\mu^i)-\frac{|\gamma|}{\mu_{\min}}}q(x)^{\frac{|\gamma|}{\mu_{\min}}}a^{|\gamma|}_{[\frac{m-1}{l}]}} \le \omega_\gamma(\varepsilon), \tag{2.6}$$

где $\mu_{\min} = \min\limits_{1\le i\le I_{n-1}}\min\limits_{1\le j\le n}\{\mu^i_j\}$ и $\omega_\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для $\beta \in \mathscr{R}$ с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\|D^\beta\widetilde{u}_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} &\ge |\xi^\beta|\|\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)}\\ &\quad - C_1\sum_{0\le\gamma<\beta}|\xi^\gamma|\|D^{\beta-\gamma}\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)}.\end{aligned}$$

Пусть $j = \arg\max\limits_i(\beta:\mu^i)$. Используя оценку (2.6), свойства $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}&|\xi^\gamma|\|D^{\beta-\gamma}\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}q(x_m)^{1-(\beta:\mu^j)}\\ &\qquad\le |\xi^\gamma|\omega_{\beta-\gamma}(\varepsilon)q(x_m)^{(\beta-\gamma:\mu^j)}\mu(W_m)q(x_m)^{1-(\beta:\mu^j)}\\ &\qquad\le \widetilde{\omega}_{\beta-\gamma}(\varepsilon)|\xi^\gamma|q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)}\mu(W_m),\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\mu(W_m)$ — мера множества W_m, $\omega_{\beta-\gamma}(\varepsilon)$, $\widetilde{\omega}_{\beta-\gamma}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Используя оценку (2.7), получим

$$\begin{aligned}\|D^\beta\widetilde{u}_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} &\ge |\xi^\beta|q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)}\mu(W_m)\\ &\quad - \omega_1(\varepsilon)\sum_{0\le\gamma<\beta}|\xi^\gamma|q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)}\mu(W_m),\end{aligned}$$

где $\mu(W_m)$ — мера множества W_m, $\omega_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда нетрудно проверить, что выполняется оценка

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q(x_m)} &\ge \sum_{\beta\in\mathscr{R}}|\xi^\beta|q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)}\mu(W_m)\\ &\quad - \omega_2(\varepsilon)\sum_{\gamma\in\mathscr{R}}|\xi^\gamma|q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)}\mu(W_m),\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\omega_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Имеем

$$\|P(x,\mathbb{D})\widetilde{u}_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \Big\| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} D^\alpha \widetilde{u}_m \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \Big\| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^1_\alpha(x) D^\alpha \widetilde{u}_m \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.9)$$

Учитывая, что $a^1_\alpha(x) = o(q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)})$ при $|x| \to \infty$ для всех $\alpha \in \mathscr{R}$ и (2.6), (2.7), нетрудно проверить, что для достаточно большого m_0 и $m > m_0$ выполняется оценка

$$\Big\| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^1_\alpha(x) D^\alpha \widetilde{u}_m \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \omega_3(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \mu(W_m), \quad (2.10)$$

где $\omega_3(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Используя (2.6), (2.7), (2.4) и условие $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_m}} \big|a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)\big| = 0$ для всех $\alpha \in \mathscr{R}$, по аналогии с доказательством теоремы 3.4 из работы [22] получим, что для достаточно большого m_0 и $m > m_0$ выполняется оценка

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} D^\alpha \widetilde{u}_m \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad\le \Big| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha \Big| \|\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad+ C_2 \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} \sum_{0\le\gamma<\alpha} |\xi^\gamma| \|D^{\alpha-\gamma}\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \\
&\quad+ \omega_4(\varepsilon) \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} \sum_{0\le\gamma_1+\gamma_2\le\alpha} |\xi^{\gamma_1}| \|D^{\gamma_2}\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \\
&\quad\le \Big| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha \Big| \mu(W_m) \\
&\quad+ \widetilde{\omega_4}(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \mu(W_m), \quad (2.11)
\end{aligned}$$

