*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2026. Том 67, № 2*

*УДК 517.95*

# О РАДИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С $p(|x|)$–ЛАПЛАСИАНОМ

**Ар. С. Терсенов, Р. Ч. Сафаров**

**Аннотация.** Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения с $p(|x|)$-лапласианом и младшими членами, не удовлетворяющими условию Бернштейна — Нагумо. При условии, что $p(|x|)$ является непрерывно дифференцируемой невозрастающей функцией, доказано существование слабого радиально симметричного решения с непрерывной по Гёльдеру производной.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.211

**Ключевые слова:** уравнение с $p(|x|)$-лапласианом, условие Бернштейна — Нагумо, радиально симметричные решения, априорные оценки.

*Посвящается юбилею*
*Геннадия Владимировича Демиденко*

## § 1. Введение и основные результаты

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-div(|\nabla u|^{p(|x|)-2}\nabla u) = F(x, u, \nabla u) \quad \text{в} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.2}$$

где $\Omega$ — некоторая ограниченная область, $\partial\Omega$ — граница $\Omega$, $p(|x|) > 2$. Один из подходов для исследования краевых задач для (1.1) базируется на методах вариационного исчисления, что связано с вариационностью главной части указанных уравнений. Наличие в уравнении градиентных членов существенно осложняет применение этих методов. В этом случае для доказательства разрешимости краевых задач широко используются топологические и аппроксимационные методы.

Исследованию краевых задач для уравнения (1.1) посвящена обширная литература. Нас интересуют радиально симметричные решения краевых задач для (1.1) при наличии в уравнении градиентных членов. В связи с этим мы ограничимся ссылками на те работы, в которых такие исследования проводились. Если говорить о работах, в которых присутствуют градиентные члены, то можно отметить [1, 2], где с помощью аппроксимационных методов доказывается существование слабых решений краевых задач для (1.1) при постоянном $p$. Также при постоянном $p$ в работах [3–7] с помощью различных топологических

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0028).

методов, основанных на теоремах лиувиллевского типа, на методе суб- /суперрешений с последующим применением теоремы Красносельского доказаны аналогичные результаты. Что касается работ, в которых исследовались радиально симметричные решения при $p = p(|x|)$, отметим работы [8, 9], в которых с помощью методов вариационного исчисления было доказано существование слабых соболевских радиально симметричных решений. В [10] рассматривалась задача с $p = p(|x|)$ и градиентными членами, в которой было доказано существование разрушающихся на границе радиально симметричных решений.

Во всех вышеперечисленных работах функция $F(x, u, q)$ удовлетворяет условию Бернштейна — Нагумо

$$|F(x, u, q)| \leq c(1 + |q|^{p(x)}) \quad \text{для} \quad (x, u, q) \in \overline{\Omega} \times [-M, M] \times \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

с некоторой постоянной $c$, при условии, что решение удовлетворяет условию $\max |u| \leq M$ с некоторой постоянной $M$. Нас интересует разрешимость краевых для задач для (1.1) в случае, когда функция $F(x, u, q)$ имеет произвольный рост по переменной $q$. В связи с этим отметим результаты статьи [11], где с помощью метода суб-/суперрешений были получены результаты о существовании решения при нарушении условия (1.3) при определенных условиях малости на коэффициенты уравнения. Нелинейность по градиенту предполагается не более чем полиномиальная.

В [12, 13] было доказано существование радиально симметричных решений задачи Дирихле для (1.1) без каких-либо условий малости, когда показатель $p$ постоянен и условие (1.3) не имеет места. Новизна результатов данной работы заключается в получении аналогичных результатов в случае, когда показатель $p$ зависит от $|x|$.

Итак, нас интересует существование ограниченных радиально симметричных решений задачи (1.1), (1.2), где $\Omega = B_R$ — шар радиуса $R$. Будем предполагать, что функция $F(x, u, \nabla u)$ может быть представлена в виде $F(r, u, u_r)$ при замене переменных $r = |x|$. Примерами таких функций являются, например, функции вида

$$F(|x|, u, |\nabla u|), \quad F(|x|, u, x \cdot \nabla u),$$

где $x \cdot \nabla u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_{x_i}$. В дальнейшем производную функции $u$ по переменной $r$ будем обозначать через $u'$. Как известно, ограниченное радиально симметричное решение (1.1), (1.2) удовлетворяет уравнению

$$-(|u'|^{p(r)-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p(r)-2}u' = F(r, u, u'), \quad r \in (0, R), \tag{1.4}$$

и краевым условиям

$$u'(0) = 0, \quad u(R) = 0. \tag{1.5}$$

Дадим определение решения задачи (1.4), (1.5).

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $u(r)$ является *решением задачи* (1.4), (1.5), если $u'(r)$ непрерывна по Гёльдеру на $[0, R]$, удовлетворяет (1.5) и имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_0^R |u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\phi'(r)\,dr = \int\limits_0^R \frac{n-1}{r}|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\phi(r)\,dr$$

$$+ \int\limits_0^R F(r, u(r), u'(r))\phi(r)\,dr \quad \forall \phi(r) \in \mathbb{C}_0^\infty(0, R).$$

В силу указанной в определении гладкости искомого решения краевые условия (1.5) понимаются в обычном смысле.

Представим $F$ в виде
$$F(r,u,u') = g_0(r,u) + g(r,u,u') + f(r),$$
причем $F(r,0,0)$ не обращается тождественно в нуль и
$$\lim_{|u|\to\infty} |g_0(r,u) + g(r,u,0)| = \infty, \tag{1.6}$$
$$u(g_0(r,u) + g(r,u,0)) < 0, \quad u \neq 0. \tag{1.7}$$
Например, $g_0(r,u) + g(r,u,q) = -u|u|^s - ue^{r|q|^\mu}$, $s > 0$, удовлетворяет условиям (1.6), (1.7).

