*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2026. Том 67, № 2*

*УДК 512.7+512.548*

# НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКЦИИ РАСШИРЕНИЯ ПОЧТИ–КОЛЕЦ

**А. А. Симонов**

**Аннотация.** Рассмотрены почти-кольца, связанные с ограниченно точно 2-транзитивными группами. Представлены конструкции расширения почти-колец с помощью биодулей, бимодулей и 2-псевдополей. Предложена схема удвоения размерности почти-колец. Приведены примеры почти-колец с неабелевыми аддитивными группами.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.210

**Ключевые слова:** поле, кольцо, почти-кольцо, 2-псевдополе, ограниченно точно 2-транзитивная группа, модуль, одуль, лупа.

## Введение

В 1931 г. Кармайкл [1] пришел к выводу, что конечные точно 2-транзитивные группы перестановок являются группами аффинных преобразований конечного почти-поля. По теореме Цассенхауза все конечные почти-поля [2], за вычетом семи исключительных, исчерпываются почти-полями Диксона. В 1937 г. Виланд [3], расширяя понятие почти-поля, определил почти-кольцо.

Конструкция почти-кольца интересна сама по себе как алгебраический объект, представляющий собой частный случай группы с операторами, благодаря чему вошла в классические учебники (например, [4]). Кроме того, почти-кольца имеют много приложений. Имеются связи с геометрией [5, 6], группами [7–9], обобщениями векторных пространств [10, 11], теорией кодирования [12], комбинаторикой [13], теорией категорий [14] и узлов [15]. Такой интерес стимулирует поиск новых почти-колец, в частности, при помощи расширений почти-колец (например, [16]).

Определение 1. *Правым почти-кольцом* называется алгебра $\mathscr{R} = \langle R; \circ, +, -, 0\rangle$ с двумя бинарными операциями такими, что $\langle R; +, -, 0\rangle$ является группой, а $\langle R; \circ\rangle$ — полугруппой, для которых выполнена правая дистрибутивность:

$$(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z.$$

Для уменьшения скобок по традиции будем считать, что полугрупповая операция имеет больший приоритет по сравнению с аддитивной. Операция $(-) : R \to R$ является унарной операцией взятия обратного элемента в группе $R$. Также введем упрощение для уменьшения скобок, считая $x + (-y) = x - y$.

Почти-кольцо является почти-полем, если полугруппа $\langle R \setminus \{0\}; \circ\rangle$ является группой. В общем случае можно рассмотреть и неассоциативные почти-кольца, когда операция умножения задает не обязательно ассоциативный группоид. Такие почти-кольца еще называют пред-почти-кольцами [17].

Пример 1. Неассоциативное почти-кольцо можно построить над произвольным кольцом $\langle R; \cdot, +, -, 0\rangle$, видоизменив операцию умножения при помощи произвольной функции $f : R \to R$ так, что $x \circ y = x \cdot f(y)$.

Если для функции $f$ справедливы тождества $f(xy) = f(x)f(y)$ и $f^2(x) = f(x)$ для произвольных $x, y \in R$, то соответствующее почти-кольцо, построенное над ассоциативным кольцом, будет ассоциативным. Например [18], $f(x) = |x|$ для $x \in \mathbb{C}$, тогда операция $x \circ y = x \cdot |y|$ задает умножение в почти-кольце $\langle \mathbb{C}; \circ, +\rangle$.

В [17, 19] можно найти много других примеров почти-колец как ассоциативных, так и неассоциативных, как правило, рассматриваемых над конечными множествами.

Сначала дадим определение ограниченно точно 2-транзитивной группы.

Определение 2. Группа $T_2(B)$ преобразования множества $B$ называется $\Omega$-*ограниченно точно* 2-*транзитивной*, если для любых пар $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \Omega \subset B^2$ существует единственный элемент $g \in T_2$, для которого справедливо равенство $g(x_i) = y_i$ для каждого $i \in \{1, 2\}$.

Если $\Omega = B^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in B\}$, то такая $\Omega$-ограниченно точно 2-транзитивная группа является точно 2-транзитивной.

