Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.925.5

РАДИАЛЬНЫЕ И ШАРОВЫЕ МЕРЫ СТАБИЛЬНОСТНЫХ И ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

И. Н. Сергеев

Аннотация. Рассматриваются стабильностные и осцилляционные свойства произвольной нелинейной дифференциальной системы с нулевым решением: устойчивость, асимптотическая устойчивость, полная неустойчивость (разных типов: ляпуновского, перроновского, верхнепредельного) и полные блуждаемость, колеблемость, вращаемость (а также полные противоположные им свойства: неблуждаемость, неколеблемость, невращаемость). Для такой системы определяются шаровые и радиальные меры этих свойств — понятия таких мер вероятностного характера были введены в рассмотрение совсем недавно. Изучаются взаимосвязи между значениями различных мер перечисленных свойств друг с другом.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.209

Ключевые слова: дифференциальная система, ляпуновская устойчивость, перроновская устойчивость, верхнепредельная устойчивость, блуждаемость, колеблемость, вращаемость, мера устойчивости, мера колеблемости, радиальная мера.

Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием

1. Основные понятия

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной фазовой области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль и наделенной лебеговской мерой mes, на временном луче $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ рассматриваем дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in G,\ f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \tag{1}$$

с правой частью f, обеспечивающей существование и единственность решений задач Коши. Введем обозначения

$$\mathbb{S}_\delta \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \delta\}, \quad B_\delta \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < \delta\},$$

а $x_f(\cdot, x_0)$ — непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x_f(0, x_0) = x_0 \in G$.

Прежде всего напомним определения мер разнообразных стабильностных свойств дифференциальной системы, восходящих к работам [1–5] и введенных в работах [6–9].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-03-2026-395).

Определение 1. Для системы (1) определим следующие *меры стабильностных* свойств *устойчивости, асимптотической устойчивости* и *неустойчивости*, каждая из которых может быть одного из трех типов: *ляпуновского, перроновского, верхнепредельного* при *ассоциированном* значении $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$. Эти меры определются соответственно формулой

$$\mu_\varkappa(f) \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} \varlimsup_{\delta\to+0} \frac{\operatorname{mes} \mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes} B_\delta}, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma, \lambda_0, \pi_0, \sigma_0, \overline{\lambda}, \overline{\pi}, \overline{\sigma},$$

где $\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,\delta), \mathrm{M}_{\varkappa_0}(f,\varepsilon,\delta)$ и $\mathrm{M}_{\overline{\varkappa}}(f,\varepsilon,\delta)$ — множества всех начальных значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих соответствующему требованию

$$\begin{aligned} \Phi_\varkappa(x_f(\cdot,x_0)) &\le \varepsilon \quad (\text{для } \mathrm{M}_\varkappa),\\ \Phi_{\varkappa_0}(x_f(\cdot,x_0)) &\le \varepsilon \quad (\text{для } \mathrm{M}_{\varkappa_0}),\\ \Phi_\varkappa(x_f(\cdot,x_0)) &> \varepsilon \quad (\text{для } \mathrm{M}_{\overline{\varkappa}}), \end{aligned} \tag{2}$$

в котором функционалы при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ зададим для непрерывно дифференцируемой функции $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_*$ $(\equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ формулами

$$\Phi_\lambda(x) \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)|, \quad \Phi_\pi(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} |x(t)|, \quad \Phi_\sigma(x) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)|$$

(при этом если функция x определена не на всем луче $\mathbb{R}_+$, то считаем $\Phi_\varkappa(x) = +\infty$),

$$\Phi_{\varkappa_0} \equiv \operatorname{Sgn} \Phi_\varkappa \equiv \begin{cases} +\infty, & \Phi_\varkappa > 0,\\ 0, & \Phi_\varkappa = 0, \end{cases} \quad \varkappa = \pi, \sigma, \quad \Phi_{\lambda_0} \equiv \Phi_\lambda + \Phi_{\sigma_0}.$$

Напомним определения мер разнообразных осцилляционных свойств дифференциальной системы из работ [10–15].