Положим
$$\max_{r\in[0,R],|u|\le M} (g_0(r,u) + g(r,u,0) + f(r)) = M_*, \quad \max_{r\in[0,R]} |f| = f_*.$$
Предположим, что $g(r,u,u')$ удовлетворяет условиям
$$g(r,u,-q) \le 0, \quad u > 0, \quad g(r,u,q) \ge 0, \quad u < 0, \tag{1.8}$$
где $q \in [q_0,q_1]$, $1 \le q_0 < q_1$, $r \in [0,R]$, $|u| \le M$
$$|g(r,u,q) - g(s,u,q)| \le K(r,s,u,q)(r-s) \tag{1.9}$$
для $r,s \in (0,R)$, $0 < r-s$, $|u| \le M$, $|q| \in [q_0,q_1]$, где $K \ge 0$,
$$g(r,u_2,q) - g(r,u_1,q) \ge \gamma(r,u_1,u_2,q)(u_1-u_2) \tag{1.10}$$
для $r \in (0,R)$, $|u_1|,|u_2| \le M$, $u_1 > u_2$, $|q| \in [q_0,q_1]$, где $\gamma(r,u_1,u_2,q) \ge 0$.

Предположим, что неравенства
$$K(r,s,u_1,\pm q) - \gamma(r,u_1,u_2,\pm q)\widetilde{q} \le 0. \tag{1.11}$$
выполнены для любых $r$, $s$, $u_1$, $u_2$, $\widetilde{q}$ и $q$, удовлетворяющих условиям
$$(r,s) \in (0,R), s < r;\ |u_1|,|u_2| \le M, u_1 - u_2 \ge \widetilde{q}(r-s);\ \widetilde{q},q \in [q_0,q_1], q < \widetilde{q}.$$

**Теорема 1.2.** *Пусть* $F(r,u,u') \in \mathbb{C}([0,R]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $p(r) \in \mathbb{C}^1[0,R]$, $p' \le 0$ *и выполнены условия* (1.6)–(1.11). *Тогда существует слабое решение задачи* (1.4), (1.5) *такое, что функция* $|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)$ *непрерывна по Липшицу на* $[0,R]$ *и* $u(r)$ *удовлетворяет следующим оценкам:*
$$|u(r)| \le M, \quad |u'(r)| \le q_1,$$
*где* $M$ *зависит от* $f_*$, $g_0$ *и* $g$, *а* $q_1$ *зависит от* $M$ *и* $\max_{r\in[0,R]}|p'(r)|$.

Ниже мы приводим примеры функций, удовлетворяющих условиям (1.6)–(1.11) [14]:
$$g = rq^{2k+1} - u|q|^\nu,\ 2k > \nu; \quad g = -ue^{r|q|^\mu},\ \mu < 1; \quad g = rq^{2k+1} - ue^{|q|}.$$
Для того чтобы доказать теорему 1.2 регуляризуем уравнение (1.4) и докажем классическую разрешимость регуляризованной задачи, основываясь на технике, разработанной в [12, 13], и используя принцип неподвижной точки. Далее используем процедуру предельного перехода для получения слабого решения задачи (1.4), (1.5).

Статья организована следующим образом. В § 2 мы получаем априорную оценку классического решения регуляризованной задачи. Параграф 3 посвящен получению априорной оценки производной классического решения регуляризованной задачи. В § 4 доказывается теорема существования классического решения регуляризованной задачи (см. теорему 4.2), а также приведено доказательство существования слабого в смысле определения 1.1 решения задачи (1.4), (1.5) (см. теорему 1.2).

## § 2. Априорная оценка решения регуляризованной задачи

Рассмотрим следующую регуляризацию уравнения (1.4):

$$-((u'^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u')' - \frac{n-1}{r}(u'^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u' = F(r,u,u'), \tag{2.1}$$

где постоянная $\alpha \in (0,1)$ такова, что $(u'^{\alpha})^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} = |u'|^{p(r)-2}$, $\varepsilon > 0$. В качестве $\alpha$ можно взять $\alpha = \frac{m}{k}$, где $m$ — четное число, $k$ — целое положительное число. Перепишем уравнение (2.1) в недивергентном виде

$$-a_{\varepsilon}(r,u')u'' - \frac{n-1}{r}(u'^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u' - b_{\varepsilon}(r,u') = F(r,u,u'), \tag{2.2}$$

где

$$a_{\varepsilon}(r,z) = (z^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}-1}((p(r)-1)z^{\alpha}+\varepsilon),\ b_{\varepsilon}(r,z) = \frac{1}{\alpha}p'(r)z(z^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}\ln(z^{\alpha}+\varepsilon).$$

Нетрудно видеть, что $a_{\varepsilon}(r,z)$ является четной функцией по $z$. Будем исследовать существование классического решения задачи (2.2), (1.5). Для этого дадим определение этого понятия.

Определение 2.1. Функцию $u(r) \in \mathbb{C}^2(0,R) \cap \mathbb{C}^1[0,R]$, удовлетворяющую уравнению (2.2) в каждой точке интервала $(0,R)$, а также краевым условиям (1.5), понимаемым в обычном смысле, будем называть *классическим решением задачи* (2.2), (1.5).

Наша цель в этом параграфе получить априорную оценку решения задачи (2.2), (1.5), не зависящую от параметра регуляризации.

**Лемма 2.1.** *Пусть $F \in \mathbb{C}([0,R]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ и выполнены условия* (1.6), (1.7). *Тогда для любого классического решения задачи* (2.2), (1.5) *имеет место следующая оценка:*

$$|u(r)| \le M$$

*с некоторой постоянной $M$, зависящей от $f_*$, $g_0(r,u)$, $g(r,u,0)$.*

Доказательство. Пусть в точке $r = r_0 \in (0,R)$ функция $u(r)$ достигает положительного максимума и $f(r_0) > 0$, тогда $u'(r_0) = 0$ и $u''(r_0) \le 0$. Из (2.2), учитывая, что $b_{\varepsilon}(r,0) = 0$, получим

$$g_0(r_0,u(r_0)) + g(r_0,u(r_0),0) + f(r_0) \ge 0.$$

Принимая во внимание (1.7), получаем

$$|g_0(r_0,u(r_0)) + g(r_0,u(r_0),0)| \le f(r_0) \le f_*,$$

откуда в силу (1.6) немедленно вытекает существование постоянной $M_1 > 0$, зависящей от $f_*$ и $g_0(r,u)$, $g(r,u,0)$, такой, что

$$u(r_0) \le M_1.$$

Если же $f(r_0) \le 0$, то $r_0$ не может быть точкой положительного максимума функции $u$.