Сформулируем теорему о построении ограниченно точно 2-транзитивной группы над почти-кольцом.

В работе [9] установлен следующий результат.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathscr{R} = \langle R; \circ, +, -, 0\rangle$ — почти-кольцо и $R^* \subset R$ — такое подмножество, что $\langle R^*; \circ, ^{-1}, 1\rangle$ — группа. Тогда над почти-кольцом $\mathscr{R}$ можно построить $\widehat{R^2}$-ограниченно точно 2-транзитивную группу преобразования множества $R$, где*

$$\widehat{R^2} = \{(x, y) \in R^2 \mid x - y \in R^*\}.$$

Нас в большей степени будет интересовать построение именно таких почти-колец с мультипликативной подполугруппой, которая является группой.

Основные результаты работы:

• представлены конструкции расширения почти-колец с использованием биодулей и бимодулей, доказаны теоремы о построении ассоциативных и неассоциативных почти-колец

• исследованы 2-псевдополя и их связь с почти-кольцами, включая условия, при которых почти-кольцо определяет 2-псевдополе;

• рассмотрены примеры расширенных почти-колец, а также процедура их удвоения.

Статья имеет следующую структуру: в первом разделе представлены методы расширения почти-колец с использованием биодулей и бимодулей, доказаны теоремы о построении ассоциативных и неассоциативных почти-колец. Второй раздел посвящен 2-псевдополям и их связи с почти-кольцами, включая условия, при которых почти-кольцо определяет 2-псевдополе. Рассмотрены примеры расширенных почти-колец, а также процедура их удвоения. В заключении сформулированы открытые вопросы, связанные с классификацией и дальнейшими обобщениями полученных конструкций.

## 1. Расширение почти-колец

Широко известна конструкция бимодуля.

Определение 3. Пусть $L$ и $R$ — два кольца, тогда $M$ является $(L,R)$-*бимодулем*, если $M$ — левый $L$-модуль и правый $R$-модуль. Кроме того, для любых $\ell \in L$, $r \in R$, $m \in M$ справедливо равенство $(\ell m)r = \ell(mr)$.

В нашем построении можно воспользоваться более слабой конструкцией над лупой, введенной Л. В. Сабининым [20].

Определение 4. *Левой лупой* называется алгебра $\langle G; \cdot, \setminus, e\rangle$ с двумя бинарными операциями и правым нейтральным элементом, для которых выполнены тождества $x \cdot (x \setminus y) = x \setminus (x \cdot y) = y$ и $x \cdot e = x$ для произвольных $x, y \in G$.

Определение 5. Левая лупа $G$ называется *левым $K$-одулем над ассоциативным кольцом* $K$, если для произвольных $g \in G$, $\lambda \in K$ определено умножение $\lambda g \in G$ и справедливы равенства

(1) $(\lambda + \mu)g = (\lambda g) \cdot (\mu g)$;

(2) $(\lambda\mu)g = \lambda(\mu g)$ для произвольных $g \in G$, $\lambda, \mu \in K$.

Аналогичным образом определяется правая лупа и правый одуль. Если лупа является одновременно левой и правой, то она является лупой с единственным нейтральным элементом.

Определение 6. Пусть $L$ и $R$ — два кольца, тогда $G$ является $(L,R)$-*биодулем*, если $G$ — левый $L$-одуль и правый $R$-одуль. Кроме того, для любых $\ell \in L$, $r \in R$, $g \in G$ справедливо равенство $(\ell g)r = \ell(gr)$.

При помощи почти-кольца $Q$ и $(L,R)$-биодуля $G$ построим новое почти-кольцо $K$. Для удобства запишем лупу $G$ в аддитивном виде $\langle G; \oplus, \ominus, 0\rangle$.