где $\omega_4(\varepsilon) \to 0$, $\widetilde{\omega_4}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из оценок (2.10), (2.11) для достаточно большого m_0 и всех $m > m_0$ получим

$$\|P\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q(x_m)} \le \Big| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha \Big| \mu(W_m) + \omega_5(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \mu(W_m), \quad (2.12)$$

где $\omega_5(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда из (2.2), применяя (2.8) и (2.12), получим

$$\sum_{\beta\in\mathscr{R}} |\xi^\beta| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} - \omega_2(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \le \kappa\Big(\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| + \omega_5(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)}\Big).$$

Из полученной оценки, выбирая ε достаточно малым, получим, что для достаточно большого m_0 при $m > m_0$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$ выполняется неравенство

$$C_3 \sum_{\beta\in\mathscr{R}} |\xi^\beta| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} \le \Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big|.$$

Из последнего неравенства, учитывая, что $\mathscr{R}$ вполне правильный многогранник, получим, что существует постоянная $\delta > 0$ такая, что для достаточно большого m_0 при $m > m_0$ имеет место неравенство

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \ge \delta(q(x_m) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}).$$

Так как последнее неравенство выполняется для всех x_m при $m > m_0$, заключаем, что существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \ge \delta(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M. \quad \square$$

Далее установим, что полученные условия на символ оператора также являются достаточными для выполнения априорной оценки (2.2) в рассматриваемых пространствах.

Теорема 2.3. *Пусть $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ и $P(x,\mathbb{D})$ — дифференциальный оператор (2.1) с коэффициентами, удовлетворяющими*

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x,y\in\overline{W_m}} \big|a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)\big| = 0$$

для всех $\alpha \in \mathscr{R}$. Пусть $P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \ge \delta(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M. \tag{2.13}$$

Тогда существуют постоянные $\kappa > 0$ и $N > 0$ такие, что

$$\|u\|_{\mathscr{R},p,q} \le \kappa(\|Pu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_p(K_N)}) \quad \forall u \in H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n). \tag{2.14}$$

Доказательство. Обозначим

$$P_0(x,\mathbb{D}) = \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} D^\alpha,$$

$$P^m(x,\mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} \big[\psi_m(x)\big(a^0_\alpha(x)q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} - a^0_\alpha(x_m)q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\big) + a^0_\alpha(x_m)q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\big]D^\alpha, \quad m=1,2,\ldots.$$

Учитывая свойства системы функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, получим, что для $\gamma\in\mathscr{R}$, $\gamma\neq 0$, и произвольного $\varepsilon>0$ существуют $\delta(\varepsilon)>0$ и $m_0(\varepsilon)>0$ такие, что для всех $m>m_0$ и $\max\limits_{j=1,\ldots,l}\operatorname{diam}U_j<\delta$ получим неравенство

$$\frac{|D^\gamma\varphi_m(x)|}{q(x)^{(\gamma:\mu^i)}} = \frac{|D^\gamma\varphi_m(x)|a^{|\gamma|}_{[\frac{m-1}{l}]}}{q(x)^{(\gamma:\mu^i)-\frac{|\gamma|}{\mu_{\min}}}q(x)^{\frac{|\gamma|}{\mu_{\min}}}a^{|\gamma|}_{[\frac{m-1}{l}]}} \le \omega_\gamma(\varepsilon), \tag{2.15}$$

где $\omega_\gamma(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Аналогичные неравенства выполняются для функций $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$.

Используя эти оценки, лемму 3.1 из работы [24] и условия на коэффициенты $\lim\limits_{m\to\infty}\max\limits_{x,y\in\overline{W_m}}\big|a^0_\alpha(x)-a^0_\alpha(y)\big|=0$, аналогично доказательству теоремы 2.2 из работы [12] можно проверить, что при достаточно большом m_0 для всех $m>m_0$ операторы $P^m(x,\mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n)$ имеют ограниченные обратные операторы, причем нормы этих обратных операторов равномерно ограничены благодаря условию (2.13).