Переходим к исследованию поведения $u$ на границе. Если $r = 0$ является точкой положительного максимума функции $u$, то существует $\delta$-окрестность точки $r = 0$ такая, что для любого $r \in (0, \delta)$ имеем $u(r) > 0$, $u'(r) \leq 0$ и $u''(r) \leq 0$. Тогда из (2.2) для указанных значений $r$ получим

$$b_\varepsilon(r, u') + F(r, u, u') \geq 0.$$

Устремляя $r \to 0$, учитывая (1.5), $b_\varepsilon(r, 0) = 0$, предполагая, что $f(0) > 0$, в пределе получаем

$$|g_0(0, u(0)) + g(0, u(0), 0)| \leq f(0) \leq f_*$$

и как следствие

$$u(0) \leq M_1.$$

Если $f(0) \leq 0$, то достижение функцией $u$ положительного максимума в нуле невозможно. Так как $u(R) = 0$, то в итоге имеем

$$u(r) \leq M_1, \quad r \in [0, R]. \tag{2.3}$$

Предполагая, что в точке $r = r_1 \in (0, R)$ функция $u$ достигает отрицательного минимума, и действуя аналогично предыдущим рассуждениям, легко показать, что существует постоянная $M_2 > 0$, зависящая от $f_*$ и $g_0(r, u)$, $g(r, u, 0)$, такая, что

$$u(r) \geq -M_2. \tag{2.4}$$

Таким образом, из (2.3), (2.4) вытекает, что решения задачи (2.2), (1.5) удовлетворяют

$$|u(r)| \leq M \quad \forall r \in (0, R), \quad M = \max\{M_1, M_2\}. \quad \square$$

Введем неубывающую неотрицательную функцию $\psi(\rho) \in \mathbb{C}^1(0, +\infty)$ такую, что существуют постоянные $q_0$, $q_1$, которые удовлетворяют $1 \leq q_0 < q_1 < +\infty$, и выполнено

$$\int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)} = 2M. \tag{2.5}$$

Положим

$$\tau(\kappa) = \int\limits_{\kappa}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)},$$

где параметр $\kappa$ меняется в пределах $[q_0, q_1]$, а функция $\psi$ определена в (2.5). Пусть

$$\tau_0 \equiv \tau(q_0) = \int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)}.$$

Введем функцию $\mathrm{h}(\tau)$ как решение следующей задачи:

$$\mathrm{h}'' + \psi(|\mathrm{h}'|) = 0, \quad \mathrm{h}(0) = 0, \quad \mathrm{h}(\tau_0) = 2M. \tag{2.6}$$

Легко видеть, что

$$\mathrm{h}(\tau(\kappa)) = \int\limits_{\kappa}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}.$$

Более того, $\mathrm{h}(\tau_0) = 2M$ (в силу (2.5) ). Заметим, что $\mathrm{h}'(\tau) \geq 1$ для $\tau \in [0, \tau_0]$.

**Лемма 2.2.** *Пусть выполнены условия леммы* 2.1, *а также условия* (1.8), (2.5). *Тогда для любого классического решения задачи* (2.2), (1.5) *имеет место следующая оценка:*

$$|u(r)| \leq h(R-r), \quad r \in [R-\tau_0, R] \cap [0, R].$$

Доказательство. Введем следующий оператор:

$$\mathrm{L} \equiv -a_\varepsilon(r, u'(r)) \frac{d^2}{dr^2}.$$

Тогда

$$\mathrm{L}u = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u' + b_\varepsilon(r, u') + F(r, u, u')$$

и для $\zeta = R - r$, используя (2.6),

$$\mathrm{Lh}(\zeta) = -a_\varepsilon(r, u'(r))\mathrm{h}''(\zeta) = a_\varepsilon(r, u'(r))\psi(|\mathrm{h}'(\zeta)|).$$

Таким образом, для функции $v(r) \equiv u(r) - \mathrm{h}(\zeta)$ получаем

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}u - \mathrm{Lh} = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u' + b_\varepsilon(r, u') + F(r, u, u') - a_\varepsilon(r, u'(r))\psi(|\mathrm{h}'(\zeta)|). \tag{2.7}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}u - \mathrm{Lh} = -a_\varepsilon(r, u'(r))v''. \tag{2.8}$$

Следовательно, из (2.7), (2.8) получаем

$$-a_\varepsilon(r, u')v'' = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u' + b_\varepsilon(r, u') + F(r, u, u') - a_\varepsilon(r, u'(r))\psi(|\mathrm{h}'(\zeta)|). \tag{2.9}$$

Предположим, что в некоторой точке $r_0 \in (R - \tau_0, R)$ функция $v(r)$ достигает положительного максимума. Тогда $u(r_0) > 0$, $v'(r_0) = 0$, откуда следует, что $u'(r_0) = -\mathrm{h}'(R - r_0)$ и $\mathrm{L}v|_{r=r_0} \geq 0$. Так как $p(r) \in \mathbb{C}^1[0, R]$, $\mathrm{h}' \geq 1$ и выполнено (1.8), то