Определение 2. При $n > 1$ для системы (1) определим следующие *меры осцилляционных* свойств *блуждаемости, неблуждаемости* и *колеблемости, неколеблемости*, а также *вращаемости, невращаемости.* Последние два свойства, в отличие от четырех предыдущих, будем считать *нестандартными.* Эти меры определяются формулой

$$\mu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{t\to+\infty} \varlimsup_{\delta\to+0} \frac{\operatorname{mes} \mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)}{\operatorname{mes} B_\delta}, \quad \varkappa = \rho, \overline{\rho}, \nu, \overline{\nu}, \theta, \overline{\theta},$$

где $\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)$ и $\mathrm{M}_{\overline{\varkappa}}(f,\varepsilon,t,\delta)$ — множества всех начальных значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих соответствующему требованию

$$\begin{aligned} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \Phi_\varkappa(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t) &\ge \varepsilon \quad (\text{для } \mathrm{M}_\varkappa),\\ \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \Phi_\varkappa(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t) &< \varepsilon \quad (\text{для } \mathrm{M}_{\overline{\varkappa}}), \end{aligned}$$

в котором при ассоциированном значении $\varkappa = \rho, \nu, \theta$ функционалы *блуждаемости, колеблемости, вращаемости* для непрерывно дифференцируемой функции $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_*$ определяются так:

(а) $\Phi_\rho(t,x) \equiv \inf\limits_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \left|\frac{d}{d\tau}\frac{Lx(\tau)}{|Lx(\tau)|}\right| d\tau$ — *минимизированная* (по L) *средняя вариация следа* функции Lx на единичной сфере за время t;

(б) $\Phi_\nu(t,x)$ — *минимизированное* (по $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$) *нормализованное* (множителем π/t) *число нулей* (неопределенное в случае, если хотя бы один этих нулей кратен) функции P_1Lx на промежутке $(0,t]$, где P_1 — проектор на фиксированную прямую в $\mathbb{R}^n$;

(в) $\Phi_\theta(t,x) \equiv \inf\limits_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} |\varphi(t,P_2Lx)|/t$ — *минимизированная* (по L) *средняя угловая скорость* вектора $P_2Lx(\tau)$ за время t, где $\varphi(t,P_2Lx)$ — непрерывный *ориентированный* угол между вектором $P_2Lx(t)$ и начальным вектором $P_2Lx(0)$ (в случае $P_2Lx(\tau)=0$ хотя бы для одного $\tau\in[0,t]$ считаем этот угол неопределенным), а P_2 — проектор на фиксированную двумерную плоскость в $\mathbb{R}^n$.

Основываясь на определениях 1 и 2, которые фактически описывают *шаровые* меры различных свойств, определим далее их *радиальные* аналоги, связанные с соответствующими радиальными свойствами дифференциальной системы [16–18].

Определение 3. Для системы (1) *радиальными мерами* $\mu_{\varkappa,u}(f)$ данных свойств при ассоциированных значениях $\varkappa$ *в направлении* вектора $u\in\mathbb{S}_1$ назовем соответствующие меры, описанные в определениях 1 и 2, с заменой в них обозначений $\mu_\varkappa(f)$, $\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)$, $\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)$, B_δ,mes обозначениями $\mu_{\varkappa,u}(f)$, $\mathrm{M}_{\varkappa,u}(f,\varepsilon,\delta)$, $\mathrm{M}_{\varkappa,u}(f,\varepsilon,t,\delta)$, $B_{\delta,u}$, mes_u, а условия $x_0\in B_\delta$ — условием $x_0\in B_{\delta,u}\equiv B_\delta\cap l_u$, где $l_u\equiv\{x=cu:c>0\}$ и mes_u — лебеговская мера на луче l_u. Кроме того, для множеств направлений $u\in\mathbb{S}_1$ зададим на единичной сфере $\mathbb{S}_1$ также лебеговскую *сферическую меру* mes', причем *нормированную*, т. е. удовлетворяющую условию $\mathrm{mes}'\,\mathbb{S}_1=1$.