Так как $P^m(\varphi_m u)=P_0(\varphi_m u)$ для всех $u\in H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n)$ и $m>m_0$, с некоторой постоянной $C_1>0$ выполняется оценка

$$\|\varphi_m u\|_{\mathscr{R},p,q}\le C_1\|P^m(\varphi_m u)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le C_1\|P_0(\varphi_m u)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u\in H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n).$$

Используя свойства функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ и оценку (2.15), можно показать, что при достаточно большом m_0 и достаточно малом $\max\limits_{j=1,\ldots,l}\operatorname{diam}U_j$ для $m>m_0$ существуют такие константы $C_2, C_3>0$, что имеет место оценка

$$\begin{aligned}\|\varphi_m P_0u - P_0(\varphi_m u)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\le C_2\Big\|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}}\sum_{\beta+\gamma=\alpha,|\gamma|>0} a^0_\alpha(x)q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}D^\beta u D^\gamma\varphi_m\Big\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}\\ &\le C_3\Big\|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}}\sum_{\beta+\gamma=\alpha,|\gamma|>0} a^0_\alpha(x)D^\beta u D^\gamma\varphi_m\frac{1}{q(x)^{\max\limits_i(\gamma:\mu^i)}}q(x)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)}\Big\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}\\ &\le\omega(\varepsilon)\|u\|^p_{H^{\mathscr{R},p}_q(W_m)}.\end{aligned}$$

где $\omega(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Суммируя по всем $m>m_0$ и учитывая свойства $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, $\{W_m\}_{m=1}^\infty$, заключаем, что с некоторой постоянной $C_4>0$ выполняется оценка

$$\sum_{m=m_0+1}^\infty\|\varphi_m u\|^p_{\mathscr{R},p,q}\le C_4\big(\|P_0u\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}+\omega(\varepsilon)\|u\|^p_{\mathscr{R},p,q}\big)\quad\forall u\in H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n). \tag{2.16}$$

Продолжение доказывается аналогично схеме из теоремы 2.3 в работе [20]. □

Из теорем 2.1–2.3 непосредственно вытекает

Следствие 2.1. *Пусть* $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ *и* $P(x, \mathbb{D})$ — *дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими* $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_m}} \left|a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)\right| = 0$ *для всех* $\alpha \in \mathscr{R}$.

Тогда оператор $P(x, \mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ *является* n*-нормальным тогда и только тогда, когда* $P(x, \mathbb{D})$ *является регулярным в* $\mathbb{R}^n$ *и существуют постоянные* $\delta > 0$ *и* $M > 0$ *такие, что*

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \geq \delta(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M. \qquad (2.17)$$

Замечание 2.1. Для функции $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ такой, что $q(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, из следствия 2.1 имеем, что рассматриваемый оператор $P(x, \mathbb{D})$ не является n-нормальным как оператор из $H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$, но является n-нормальным как оператор из $H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Для оператора только с главной частью

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{\alpha\in\partial\mathscr{R}} a_\alpha(x) D^\alpha : H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$$

из теоремы 2.2 следует, что априорная оценка (2.2) не может выполняться. Тогда по теореме 2.1 оператор не является n-нормально разрешимым. Теорема 2.2 показывает, что для выполнения априорной оценки вида (2.2) наряду с регулярностью $P(x, \mathbb{D})$ необходимым также является условие (2.3). В работе [20] априорные оценки установлены в случае весовых пространств $H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n)$ при $q \in Q^{\mathscr{R}}$.

3. Критерий фредгольмовости

Теорема 3.1. *Пусть* $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ *и* $P(x, \mathbb{D})$ — *дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими*

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x,y\in\overline{W_m}} \left|a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)\right| = 0$$

для всех $\alpha \in \mathscr{R}$. *Оператор* $P(x, \mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ *является фредгольмовым тогда и только тогда, когда* $P(x, \mathbb{D})$ *является регулярным в* $\mathbb{R}^n$ *и существуют постоянные* $\delta > 0$ *и* $M > 0$ *такие, что*

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \geq \delta\left(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}\right) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Поскольку из фредгольмовости оператора сразу имеем его n-нормальность, необходимость утверждения следует из теорем 2.1 и 2.2.

Докажем достаточность. Приведем построение левого и правого регуляризаторов.