$$\begin{aligned}
[b_\varepsilon(r, -\mathrm{h}') + F(r, u, -\mathrm{h}')]\,|_{r=r_0} &\leq [b_\varepsilon(r, -\mathrm{h}') + g_0(r, u) + f(r)]\,|_{r=r_0} \\
&\leq \frac{1}{\alpha}|p'(r)|\,\mathrm{h}'((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} \ln((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)|_{r=r_0} + M_* \\
&\leq \frac{1}{\alpha}|p'(r)|\,\mathrm{h}'((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}+1}|_{r=r_0} + M_*.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Можно заметить, что для любого $\mu > 0$ функция $\psi(\mathrm{h}'(\zeta)) = \mu \mathrm{h}'^2(\zeta) + M_*$ удовлетворяет (2.5) с определенными $q_0 \geq 1$, $q_1$ за счет выбора $q_1$. Дифференцируя $a_\varepsilon(r, z)$, легко показать, что эта функция является возрастающей по параметру $\varepsilon$, откуда следует оценка

$$\begin{aligned}
a_\varepsilon(r, z) &= ((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}-1}((p(r)-1)(-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon) \\
&\geq (p(r)-1)(\mathrm{h}')^{p(r)-2} \geq q_0^{p(r)-2}(p(r)-1) \geq 1.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Учитывая (2.10), (2.11), взяв указанное $\psi$, легко получить, что для выполнения неравенства

$$[b_\varepsilon(r, -\mathrm{h}') + F(r, u, u')]\,|_{r=r_0} < a_\varepsilon(r, -\mathrm{h}')\psi(\mathrm{h}'(\zeta))|_{r=r_0} \tag{2.12}$$

достаточно, чтобы имело место неравенство (напомним, что $(-\mathrm{h}')^\alpha = (\mathrm{h}')^\alpha$)

$$\frac{1}{\alpha}|p'(r)|((\mathrm{h}')^\alpha+\varepsilon)|_{r=r_0} < \mu \mathrm{h}'|_{r=r_0}.$$

Это, очевидно, имеет место при $\frac{1}{\alpha}\max\limits_{r\in[0,R]}|p'(r)|(1+\varepsilon) < \mu$. Таким образом, из (2.5), (2.10) и (2.12) вытекает

$$-a_\varepsilon(r,u'(r))v'' \le \frac{n-1}{r}(u'^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'+b_\varepsilon(r,u')+F(r,u,u')-a_\varepsilon(r,u'(r))\psi(\mathrm{h}'(\zeta)) < 0, \tag{2.13}$$

противоречие с тем, что $v$ достигает положительного максимума внутри $(R-\tau_0, R)$.

Рассмотрим $v$ на границе. Если $\tau_0 \ge R$, то на сегменте $[0,R]$ получаем

1) $v'(0) = u'(0)+\mathrm{h}'(R) = \mathrm{h}'(R) > 0$ при $r=0$, следовательно, на этом конце функция $v$ не может достигать максимума;

2) $v(R) = u(R)-\mathrm{h}(0) = 0$ при $r=R$.

Если $\tau_0 < R$, то на сегменте $[R-\tau_0, R]$ получаем

3) $v(R-\tau_0) = u(R-\tau_0)-\mathrm{h}(\tau_0) < 0$ при $r = R-\tau_0$ из леммы 2.1 и (2.5);

4) $v(R) = u(R)-\mathrm{h}(0) = 0$ при $r=R$.

В итоге $v(r) \le 0$,

$$u(r) \le \mathrm{h}(R-r). \tag{2.14}$$

Перейдем к получению оценки снизу. Введем функцию $w(r) \equiv u(r)+\mathrm{h}(\zeta)$. Аналогично (2.9) получаем

$$\begin{aligned} -a_\varepsilon(r,u'(r))w'' \le \frac{n-1}{r}(u'^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'+b_\varepsilon(r,u') \\ +F(r,u,u')-a_\varepsilon(r,u'(r))\psi(\mathrm{h}'(\zeta)) < 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Предположим, что в некоторой точке $r_1 \in (R-\tau_0, R)$ функция $w(r)$ достигает отрицательного минимума. Тогда $u(r_1) < 0$, $w_r(r_1) = 0$, откуда следует $u_r(r_1) = \mathrm{h}'(R-r_1)$ и $\mathrm{L}w|_{r=r_1} \le 0$. С другой стороны, используя второе условие в (1.8), а также (2.10), (2.12), которые также имеют место при замене $-\mathrm{h}'$ на $\mathrm{h}'$, из (2.15) (аналогично (2.13)) получаем

$$-a_\varepsilon(r,u_r)w_{rr}|_{r=r_1} > 0.$$

Это противоречит предположению о том, $w(r)$ достигает отрицательного минимума $r=r_1$. Рассмотрим $w$ на границе. Если $\tau_0 \ge R$, то на сегменте $[0,R]$ получаем:

1) $w'(0) = u'(0)-\mathrm{h}'(R) = -\mathrm{h}'(R) < 0$ при $r=0$, следовательно, на этом конце функция $w$ не может достигать минимума;

2) $w(R) = u(R)+\mathrm{h}(0) = 0$ при $r=R$.

Если $\tau_0 < R$, то на сегменте $[R-\tau_0, R]$ получаем

3) $w(R-\tau_0) = u(R-\tau_0)+\mathrm{h}(\tau_0) > 0$ при $r=R-\tau_0$ из леммы 2.1 и (2.5);

4) $w(R) = u(R)+\mathrm{h}(0) = 0$ при $r=R$.

Значит, $w(r) \ge 0$,

$$u(r) \ge -\mathrm{h}(R-r). \tag{2.16}$$

Из (2.14), (2.16) заключаем, что

$$|u(r)| \le \mathrm{h}(R-r), \quad r\in[R-\tau_0, R]. \quad \square$$

## § 3. Априорная оценка производной решения регуляризованной задачи

Перейдем к оценке производной классического решения регуляризованной задачи.