2. Формулировки результатов

Исследование взаимосвязей между характеристиками и понятиями, введенными в определениях 1–3 выше, оформлено в виде сформулированных ниже теорем 1–7 (доказанных в следующем разделе), которые отчасти развивают тематически связанные с ними результаты работ [18–40].

Естественные взаимосвязи между значениями различных радиальных и шаровых мер, а также их особенности в одномерном случае раскрывают следующие две теоремы (см. также работы [8, 15]).

Теорема 1. *При $n>1$ меры стабильностных и осцилляционных свойств любой системы* (1) *для каждого $u\in\mathbb{S}_1$ удовлетворяют соотношениям*

$$0\le\mu_{\varkappa,u}(f)\le 1-\mu_{\overline{\varkappa},u}(f)\le 1,\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma,\rho,\nu,\theta,$$
$$0\le\mu_{\varkappa_0,u}(f)\le\mu_{\varkappa,u}(f),\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma,$$
$$\mu_{\lambda,u}(f)\le\mu_{\sigma,u}(f)\le\mu_{\pi,u}(f),\quad \mu_{\lambda_0,u}(f)\le\mu_{\sigma_0,u}(f)\le\mu_{\pi_0,u}(f),$$
$$\mu_{\overline{\lambda},u}(f)\ge\mu_{\overline{\sigma},u}(f)\ge\mu_{\overline{\pi},u}(f),$$
$$\mu_{\theta,u}(f)\le\mu_{\nu,u}(f)=\mu_{\rho,u}(f),\quad \mu_{\overline{\theta},u}(f)\ge\mu_{\overline{\nu},u}(f)=\mu_{\overline{\rho},u}(f).$$

Теорема 2. *При $n=1$ меры стабильностных свойств любой системы* (1) *для каждого $u\in\mathbb{S}_1$ удовлетворяют соотношениям*

$$\mu_{\varkappa,u}(f),\mu_{\varkappa_0,u}(f),\mu_{\overline{\varkappa},u}(f)\in\{0;1\},\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma,$$
$$\mu_{\varkappa_0,u}(f)\le\mu_{\varkappa,u}(f)=1-\mu_{\overline{\varkappa},u}(f),\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma,$$
$$\mu_\varkappa(f)=\frac{\mu_{\varkappa,u}(f)+\mu_{\varkappa,-u}(f)}{2}\in\left\{0;\frac{1}{2};1\right\},\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma,\lambda_0,\pi_0,\sigma_0,\overline{\lambda},\overline{\pi},\overline{\sigma},$$
$$\mu_{\lambda,u}(f)=\mu_{\sigma,u}(f),\quad \mu_{\lambda_0,u}(f)=\mu_{\sigma_0,u}(f),\quad \mu_{\overline{\lambda},u}(f)=\mu_{\overline{\sigma},u}(f).$$

Следующие четыре теоремы демонстрируют реализуемость естественных содержательных соотношений и взаимосвязей между радиальными и шаровыми мерами стабильностных или стандартных осцилляционных свойств (см. также работы [18–20]).

Теорема 3. *При $n = 2$ для любого $\mu \in [0, 1]$ существует система* (1), *у которой меры устойчивости и асимптотической устойчивости всех типов, а также сферические меры множеств направлений с единичными радиальными мерами этих свойств равны μ, тогда как меры неустойчивости всех типов, а также сферические меры множеств направлений с единичными радиальными мерами этих свойств равны $1 - \mu$.*

Теорема 4. *При $n = 2$ для любого $\mu \in [0, 1]$ существует система* (1), *у которой меры блуждаемости и колеблемости, а также сферические меры множеств направлений с единичными радиальными мерами этих свойств равны μ, тогда как меры неблуждаемости и неколеблемости, а также сферические меры множеств направлений с единичными радиальными мерами этих свойств равны $1 - \mu$.*

Теорема 5. *При $n = 2$ для любого стабильностного или стандартного осцилляционного свойства существует система* (1) (*автономная или соответственно периодическая*) *с единичной мерой этого свойства, но с его же нулевой радиальной мерой в некотором направлении.*

Теорема 6. *При $n = 2$ для любого стабильностного или стандартного осцилляционного свойства существует система* (1) (*автономная или соответственно периодическая*) *с нулевой мерой этого свойства, но с его же единичной радиальной мерой в некотором направлении.*

Как показывает следующая теорема, если шаровая мера какого-либо стабильностного свойства равна нулю, то множество направлений с его же нулевыми радиальными мерами имеет полную сферическую меру. Заметим, что вопрос о справедливости аналогичного утверждения для осцилляционных мер пока открыт.