Пусть $x_m \in W_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Обозначим

$$P^m(x, \mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} (\psi_m(x)(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_m)) + a_\alpha(x_m)) D^\alpha,$$

$$P^{m,0}(x, \mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\partial\mathscr{R}} (\psi_m(x)(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_m)) + a_\alpha(x_m)) D^\alpha,$$

$$R^{m,0} := F^{-1}\frac{|\xi|_{\partial\mathscr{R}}}{(1+|\xi|_{\partial\mathscr{R}})P^{m,0}(x_m,\xi)}F.$$

Пусть $m_0 \in \mathbb{N}$. Так как $P(x,\mathbb{D})$ регулярен в $\mathbb{R}^n$, то при достаточно малых диаметрах $\{W_m\}_{m=1}^{m_0}$ из леммы 3.1 работы [22] следует, что для $m \le m_0$ имеет место представление

$$R^{m,0}P^m(x,\mathbb{D}) = I + T_1^m + T_2^m, \tag{3.2}$$

где $T_1^m : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$, $\sigma = \sigma(\mathscr{R}) > 0$, а оператор $T_2^m : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\|T_2^m\| < 1$.

Обозначим

$$R^m := (I + T_2^m)^{-1}R^{m,0}.$$

Аналогично доказательству теоремы 2.3 можно взять m_0 достаточно большим, так что для $m > m_0$ операторы $P^m : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ имеют равномерно ограниченные обратные операторы $R^m : L_p(\mathbb{R}^n) \to H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим

$$Rf := \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l R^l(\varphi_l f), \quad f \in L_p(\mathbb{R}^n). \tag{3.3}$$

Аналогично доказательству теоремы 3.6 из работы [22] нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$RP(x,\mathbb{D})u = u + \phi T_1 u + T_2 u,$$

где $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $T_1 : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$, $\sigma = \sigma(\mathscr{R}) > 0$, а оператор $T_2 : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\|T_2\| < 1$.

Так как $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\phi \subset K_{N_1}$ для некоторой постоянной $N_1 > 0$ и $T_1 : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma = \sigma(\mathscr{R}) > 0$, то существуют постоянные $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned}\|\phi T_1 u\|_{\mathscr{R},p,q} &\le C_1\|\phi T_1 u\|_{\dot{H}^{\mathscr{R},p}(K_{N_1})} \le C_2\|\phi T_1 u\|_{\dot{H}^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(K_{N_1})}\\ &\le C_3\|u\|_{\dot{H}^{\mathscr{R},p}(K_{N_1})} \le C_4\|u\|_{H_q^{\mathscr{R},p}(K_{N_1})} \le C_5\|u\|_{\mathscr{R},p,q} \quad \forall u \in H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Из последней оценки в силу компактности вложений $\dot{H}^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(K_{N_1})$ в $\dot{H}^{\mathscr{R},p}(K_{N_1})$ получим, что $\phi T_1 : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ компактен.

Так как оператор $T_2 : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\|T_2\| < 1$, существует $(I+T_2)^{-1}$. Применяя этот оператор к обеим частям, получим

$$\widetilde{R}P(x,\mathbb{D})u = u + \widetilde{T}u,$$

где $\widetilde{R} := (I+T_2)^{-1}R$, а $\widetilde{T} := (I+T_2)^{-1}\phi T_1 : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ является компактным оператором, так как ϕT_1 компактен.

Аналогичным образом строится правый регуляризатор. Из существования левого и правого регуляризаторов, используя теорему 3.14 из [25], заключаем, что $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ является фредгольмовым оператором. □

Следствие 3.1. *Пусть $q \equiv 1$ и $P(x,\mathbb{D})$ — регулярный в $\mathbb{R}^n$ дифференциальный оператор вида* (2.1), *коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям:* $\lim\limits_{m\to\infty}\max\limits_{x,y\in\overline{W_m}}\big|a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)\big| = 0$ *для всех $\alpha \in \mathscr{R}$ и выполняется* (3.1).

Тогда ядро, коядро и индекс оператора не зависят от p.