**Лемма 3.1.** *Пусть выполнены условия лемм* 2.1, 2.2, *а также условия* (1.9)–(1.11). *Предположим, что* $p'(r) \le 0$. *Тогда для любого классического решения задачи* (2.2), (1.5) *выполнена следующая оценка:*

$$|u'(r)| \le h'(0), \quad r \in [0, R].$$

Доказательство. Запишем уравнение (2.2) в двух различных точках $r = x$ и $r = y$

$$-a_\varepsilon(x, u'(x))u''(x) = \frac{n-1}{x}\big(u'^\alpha(x) + \varepsilon\big)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x) \\ + b_\varepsilon(x, u'(x)) + F(x, u(x), u'(x)), \quad (3.1)$$

$$-a_\varepsilon(y, u'(y))u''(y) = \frac{n-1}{y}\big(u'^\alpha(y) + \varepsilon\big)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y) \\ + b_\varepsilon(y, u'(y)) + F(y, u(y), u'(y)), \quad (3.2)$$

где $x, y \in (0, R)$. Вычитая (3.2) из (3.1), получаем

$$-a_\varepsilon(x, u'(x))u''(x) + a_\varepsilon(y, u'(y))u''(y) \\ = b_\varepsilon(x, u'(x)) - b_\varepsilon(y, u'(y)) + \frac{n-1}{x}\big(u'^\alpha(x) + \varepsilon\big)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x) \\ - \frac{n-1}{y}(u'^\alpha(y) + \varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y) + F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)). \quad (3.3)$$

Положим $V(x, y) = u(x) - u(y)$. Принимая во внимание равенства $V_{xx} = u''(x)$, $V_{yy} = -u''(y)$, запишем (3.3) в следующем виде:

$$-a_\varepsilon(x, u'(x))V_{xx} - a_\varepsilon(y, u'(y))V_{yy} \\ = b_\varepsilon(x, u'(x)) - b_\varepsilon(y, u'(y)) + \frac{n-1}{x}(u'^\alpha(x) + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x) \\ - \frac{n-1}{y}(u'^\alpha(y) + \varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y) + F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)).$$

Определим линейный оператор

$$\widetilde{L} \equiv -a_\varepsilon(x, u'(x))\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_\varepsilon(y, u'(y))\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Функция $\mathrm{h}(x - y)$ удовлетворяет равенству

$$\widetilde{L}\mathrm{h} = -a_\varepsilon(x, u'(x))\mathrm{h}_{xx} - a_\varepsilon(y, u'(y))\mathrm{h}_{yy} = -(a_\varepsilon(x, u'(x)) + a_\varepsilon(y, u'(y)))\mathrm{h}''(x - y).$$

Для функции $W(x, y) = V(x, y) - \mathrm{h}(x - y)$ имеем

$$\widetilde{L}W = -a_\varepsilon(x, u'(x))W_{xx} - a_\varepsilon(y, u'(y))W_{yy} = \widetilde{L}V - \widetilde{L}\mathrm{h} \\ = \frac{n-1}{x}\big(u'^\alpha(x) + \varepsilon\big)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x) - \frac{n-1}{y}\big(u'^\alpha(y) + \varepsilon\big)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y) + b_\varepsilon(x, u'(x)) - b_\varepsilon(y, u'(y)) \\ + F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)) + (a_\varepsilon(x, u'(x)) + a_\varepsilon(y, u'(y)))\mathrm{h}''. \quad (3.4)$$

Рассмотрим (3.4) в области $P = \{(x, y) : x \in (0, R), y \in (0, R),\ 0 < x - y < \tau_0\}$.

Пусть $\tau_0 < R$. Предположим, что в некоторой точке $Q_0 = (x_0, y_0) \in P$ функция $W(x, y)$ достигает положительного максимума. Тогда $W_{xx}(x_0, y_0) \le 0$, $W_{yy}(x_0, y_0) \le 0$ и как следствие

$$\widetilde{L}W|_{Q_0} \ge 0. \tag{3.5}$$

В то же время имеют место следующие соотношения

$$W_x(x_0, y_0) = W_y(x_0, y_0) = 0,\ u'(x_0) = u'(y_0) = \mathrm{h}'(x_0 - y_0),\ u(x_0) > u(y_0). \tag{3.6}$$

Используя тот факт, что $p' \le 0$, $x_0 > y_0$, получаем

$$\left[\frac{n-1}{x}(u'^{\alpha}(x) + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x) - \frac{n-1}{y}(u'^{\alpha}(y) + \varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y)\right]|_{Q_0} < 0. \tag{3.7}$$

Из (2.12), (3.4), (3.6), (3.7) и четности функции $a_\varepsilon$ следует, что

$$\begin{aligned}\widetilde{L}W|_{Q_0} < b_\varepsilon(x_0, u'(x_0)) - b_\varepsilon(y_0, u'(y_0)) + F(x_0, u(x_0), u'(x_0)) - F(y_0, u(y_0), u'(y_0))\\ - (a_\varepsilon(x_0, u'(x_0)) + a_\varepsilon(y_0, u'(y_0)))\psi(\mathrm{h}'(x_0 - y_0))\\ \le g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))\end{aligned}$$

Чтобы получить противоречие с неравенством (3.5), необходимо показать, что

$$g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) \le 0. \tag{3.8}$$

Представим (3.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))\\ &\quad= [g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))]\\ &\qquad+ [g(y_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))].\end{aligned} \tag{3.9}$$

Используя условия (1.9), (1.10), из (3.9) получим

$$\begin{aligned}&g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))\\ &\quad\le [K(x_0, y_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))(x_0 - y_0)\\ &\qquad- \gamma(x_0, u(x_0), u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))(u(x_0) - u(y_0))].\end{aligned} \tag{3.10}$$

В точке максимума

$$u(x_0) - u(y_0) > \mathrm{h}(x_0 - y_0) = \mathrm{h}(x_0 - y_0) - \mathrm{h}(0) = \mathrm{h}'(\xi)(x_0 - y_0), \quad 0 < \xi < x_0 - y_0. \tag{3.11}$$

Положим для упрощения записи

$$K(x_0, y_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) = K(\cdot, \mathrm{h}'(x_0 - y_0)),$$

$$\gamma(x_0, u(x_0), u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) = \gamma(\cdot, \mathrm{h}'(x_0 - y_0)).$$

Используя (1.11), (3.11), неравенство (3.10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))\\ &\quad\le [K(\cdot, \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - \gamma(\cdot, \mathrm{h}'(x_0 - y_0))\mathrm{h}'(\xi)](x_0 - y_0) \le 0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Таким образом, $\widetilde{L}W|_{Q_0} < 0$ и, как следствие, $W$ не может достигать положительного максимума внутри $P$.