**Теорема 2.** *Мультипликативная операция*

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1, \psi(x_1) y_2 \oplus x_2 \phi(y_1)), \tag{1}$$

*построенная при помощи отображений $\psi : Q \to L$ и $\phi : Q \to R$, и аддитивная операция*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 \oplus y_2), \tag{2}$$

*справедливые для произвольных $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in Q \times G$, задают неассоциативное почти-кольцо $K = \langle Q \times G; \circ, +, -, (0,0)\rangle$, если:*

(а) *$\psi(x) + \psi(y) = \psi(x + y)$, для произвольных $x, y \in Q$;*

(б) *в лупе $G$ выполнено тождество медиальности, т. е. для произвольных $x, y, z, t \in G$ справедливо равенство*

$$(x \oplus y) \oplus (z \oplus t) = (x \oplus z) \oplus (y \oplus t).$$

Доказательство. Проверим выполнение правой дистрибутивности. С одной стороны,

$$\begin{aligned}((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \circ (z_1, z_2) &= (x_1 + y_1, x_2 \oplus y_2) \circ (z_1, z_2) \\ &= ((x_1 + y_1) z_1, \psi(x_1 + y_1) z_2 \oplus (x_2 \oplus y_2)\phi(z_1)),\end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2) \circ (z_1, z_2) + (y_1, y_2) \circ (z_1, z_2) \\ &\quad = (x_1 z_1 + y_1 z_1, (\psi(x_1) z_2 \oplus x_2 \phi(z_1)) \oplus (\psi(y_1) z_2 \oplus y_2 \phi(z_1))) \\ &\quad\quad = (x_1 z_1 + y_1 z_1, (\psi(x_1) + \psi(y_1)) z_2 \oplus (x_2 \oplus y_2)\phi(z_1)),\end{aligned}$$

где воспользовались медиальностью и первым тождеством для левого $L$-одуля и правого $R$-одуля. Учитывая условие (a) для $\psi$, получаем правую дистрибутивность. $\square$

При помощи почти-кольца $Q$ и $(L, R)$-бимодуля $M$ построим ассоциативное почти-кольцо $K$.

**Теорема 3.** *Мультипликативная операция* (1), *построенная при помощи гомоморфизма $\psi : Q \to L$ почти-кольца $Q$ в кольцо $L$ и отображения $\phi : Q \to R$, для которого выполнено тождество $\phi(y)\phi(z) = \phi(yz)$ для произвольных $y, z \in Q$, совместно с аддитивной операцией* (2) *задают ассоциативное почти-кольцо $K = \langle Q \times M; \circ, +, -, (0,0)\rangle$.*

Доказательство. Правая дистрибутивность, доказанная в теореме 2 для биодуля, справедлива и для бимодуля. Проверим выполнение ассоциативности. Действительно, с одной стороны,

$$\begin{aligned}((x_1,x_2)\circ(y_1,y_2))\circ(z_1,z_2) &= (x_1y_1, \psi(x_1)y_2 \oplus x_2\phi(y_1))\circ(z_1,z_2)\\ &= (x_1y_1z_1, \psi(x_1y_1)z_2 \oplus (\psi(x_1)y_2 \oplus x_2\phi(y_1))\phi(z_1)),\end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned}(x_1,x_2)\circ((y_1,y_2)\circ(z_1,z_2)) &= (x_1,x_2)\circ(y_1z_1, \psi(y_1)z_2 \oplus y_2\phi(z_1))\\ &= (x_1y_1z_1, \psi(x_1)(\psi(y_1)z_2 \oplus y_2\phi(z_1)) \oplus x_2\phi(y_1z_1)).\end{aligned}$$

Равенство правых частей выполнено с учетом того, что $\phi(y_1)\phi(z_1) = \phi(y_1z_1)$ и $\psi(x_1)\psi(y_1) = \psi(x_1y_1)$. $\square$

Пример 2. Построим почти-кольцо [21] для $K, L, R, M = \mathbb{R}$ при помощи $\psi(x) = x$, $\varphi(x) = |x|^c$ для $x \in K$, где $c \in \mathbb{R}_0$ (здесь $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 + x_2|y_1|^c \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Для построения трехмерного почти-кольца рассмотрим $K = \mathbb{R}$ и $L, R, M = \mathbb{C}$, отображения $\psi(x) = x \in \mathbb{C}$ для $x \in \mathbb{R}$ и

$$\phi(x) = (|x|^a \cos(b \ln |x|), |x|^a \sin(b \ln |x|)) \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}$.