Доказательство. В силу теоремы 3.1 и построения регуляризатора существует оператор $R : L_p(\mathbb{R}^n) \to H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ такой, что $RP(x,\mathbb{D})u = u + \phi T u$, где $\phi \in C_0^\infty(K_N)$ для некоторого $N > 0$, не зависящего от p, $T : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ с некоторой $\sigma = \sigma(\mathscr{R}) > 0$.

Используя последнее представление и следствие 3.2 из работы [24], нетрудно проверить, что ядро оператора $P(x,\mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ содержится в $C^\infty(K_N)$, следовательно, не зависит от p. Аналогично можно доказать, что коядро не зависит от p. Тем самым получили, что индекс оператора $P(x,\mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ не зависит от p. $\square$

Замечание 3.1. В общем случае для других шкал весовых соболевских пространств ядро, коядро и индекс оператора могут зависеть от p, как это установлено, в частности, в работах Локкарта, Маккоуна [9] и Г. В. Демиденко [16].

Из теорем 2.2, 2.3 и 3.1 непосредственно следует

Теорема 3.2. *Пусть $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ и $P(x,\mathbb{D})$ — дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_m}} \left|a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)\right| = 0$ для всех $\alpha \in \mathscr{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *оператор $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ фредгольмов;*

(2) *существуют постоянные $\kappa > 0$ и $N > 0$ такие, что*

$$\|u\|_{\mathscr{R},p,q} \le \kappa(\|Pu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_p(K_N)}) \quad \forall u \in H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n);$$

(3) *$P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и существуют $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что*

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a_\alpha^0(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \ge \delta(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M.$$

В работе [21] получен аналогичный критерий фредгольмовости для регулярных гипоэллиптических операторов на шкале весовых пространств $H_q^{\mathscr{R},p}$ с неограниченной весовой функцией $q \in Q^{\mathscr{R}}$, а также исследованы их спектральные характеристики.

Теорема 3.3. *Пусть $q \in Q^{\mathscr{R}}$ и $P(x,\mathbb{D})$ — дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_m}} \left|a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)\right| = 0$ для всех $\alpha \in \mathscr{R}$.*

Тогда оператор $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда $P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a_\alpha^0(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \ge \delta(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M. \tag{3.4}$$

При этом если $P(x,\mathbb{D})$ регулярный в $\mathbb{R}^n$ и выполняется (3.4), *то для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $P - \lambda I$ фредгольмов и спектр $\sigma(P)$ имеет одну из следующих форм:*

(1) *$\sigma(P) = \mathbb{C}$;*

(2) $\sigma(P)$ — *дискретное множество, при этом* $\operatorname{ind}\big(P; H_q^{\mathscr{R},p}\big) = 0$.

Спектральные свойства операторов из теоремы 3.3 отличаются от случая $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$: существенный спектр для таких операторов является пустым множеством. В случае $q \equiv 1$ из весового класса $\widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ на основе теоремы 3.1 нетрудно получить описание существенного спектра.

Предложение 3.1. *Пусть* $q \equiv 1$ *и* $P(x, \mathbb{D})$ — *регулярный в* $\mathbb{R}^n$ *дифференциальный оператор* (2.1) *и существуют постоянные* $\widetilde{a}_\alpha$ *такие, что* $a_\alpha(x) \to \widetilde{a}_\alpha$ *при* $|x| \to \infty$, $\alpha \in \mathscr{R}$. *Тогда*

$$\sigma_{ess}(P) = \Big\{ \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} \widetilde{a}_\alpha \xi^\alpha : \xi \in \mathbb{R}^n \Big\}.$$

При этом для $\lambda \notin \sigma_{ess}(P)$ *имеет место* $\operatorname{ind}(P - \lambda I) = 0$.

Предложение 3.2. *Пусть* $q \equiv 1$ *и* $P(x, \mathbb{D})$ — *регулярный в* $\mathbb{R}^n$ *дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими условиям* $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{x,y\in \overline{W_m}} \big|a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)\big| = 0$ *для всех* $\alpha \in \mathscr{R}$.