Рассмотрим $W$ на границе $\partial P$. Из леммы 2.2 следует, что

1) при $x = R$, $y \in [R-\tau_0, R]$ имеем

$$W(x,y)\Big|_{x=R} = u(R) - u(y) - \mathrm{h}(R-y) \le 0;$$

2) при $x = y$ имеем

$$W(x,y)|_{x=y} = u(x) - u(y) - \mathrm{h}(x-y)|_{x=y} = -\mathrm{h}(0) = 0;$$

3) при $x - y = \tau_0$, $x \in [\tau_0, R]$

$$W(x,y)|_{y=x-\tau_0} = u(x) - u(y) - \mathrm{h}(\tau_0) \le 0,$$

используя (2.5) и параметрическое представление функции h;

4) при $y = 0$, $x \in [0, \tau_0]$

$$W_y(x,y)|_{y=0} = -u_y(0) + \mathrm{h}'(x) = \mathrm{h}'(x) > 0.$$

Это означает, что $W$ не может достигать положительного максимума на этой части границы. Итак, $W(x,y) \le 0$, откуда

$$u(x) - u(y) \le \mathrm{h}(x-y), \quad (x,y) \in \overline{P}. \tag{3.13}$$

Аналогичный результат легко получить подобным же образом и в случае $\tau_0 \ge R$. В этом случае $P = \{(x,y) : x \in (0,R), y \in (0,R), x > y\}$.

Оценим разность $u(x) - u(y)$ снизу. Пусть $\tau_0 < R$, рассмотрим функцию $\widetilde{W} = \widetilde{V}(x,y) - \mathrm{h}(x-y) = u(y) - u(x) - \mathrm{h}(x-y)$. Вычитая (3.1) из (3.2), с учетом соотношений $\widetilde{V}_{xx} = -u''(x)$, $\widetilde{V}_{yy} = u''(y)$, получаем

$$\begin{aligned}
&- a_\varepsilon(y, u'(y))\widetilde{V}_{yy} - a_\varepsilon(x, u'(x))\widetilde{V}_{xx} \\
&\quad = -\frac{n-1}{x}(u'^{\alpha}(x) + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x) + \frac{n-1}{y}(u'^{\alpha}(y) + \varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y) \\
&\qquad - b_\varepsilon(x, u'(x)) + b_\varepsilon(y, u'(y)) - F(x, u(x), u'(x)) + F(y, u(y), u'(y)),
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}\widetilde{V} - \widetilde{L}\mathrm{h} = \widetilde{L}\widetilde{W} \\
&\quad = -\frac{n-1}{x}(u'^{\alpha}(x) + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x) + \frac{n-1}{y}(u'^{\alpha}(y) + \varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y) \\
&\quad - b_\varepsilon(x, u'(x)) + b_\varepsilon(y, u'(y)) - F(x, u(x), u'(x)) + F(y, u(y), u'(y)) \\
&\qquad - (a_\varepsilon(x, u'(x)) + a_\varepsilon(y, u'(y)))\psi(\mathrm{h}'(x-y)).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Предположим, что в некоторой точке $Q_1 = (x_1, y_1) \in P$ функция $\widetilde{W}(x,y)$ достигает своего положительного максимума. Тогда

$$\begin{gathered}
\widetilde{W}_x(x_1,y_1) = \widetilde{W}_y(x_1,y_1) = 0, \quad \widetilde{W}_{xx}(x_1,y_1) \le 0, \quad \widetilde{W}_{yy}(x_1,y_1) \le 0, \\
u'(x_1) = u'(y_1) = -\mathrm{h}'(x_1 - y_1), \quad \widetilde{L}\widetilde{W}|_{Q_1} \ge 0.
\end{gathered} \tag{3.15}$$

С другой стороны, из (2.12), (3.7), (3.14), (3.15), $p' \le 0$ и четности функций $a_\varepsilon$ следует, что

$$\widetilde{L}\widetilde{W}|_{Q_1} < -g(x_1, u(x_1), -\mathrm{h}'(x_1 - y_1)) + g(y_1, u(y_1), -\mathrm{h}'(x_1 - y_1))$$

Действуя так же, как в (3.8)–(3.12), учитывая, что здесь $u(y_1) > u(x_1)$, получаем

$$\widetilde{L}\widetilde{W}|_{Q_1} < 0.$$

Это противоречит предположению о том, что $\widetilde{W}$ достигает своего положительного максимума внутри $P$.

Рассмотрим $\widetilde{W}$ на $\partial P$. Из леммы 2.2 следует, что

1) при $x = R$, $y \in [R - \tau_0, R]$ имеем

$$\widetilde{W}(x,y)\Big|_{x=R} = u(y) - u(R) - \mathrm{h}(R-y) \le 0;$$

2) при $x = y$ имеем

$$\widetilde{W}(x,y)|_{x=y} = u(y) - u(x) - \mathrm{h}(x-y)|_{x=y} = -\mathrm{h}(0) = 0;$$

3) при $x - y = \tau_0$, $x \in [\tau_0, R]$

$$\widetilde{W}(x,y)|_{y=x-\tau_0} = u(y) - u(x) - \mathrm{h}(\tau_0) \le 0,$$

используя (2.5) и параметрическое представление функции h;

4) при $y = 0$, $x \in [0, \tau_0]$

$$\widetilde{W}_y(x,y)|_{y=0} = u_y(0) + \mathrm{h}'(x) = \mathrm{h}'(x) > 0.$$

Это означает, что $\widetilde{W}$ не может достигать положительного максимума на этой части границы. Таким образом, $\widetilde{W}(x,y) \le 0$, откуда

$$u(y) - u(x) \le \mathrm{h}(x-y), \quad (x,y) \in \overline{P}. \tag{3.16}$$

Аналогичный результат легко получить подобным же образом и в случае $\tau_0 \ge R$. В этом случае $P = \{(x,y) : x \in (0,R), y \in (0,R), x > y\}$.