В этом случае мультипликативная операция почти-кольца

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 + x_2|y_1|^a\cos(b\ln|y_1|) - x_3|y_1|^a\sin(b\ln|y_1|) \\ x_1y_3 + x_2|y_1|^a\sin(b\ln|y_1|) + x_3|y_1|^a\cos(b\ln|y_1|) \end{pmatrix}.$$

## 2-Псевдополе

Ограниченно точно 2–транзитивную группу можно построить не только над почти-кольцом, но и над 2–псевдополем, более того, категории ограниченно точно 2–транзитивных групп и 2–псевдополей категорно эквивалентны [9].

Рассмотрим группу преобразований $B_1(A)$ (обозначим $B_1 = B_1(A)$), действующую на множестве $A$ справа так, что $\times : A \times B_1 \to A$, причем $A \cap B_1 = \varnothing$. На множестве $B = B_1 \cup A$ введем частичную операцию $\cdot : B \times B_1 \to B$,

$$x \cdot y = \begin{cases} xy, & \text{умножение в группе } B_1 \text{ для } x, y \in B_1, \\ x \times y, & \text{для } x \in A,\ y \in B_1, \end{cases} \tag{3}$$

здесь $x \times y$ обозначает действие элемента $y$ на $x$. Пусть на $B$ действует отображение $\varphi : B \to B$ такое, что $\varphi^2 = \mathrm{id}$, которое естественным образом разбивает множество на подмножества:

$$A_2 = \{x \in A \mid \varphi(x) \in B_1\}, \quad B_1^{\varphi} = \{x \in B_1 \mid \varphi(x) \in A_2\},$$
$$\overline{A_2} = A \setminus A_2, \quad B_0 = B_1 \setminus B_1^{\varphi}, \quad B_2 = B_1 \cup A_2.$$

Определение 7. Алгебраическую систему $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi, 1\rangle$ с частичной операцией (3) будем называть 2-*псевдополем*, если отображение $\varphi$ удовлетворяет тождеству

$$\varphi(\varphi(x)\varphi(y)) = \varphi(x\varphi(y^{-1}))y, \quad x \in B,\ y \in B_0. \tag{4}$$

В работе [21] показано, что при помощи инволютивного элемента группы $b \in B_1$ можно ввести аддитивную операцию и ей обратную:

$$x \oplus y = \varphi(x(by)^{-1})y \ \text{ и } x \ominus y = \varphi(xy^{-1})(by), \quad x \in B,\ y \in B_1. \tag{5}$$

В общем случае они задают частичную правую лупу, так как для них справедливы тождества

$$(x \oplus y) \ominus y = x, \quad (x \ominus y) \oplus y = x, \quad x \in B,\ y \in B_1.$$

Определение 8 [22]. Если в алгебре $\mathfrak{A}$ определены частичные операции $f_i^{(\tau)}$, действующие не на всем множестве, то такие алгебры называются *частичными*. Здесь $\tau$ — арность операции $f_i^{(\tau)}$.

Для определенных выше операций (4) справедлива правосторонняя дистрибутивность

$$(x \oplus y)z = xz \oplus yz, \quad (x \ominus y)z = xz \ominus yz, \quad x \in B,\ y, z \in B_1.$$

**Лемма 1.** *Для того чтобы почти-кольцо $\langle K; \cdot, +\rangle$, в котором мультипликативная операция на подмножестве $K_1 \subset K$, являющаяся групповой из группы $\langle K_1; \cdot, ^{-1}, 1\rangle$, определяло 2-псевдополе $\left\langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi_K, 1\right\rangle$ с функцией*

$$\varphi_K(x) = x \cdot (-1) + 1, \tag{6}$$

*необходимо и достаточно, чтобы $|K_0| > 0$.*

Доказательство. В почти-кольце $\langle K; \cdot, +\rangle$ для функции (6) проверим выполнение тождества (4). Рассмотрим подмножество $K_0$ такое, что $y, \varphi_K(y) \in K_0$. Запишем левую часть тождества (4):

$$\varphi_K(\varphi_K(x)\varphi_K(y)) = ((x(-1) + 1)(y - 1) + 1) = x(-1)(y - 1) + y.$$