Тогда

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(P) = \bigcup_{(\widetilde{a}_\alpha) \in \mathscr{A}} \left\{ \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} \widetilde{a}_\alpha \xi^\alpha \,:\, \xi \in \mathbb{R}^n \right\},$$

где $\mathscr{A}$ — *множество всех семейств* $(\widetilde{a}_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{R}}$, *для которых существует такая последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, *что* $|x_k| \to \infty$ *и* $a_\alpha^0(x_k) \to \widetilde{a}_\alpha$ *при* $k \to \infty$ *для всех* $\alpha \in \mathscr{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
2. *Никольский С. М.* Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 4. С. 767–769.
3. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов // Тр. МИАН. 1967. Т. 91. С. 59–80.
4. *Friberg J.* Multi-quasielliptic polynomials // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1967. V. 21. P. 239–260.
5. *Volevich L. R., Gindikin S. G.* The method of Newton′s polyhedron in the theory of partial differential equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992.
6. *Ghazaryan H. G.* The Newton polyhedron, spaces of differentiable functions and general theory of differential equations // Armenian J. Math. 2017. V. 9, N 2. P. 102–145.
7. *Багиров Л. А.* Эллиптические уравнения в неограниченной области // Мат. сб. 1971. Т. 86. С. 121–139.
8. *McOwen R. C.* On elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ // Commum. Partial Differ. Equ. 1980. V. 5, N 8-9. P. 913–933.
9. *Lockhart R. B., McOwen R. C.* On elliptic systems in $\mathbb{R}^n$ // Acta Math. 1983. V. 150. P. 125–135.
10. *Schrohe E.* Spectral invariance, ellipticity, and the Fredholm property for pseudodifferential operators on weighted Sobolev spaces // Ann. Global Anal. Geom. 1992. V. 10, N 3. P. 237–254.
11. *Багиров Л. А.* Априорные оценки, теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 4. С. 475–492.
12. *Karapetyan G. A., Darbinyan A. A.* Index of semielliptic operator in $\mathbb{R}^n$ // Proc. NAS Armenia. Math. 2007. V. 42, N 5. P. 33–50.
13. *Darbinyan A. A., Tumanyan A. G.* On index stability of Noetherian differential operators in anisotropic Sobolev spaces // Euras. Math. J. 2019. V. 10, N 1. P. 9–15.

14. *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$ // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.

15. *Демиденко Г. В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. I // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 52–67.

16. *Демиденко Г. В.* Квазиэллиптические операторы и уравнения, не разрешенные относительно старшей производной // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, № 3. С. 15–26.

17. *Boggiatto P., Buzano E., Rodino L.* Multi-quasi-elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ // Partial Differential Operators and Mathematical Physics (Proc. Holzau). 1995. P. 31–42.

18. *Buzano E., Ziggioto A.* Weyl formula for multi-quasi-elliptic operators of Schrödinger type // Ann. Mat. 2001. V. 180. P. 223–243.

19. *Buzano E., Ziggioto A.* On the essential spectrum of hypoelliptic pseudodifferential operators // Math. Nachr. 2008. V. 281, N 1. P. 5–24.

20. *Tumanyan A. G.* A priori estimates and Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic operators // Sib. Adv. Math. 2023. V. 33, N 2. P. 151–164.

21. *Tumanyan A. G.* Normal solvability and Fredholm properties for special classes of hypoelliptic operators // Electron. J. Differ. Equ. Conf. 2025. V. 26. P. 201–217.

22. *Tumanyan A. G.* Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic operators in multianisotropic spaces in $\mathbb{R}^n$ // Ital. J. Pure Appl. Math. 2022. V. 48. P. 1009–1028.

23. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1971.

24. *Tumanyan A. G.* Fredholm property of regular hypoelliptic operators on the scales of multianisotropic spaces // ITM Web Conf. (ICAMNM 2022). 2022. V. 49. P. 1–13.

25. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Spectral theory and differential operators. Oxford: Oxford Univ. Press, 1987.

Поступила в редакцию 11 января 2026 г.
После доработки 11 января 2026 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Туманян Ани Гагиковна (ORCID 0000-0003-3991-7900)
Российско-Армянский Университет
ул. О. Эмина 123, Ереван 0051, Армения;
Siemens Industry Software
ул. Алабяна 16, Ереван 0038, Армения
ani.tumanyan@rau.am