Из (3.13) и (3.16) следует, что

$$|u(x) - u(y)| \le \mathrm{h}(x-y), \quad (x,y) \in \overline{P}.$$

В силу симметрии переменных $x$, $y$ можно аналогичным образом рассматривать случай $x < y$, чтобы получить оценку $|u(x) - u(y)| \le \mathrm{h}(y-x)$. Следовательно,

$$|u(x) - u(y)| \le \mathrm{h}(|x-y|), \quad x, y \in \overline{P}.$$

Замечая, что $\mathrm{h}(0) = 0$, можно переписать последнее неравенство в виде

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|} \le \frac{\mathrm{h}(|x-y|) - \mathrm{h}(0)}{|x-y|},$$

откуда сразу следует требуемая оценка градиента

$$|u'(x)| \le \mathrm{h}'(0), \quad x \in [0,R].$$

## § 4. Доказательство теорем существования

Рассмотрим решение $u_\varepsilon$ регуляризованного уравнения (2.1)

$$-((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u'_\varepsilon)' - \frac{n-1}{r}((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u'_\varepsilon = F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) \tag{4.1}$$

вместе с краевым условием (1.5), которые запишем для $u_\varepsilon$:

$$u'_\varepsilon(0) = 0, \quad u_\varepsilon(R) = 0. \tag{4.2}$$

Для того чтобы доказать существование классического решения задачи (4.1), (4.2), необходимо показать, что выражение $\frac{n-1}{r}((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u'_\varepsilon$ ограничено при $r \to 0$. Обозначим $Z(r) = ((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u'_\varepsilon$. Имеет место следующая

**Лемма 4.1.** *Если $u_\varepsilon$ является классическим решением задачи* (4.1), (4.2), *то $Z(r) \in \mathbb{C}^1[0,R)$ и*

$$Z'(0) = -\frac{F(0,u_\varepsilon(0),0)}{n}.$$

Доказательство этой леммы без предварительной регуляризации в случае $F \equiv 0$ приведено в [15]. Для уравнения вида (4.1) с постоянным показателем $p$ доказательство можно посмотреть в [14]. Но это же самое доказательство без каких-либо изменений может быть использовано и в случае $p = p(r)$, так как используется представление регуляризованного уравнения в дивергентном виде и член $b_\varepsilon(r,u'_\varepsilon)$ не возникает.

Перейдем к доказательству существования классического решения задачи (4.1), (4.2).

**Теорема 4.2.** *Пусть $F(r,u_\varepsilon,u'_\varepsilon) \in \mathbb{C}([0,R]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $p(r) \in \mathbb{C}^1[0,R]$, $p'(r) \leq 0$ и выполнены условия* (1.6)–(1.11). *Тогда существует классическое решение задачи* (4.1), (4.2) *такое, что функция $|u'_\varepsilon(r)|^{p(r)-2}u'_\varepsilon(r)$ непрерывна по Липшицу на $[0,R]$ и $u_\varepsilon(r)$ удовлетворяет следующим оценкам:*

$$|u_\varepsilon| \leq M, \quad |u'_\varepsilon| \leq q_1,$$

*где $M$ зависит от $f_*$ и $g_0$, $g$, а $q_1 = h'(0)$.*

Доказательство. Из леммы 4.1 вытекает равномерная по $\varepsilon$ ограниченность функции $Z'$ в $[0,R]$ и, как следствие, непрерывность по Липшицу функции $|u'_\varepsilon(r)|^{p(r)-2}u'_\varepsilon(r)$ с постоянной Липшица, не зависящей от $\varepsilon$. Положим

$$G(r,u_\varepsilon,u'_\varepsilon) = F(r,u_\varepsilon,u'_\varepsilon) + b_\varepsilon(r,u'_\varepsilon)$$

и перепишем (4.1) в виде

$$-a_\varepsilon(r,u'_\varepsilon)u''_\varepsilon - \frac{n-1}{r}((u'_\varepsilon)^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u'_\varepsilon = G(r,u_\varepsilon,u'_\varepsilon).$$

Для любой $z \in \mathbb{C}^1[0,R]$ функции $G(r,z,z')$ и $a_\varepsilon(r,z')$ принадлежат $\mathbb{C}[0,R]$. Положим

$$g_{(z)}(r) = \frac{((z')^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}}{a_\varepsilon(r,z')} = \frac{(z')^\alpha+\varepsilon}{(p(r)-1)(z')^\alpha+\varepsilon}, \quad G_{(z)}(r) = -\frac{G(r,z,z')}{a_\varepsilon(r,z')}.$$

Заметим, что функции $g_{(z)}(r)$, $G_{(z)}(r)$ непрерывны на $[0,R]$.

Рассмотрим линейное уравнение

$$u''_\varepsilon + \frac{n-1}{r}g_{(z)}(r)u'_\varepsilon = G_{(z)}(r)$$

вместе с краевыми условиями (4.2). Эта задача эквивалентна следующей:

$$u'_\varepsilon(r) = V(r), \quad V' + \frac{n-1}{r}g_{(z)}(r)V = G_{(z)}(r). \tag{4.3}$$

Легко видеть, что функция

$$u_\varepsilon = \int\limits_R^r \int\limits_0^s e^{-\int_t^s \frac{n-1}{\lambda}g_{(z)}(\lambda)d\lambda}G_{(z)}(t)\,dtds \tag{4.4}$$