Правая часть:

$$\varphi_K(x\varphi_K(y^{-1}))y = (x(y^{-1}(-1) + 1)(-1) + 1)y = x(1 - y) + y.$$

Следовательно, для выполнения тождества (4) должно выполняться равенство

$$x(-1)(y - 1) = x(1 - y),$$

справедливое в силу ассоциативности умножения и того, что в аддитивной группе почти-кольца $K$ для произвольного $y \in K$ будет $-y = (-1)y$. $\square$

О таких 2-псевдополях $\left\langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi_K, 1\right\rangle$ будем говорить, как об ассоциированных с почти-кольцами $\langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$. В общем случае можно говорить об алгебраических системах $\mathscr{K} = \langle K; \cdot, \oplus, \ominus, 0\rangle$ и ассоциированных с ними 2-псевдополях, если по алгебраической системе $\mathscr{K}$ можно построить соответствующее 2-псевдополе. Тождества для аддитивной и мультипликативной операций в алгебраической системе $\mathscr{K}$ естественным образом переносятся на тождества для функции $\varphi$ соответствующего 2-псевдополя.

**Лемма 2.** *Для 2-псевдополя $\langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi, 1\rangle$, ассоциированного с алгебраической системой $\langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$ для функции $\varphi$ и $b \in K$, если:*

(1) *аддитивная операция (5) ассоциативна, то справедливо тождество*

$$\varphi E(x)bxbE\varphi(x) = b, \quad x \in K_0, \tag{7}$$

*где $E(x) = x^{-1}$;*

(2) *аддитивная операция (5) коммутативна, то*

$$\varphi E(bx)x = \varphi(xb^{-1}), \quad x \in K_1,$$

(3) *$\langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$ — кольцо, то справедливо также тождество:*

$$x\varphi(y)x^{-1} = \varphi(xybx^{-1}b^{-1}), \quad x, y \in K_0.$$

Доказательство сводится к записи ассоциативности и коммутативности аддитивной операции, а также левой дистрибутивности при помощи функции $\varphi$ с учетом определения аддитивной операции (5). Запишем ассоциативность для тройки $x, y, z \in K_1$ при условии, что $y(bz)^{-1} \in K_0$:

$$\varphi(\varphi(x(by)^{-1})y(bz)^{-1})z = \varphi(x(b\varphi(y(bz)^{-1})z)^{-1})\varphi(y(bz)^{-1})z.$$

Умножая тождество справа на $z^{-1}$ и производя замену $y(bz)^{-1} = t$, придем к выражению

$$\varphi(\varphi(x(by)^{-1})t) = \varphi(x(b\varphi(t)z)^{-1})\varphi(t).$$

Подействуем на обе части равенства функцией $\varphi$, а правую часть дополнительно распишем при помощи тождества (4):

$$\varphi(x(by)^{-1})t = \varphi(\varphi(x(b\varphi(t)z)^{-1})\varphi(t)) = \varphi(x(b\varphi(t)z)^{-1}\varphi(t^{-1}))t.$$

Сокращая справа на $t$ и действуя на обе части равенства функцией $\varphi$, придем к тождеству

$$x(by)^{-1} = x(b\varphi(t)z)^{-1}\varphi(t^{-1}),$$

откуда элементарными преобразованиями получим (7). Аналогично проверяются и два оставшиеся тождества. $\square$

**Расширение при помощи ассоциированного 2-псевдополя.** Рассмотрим два почти-кольца $\langle R; \cdot, +, -, 0\rangle$, $\langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$ и соответствующие им ассоциированные 2-псевдополя $\langle R; \cdot, ^{-1}, \varphi_R, 1\rangle$ в $\langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi_K, 1\rangle$ такие, для которых существует гомоморфизм

$$\theta : \langle R; \cdot, ^{-1}, \varphi_R, 1\rangle \to \langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi_K, 1\rangle.$$

Для упрощения записи будем использовать обозначения $-1 = b$, $x^{-1} = E(x)$, $E\varphi_K E(y) = \varphi_K^E(y)$ для $x \in K_1$, $y \in K_0$.

**Теорема 4.** *Пусть заданы два почти-кольца $R$ и $K$ с ассоциированными 2-псевдополями и гомоморфизм $\theta$ между ними. Тогда при помощи операции*

$$(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) = \big(x_1y_1, \theta(x_1y_1)\big(\theta\big(x_1^{-1}\big)x_2 + \theta\big(y_1^{-1}\big)y_2\big)\big) \tag{8}$$

*и функции*

$$\Phi(x_1, x_2) = \big(\varphi_R(x_1), \varphi_K\theta(x_1)\varphi_K^E\theta(x_1)E\theta(x_1)x_2\big) \tag{9}$$

*можно построить почти-кольцо $\langle R \times K; \odot, \oplus, 0 \times 0\rangle$, если выполнены следующие условия.*

1. *Справедливо равенство*

$$\varphi_K^E(\varphi_K(x)\varphi_K(y))\varphi_K\bigl(\varphi_K^E(x)z\varphi_K(y^{-1})b\bigr)\varphi_K^E(y)$$
$$= \varphi_K\bigl(\varphi_K^E(x\varphi_K(y^{-1}))\varphi_K(zb\varphi_K(y)b)E\varphi_K(y)\bigr) \quad (10)$$

*для таких* $x, y \in K_0$, $z \in K_1$, *для которых определены обе части равенства.*

2. *Для* $\Phi$ *выполняется тождество* (7).

3. *Действие мультипликативной операции* (8) *и аддитивной операции «*$\oplus$*» почти-кольца, построенной при помощи* $\Phi$ *по выражению* (5), *можно доопределить на всем множестве* $R \times K$.

Доказательство. Для того чтобы при помощи операций (8) и (9) по выражению (5) можно было построить почти-кольцо, необходимо выполнение тождеств (4) и (6).

Запишем тождество (4). Для удобства такой записи от операций (8) и (9) при помощи биекции $\psi : R_1 \times K \to R_1 \times K$ вида

$$\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_1x_2), \quad \psi^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_1^{-1}x_2)$$

перейдем к операциям в изоморфной алгебраической системе:

$$(x_1, x_2) \odot' (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2 + y_2), \quad \Phi'(x_1, x_2) = \bigl(\varphi_R(x_1), \varphi_R^E(\theta(x_1))x_2\bigr),$$

для которых запишем тождество (4). В силу того, что данное тождество справедливо для 2-псевдополя, ассоциированного с почти-кольцом $R$, по первой компоненте равенство будет выполнено. Запись тождества (4) по второй компоненте приведет к равенству

$$\varphi_K^E(\varphi_K\theta(x_1)\varphi_K\theta(y_1))\bigl(\varphi_K^E\theta(x_1)x_2 + \varphi_K^E\theta(y_1)y_2\bigr)$$
$$= \varphi_K^E\bigl(\theta(x_1)\varphi_K\theta(y_1^{-1})\bigr)(x_2 + E\varphi_K\theta(y_1)by_2) + y_2.$$

Записывая аддитивную операцию при помощи выражения (5) и производя замены $\theta(x_1) = x$, $\theta(y_1) = y$, $x_2y_2^{-1} = z$, придем к (10). Таким образом, п. 1 теоремы доказан.