дает единственное решение задачи (4.3), (4.2) и принадлежит $\mathbb{C}^2(0,R)\cap\mathbb{C}^1[0,R]$. Результаты лемм 2.1, 2.2, 3.1 и упомянутое выше следствие из леммы 4.1 позволяют применить принцип неподвижной точки [16] для доказательства существования решения задачи (4.1), (4.2). Применение теоремы Лерэ — Шаудера требует наличия априорных оценок в семействе уравнений с параметром, где параметр входит в уравнение как множитель при младших членах, т. е. семейство имеет вид

$$-a_\varepsilon(r,u'_\varepsilon)u''_\varepsilon = \sigma\left(\frac{n-1}{r}({u'}^{\alpha}_{\varepsilon}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_\varepsilon + G(r,u_\varepsilon,u'_\varepsilon)\right),$$

где $\sigma \in [0,1]$ [16, гл. 11, теорема 11.3 ]. Учитывая специфику вхождения параметра $\sigma$ и его пределы изменения, выполнение всех оценок и условий легко можно проверить. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Рассмотрим уравнение (4.1). Домножая (4.1) на $\phi \in \mathbb{C}_0^\infty(0,R)$ и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^R ((u'_\varepsilon)^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_\varepsilon\phi'\,dr - \int\limits_0^R \frac{n-1}{r}((u'_\varepsilon)^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_\varepsilon\phi\,dr = \int\limits_0^R F(r,u_\varepsilon,u'_\varepsilon)\phi(r)\,dr. \quad (4.5)$$

Из равномерной по $\varepsilon$ ограниченности $Z'$ в $[0,R]$ заключаем о существовании подпоследовательности $\varepsilon_n \to 0$ такой, что

$$u_{\varepsilon_n}(r)\to u(r), \quad u'_{\varepsilon_n}(r)\to u'(r) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}[0,R], \quad (4.6)$$

откуда в силу непрерывности функции $G$ по совокупности своих переменных сразу следует, что

$$F(r,u_{\varepsilon_n},u'_{\varepsilon_n})\to F(r,u,u') \quad \text{в} \quad \mathbb{C}[0,R].$$

Также из (4.6) получаем

$$(u'_{\varepsilon_n})^\alpha+\varepsilon_n \to (u')^\alpha \quad \text{в} \quad \mathbb{C}[0,R],$$

$$((u'_{\varepsilon_n})^\alpha+\varepsilon_n)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_{\varepsilon_n}\to |u'|^{p(r)-2}u' \quad \text{в} \quad \mathbb{C}[0,R]. \quad (4.7)$$

Из (4.7) и того факта, что функция $\frac{\phi(r)}{r}$ непрерывна на $[0,R]$, вытекает, что

$$\int\limits_0^R \frac{n-1}{r}((u'_{\varepsilon_n})^\alpha+\varepsilon_n)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_{\varepsilon_n}\phi\,dr \to \int\limits_0^R \frac{n-1}{r}|u'|^{p(r)-2}u'\phi\,dr.$$

Переходя к пределу в (4.5) при $\varepsilon\to 0$, получаем, что $u=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon$ является искомым слабым радиально-симметричным решением задачи (1.4), (1.5). $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Dall'Aglio A., Giachetti D., Segura de Leon S.* Global existence for parabolic problems involving the $p$-Laplacian and a critical gradient term // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 1. P. 1–48.

**2.** *Dall'Aglio A., De Cicco V., Giachetti D., Puel J.-P.* Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains // NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2004. V. 11, N 4. P. 431–450.

**3.** *Bueno H., Ercole G., Ferreira W.M., Zumpano A.* Positive solutions for the $p$-Laplacian with dependence on the gradient // Nonlinearity. 2012. V. 25, N 4. P. 1211.

**4.** *Figueiredo D. G., Sanchez J., Ubilla P.* Quasilinear equations with dependence on the gradient // Nonlinear Anal. 2009. V. 71, N 10. P. 4862–4868.

**5.** *Iturriaga L., Lorca S., Sanchez J.* Existence and multiplicity results for the $p$-Laplacian with a $p$-gradient term // NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2008. V. 15. P. 729–743.

**6.** *Li Jinkai, Yin Jingxue, Ke Yuanyuan.* Existence of positive solutions for the p-Laplacian with p-gradient term // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 383, N 1. P. 147–158.

**7.** *Ruiz D.* A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems // J. Differ. Equ. 2004. V. 199, N 1. P. 96–114.

**8.** *Ragusa M. A., Razani A., Safari F.* Existence of radial solutions for a $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem // Adv. Differ. Equ. 2021. Art 215. P. 1–14.

**9.** *Zhang Q.* Existence of radial solutios for the $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 315. P. 506–516.

**10.** *Liang Y, Zhang Q. H., Zhao C. S.* On the boundary blow-up solutions of $p(x)$-Laplacian equations with gradient terms // Taiwanese J. Math. 2014. V. 18. P. 599–632.

**11.** *Bueno H., Ercole G.* A quasilinear problem with fast growing gradient // Appl. Math. Letters. 2013. V. 26, N 4. P. 520–523.

**12.** *Tersenov A. S.* Radially symmetric solutions of the p-Laplace equation with gradient terms // J. Appl. Industrial Math. 2018. V. 12, N 4. P. 770–784.

**13.** *Tersenov A. S.* On the existence of radially symmetric solutions for the p-Laplace equation with strong gradient nonlinearities // Sib. Math. J. 2023. V. 64, N 6. P. 1443–1454.

**14.** *Терсенов А. С., Сафаров Р.Ч.* О радиально-симметричных решениях третьей краевой задачи для эллиптического уравнения с p-лапласианом // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 1. С. 64–81.

**15.** *Franchi B., Lanconelli E., Serrin J.* Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in $R^n$ // Adv. Math. 1996. V. 118, N . P. 177–243.

**16.** *Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1983.



*Поступила в редакцию 2 июля 2025 г.*
*После доработки 2 июля 2025 г.*
*Принята к публикации 31 августа 2025 г.*



Терсенов Арис Саввич (ORCID 0009-0005-2748-8020)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
aterseno@math.nsc.ru

Сафаров Расул Чориёр Угли (ORCID 0009-0008-6247-1373)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Каршинский государственный университет,
ул. Кучабаг, 17, Карши 180119, Узбекистан
r.safarov1@g.nsu.ru