Выполнение п. 2 (ассоциативности) и п. 3 (определения операции на всем множестве) теоремы необходимо для построения почти-кольца и зависит от конкретных $R$ и $K$. $\square$

Пример 4. В качестве примера рассмотрим два одинаковых почти-кольца, построенных над $\mathbb{R}^2$, с умножением

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2),$$

сложением

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

и функцией $\varphi_K(x_1, x_2) = (1 - x_1, x_2)$, для которой выполняется тождество (10). Соответствующий гомоморфизм $\theta$ — тождественный. Воспользовавшись процедурой, описанной в теореме 4, получим умножение в новом почти-кольце:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2, x_1y_3 + x_3y_1, (x_4 - x_2)y_1 + y_4x_1 + x_2),$$

с функцией $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + 1, x_2, -x_3, -x_4 + x_2)$ и полученной некоммутативной аддитивной операцией (5), имеющей вид

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4 + x_1y_2 - x_2y_1).$$

Пример 5. Воспользуемся почти-кольцом из примера 4 и аналогичным образом построим новое почти-кольцо с умножением:

$$(x_1,\dots,x_8)\cdot(y_1,\dots,y_8)=(x_1y_1,\ x_1y_2+x_2,\ x_1y_3+x_3y_1,(x_4-x_2)y_1+y_4x_1+x_2,\\ x_1y_5+x_5y_1,(x_6-x_2)y_1+y_6x_1+x_2,\ x_1y_7+x_7y_1+x_3y_5+x_5y_3,\\ (y_6-2y_2+y_4)x_5+(x_8-x_2)y_1+(x_4-x_6)y_5+x_1y_8+x_2)$$

и сложением:

$$(x_1,\dots,x_8)+(y_1,\dots,y_8)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_1y_2-x_2y_1+x_4+y_4,\\ x_5+y_5,\ x_1y_2-x_2y_1+x_6+y_6,\ x_7+y_7,\ x_1y_2-x_2y_1+x_8+y_8).$$

## Заключение

Процедуру из теоремы 4, рассмотренную в примерах 4 и 5, условно можно назвать *удвоением почти-кольца.* Удвоение почти-кольца из примера 5 уже не приводит к получению не только нового почти-кольца, но и к получению 2-псевдополя, так как не выполняется тождество (4).

Кроме того, несмотря на то, что примеры получены над вещественным полем, их можно рассмотреть над некоторыми кольцами и конечными полями.

В [15] для построения квандлов $Q$ рассматривались почти-кольца $R$ с дополнительным условием.

Определение 9. *Квандлом* называют алгебраическую систему $\langle Q;\circ,/\rangle$ с операциями умножения «$\circ$» и правого деления «$/$», в которой для произвольных $x,y,z\in Q$ выполняются условия

1) $(x\circ y)/y=x$, $(x/y)\circ y=x$,

2) идемпотентности $x\circ x=x$,

3) дистрибутивности $(x\circ y)\circ z=(x\circ z)\circ(y\circ z)$.

Было показано, что операции

$$x\circ y=a(x-y)+y \quad \text{и} \quad x/y=a^{-1}(x-y)+y \tag{11}$$

для $a\in R^*$ задают квандл $\langle R;\circ,/\rangle$ тогда и только тогда, когда выполнено тождество

$$a(a(u-t)+t)=a(au-at)+at \tag{12}$$

для произвольных $u,t\in R$.

Пример 6. Почти-кольцо из примера 4 удовлетворяет тождеству (12) для $a=(a_1,0,a_3,a_4)$, где $a_1\in\mathbb{R}_0$, $a_3,a_4\in\mathbb{R}$. Почти-кольцо из примера 5 удовлетворяет тождеству (12) для

$$a=(1,0,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8),\quad a=(a_1,0,a_3,a_4,0,a_6,a_7,a_8),$$

где $a_1\in\mathbb{R}_0$, $a_3,\dots,a_8\in\mathbb{R}$. Следовательно, над данными кольцами при помощи (11) можно построить операции, определяющие соответствующие квандлы.

Конструкции новых квандлов, подобные приведенным в примерах, могут быть использованы для построения представлений групп виртуальных кос и инвариантов виртуальных узлов (см., например, [23–25]).

Для дальнейших исследований есть несколько вопросов.

**Вопрос 1.** *Имеются ли другие почти-кольца, допускающую процедуру удвоения?*

**Вопрос 2.** *Можно ли изменить функцию* (9), *используемую в теореме* 4, *для получения новых почти-колец?*

**Вопрос 3.** *Как связаны полученные в примерах почти-кольца, если их рассмотреть над конечными множествами с почти-кольцами Диксона и Галуа?*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Carmichael R. D.* Algebras of certain doubly transitive groups // Am. J. Math. 1931. V. 53, N 3. P. 631–644.
2. *Zassenhaus H.* Über endliche Fastkörper // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1936. V. 11, N 1. P. 187–220.
3. *Wiclandt H.* Über Bereiche aus Gruppenabbildungen // Deutsche Mathematik. 1938. V. 3. P. 9–10.
4. *Курош А. Г.* Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
5. *Karzel H., Maxson C. J.* Kinematic spaces with dilatations // J. Geometry. 1984. V. 22, N 2. P. 196–202.
6. *Kerby W. E.* Projektive und nicht-projektive Fastkörper // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1968. V. 32. P. 20–24.
7. *Karzel H., Maxson C. J.* Fibered groups with non-trivial centers // Results in Mathematics. 1984. V. 7, N 2. P. 192–208.
8. *Karzel H., Maxson C. J.* Fibered $p$-groups // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1986. V. 56. P. 70–81.
9. *Симонов А. А.* Обобщение точно транзитивных групп // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 6. С. 153–178.
10. *Karzel H., Kist G.* Determination of all near vector spaces with projective and affine fibrations // J. Geometry. 1984. V. 23, N 2. P. 124–127.
11. *Howell K.-T., Chistyakov D. S.* О теории почти-векторных пространств // Фундамент. и прикл. математика. 2015. V. 20, N 5. P. 197–202.
12. *Karzel H., Maxson C. J.* Affine MDS-codes on groups // J. Geometry. 1993. V. 47, N 1-2. P. 65–76.
13. *Kesava M. P.* Applications of near-rings to combinatorial problems // Proc. Indian Nat. Sci. Acad. part A. 1975. V. 41. P. 189–194.
14. *Howell K.-T., Chistyakov D. S.* Аффинные почти-кольца и связанные с ними структуры // Мат. заметки. 2018. V. 103, N 6. P. 936–947.
15. *Бородин А. Н., Нещадим М. В., Симонов А. А.* Конструкции квандлов над группами, модулями и почти-кольцами // Сиб. мат. журн. 2026. Т. 67, № 1. С. 24–35.
16. *Nayak H., Kukcham S. P., Kedukodi B. S.* Extensions of Boolean rings and nearrings // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2019. V. 12, N 1. P. 58–67.
17. *Lockhart R.* The theory of near-rings. Cham: Springer, 2021. (Lecture Notes Math.; V. 2295).
18. *Ke Wen-Fong.* On recent developments of planar nearrings // Nearrings and nearfields. Hamburg, Germany: Proc. Conference on Nearrings and Nearfields, 2005. P. 3–23.
19. *Pilz G.* Near-rings: The theory and its application. Amsterdam: Elsevier, 1983.
20. *Сабинин Л. В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, № 5. С. 800–803.
21. *Симонов А. А.* О соответствии между почтиобластями и группами // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 2. С. 239–251.
22. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
23. *Bardakov V., Nasybullov T.* Multi-switches and representations of braid groups // J. Algebra Appl. 2024. V. 23, N 3. 2430003.
24. *Bardakov V., Nasybullov T.* Multi-switches and virtual knot invariants // Topology Appl. 2021. V. 293. 107552.
25. *Бардаков В., Насыбуллов Т.* Мульти-переключатели, представления виртуальных кос и инварианты виртуальных узлов // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 4. С. 500–506.



*Поступила в редакцию 4 июня 2025 г.*
*После доработки 5 ноября 2025 г.*
*Принята к публикации 6 ноября 2025 г.*



Симонов Андрей Артёмович (ORCID 0000-0002-8619-6766)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
a.simonov@g.nsu.ru