Теорема 7. *Если мера данного стабильностного свойства системы* (1) *равна нулю, то сферическая мера множества направлений с положительными радиальными мерами этого свойства тоже равна нулю.*

3. Доказательства утверждений

Приводимые ниже рассуждения частично пересекаются с некоторыми рассуждениями из работ [6–20] или используют их идеи.

Доказательство теорем 1 и 2, по существу, содержится в работах [8, 15], поскольку в основном опирается на идеи этих работ. Однако особенность любой радиальной стабильностной меры состоит в том, что в одномерном случае она может принимать лишь крайнее значение 0 или 1, а шаровая мера равна среднему арифметическому радиальных мер для двух противоположных направлений. Это связано с тем, что на конкретном луче для заданного $\varkappa$ обязательно выполнено ровно одно из следующих двух утверждений:

— либо для каждого $\varepsilon > 0$ хотя бы одно решение удовлетворяет первому (или даже второму) условию (2), а значит, ему удовлетворяют и все решения, начинающиеся ближе к нулю, поэтому мера радиальной устойчивости (или соответственно асимптотической) равна 1;

— либо для некоторого $\varepsilon > 0$ сразу все решения удовлетворяют третьему условию (2), а значит, мера радиальной неустойчивости равна 1.

Доказательство теорем 3–6. Пусть $n = 2$. В первом пункте (ниже) докажем все утверждения, относящиеся к стабильностным свойствам, а во втором — к осцилляционным.

1. Для заданного $\mu \in [0;1]$ рассмотрим автономную систему (1) вида

$$\dot{x} = \zeta(x) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \zeta(x) \equiv (\alpha x_1)^2 - ((1-\alpha)x_2)^2, \quad \alpha_1 \in [0;1],$$

у которой все фазовые кривые лежат на лучах вида l_u, $u \in \mathbb{S}_1$. Параметр $\alpha \in [0;1]$ для скалярной функции ζ подберем так, чтобы множество направлений $u \in \mathbb{S}_1$, удовлетворяющих неравенству $\zeta(x) < 0$, имело сферическую меру, равную μ (к примеру, в случаях $\mu = 0$ или $\mu = 1$ положим $\alpha = 1$ или $\alpha = 0$ соответственно). Тогда множество всех направлений, удовлетворяющих противоположному неравенству $\zeta(x) > 0$, будет иметь сферическую меру, равную $1-\mu$, а значит, будут выполнены все требования теоремы 3.

Далее, рассмотрим автономную систему (1) вида

$$\dot{x} = \zeta(x) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \zeta(x) \equiv x_1^4 - x_2^2,$$

у которой все фазовые кривые лежат на ветвях парабол вида $x_2 = cx_1^2$ или на осях координат. При этом во всей области $x_1^4 < x_2^2$ движение идет к нулю, причем доля той части этой области, которая лежит в круге с нулевым центром, сходится к 1 при убывании к 0 его радиуса. Более того, в этой области оказывается и достаточно близкая к нулю часть произвольного луча, отличного от двух *особых* лучей $l_{\pm u}$, $u = (1;0)$, которые целиком лежат в области $x_1^4 > x_2^2$, где движение идет от нуля. Поэтому мера асимптотической устойчивости этой системы равняется 1, равно как и ее же радиальные меры во всех направлениях, кроме двух особых. Таким образом, стабильностные свойства этой системы удовлетворяют всем требованиям теоремы 5, а если поменять знак ее правой части на противоположный, то они, наоборот, будут удовлетворять всем требованиям теоремы 6.

2. Рассмотрим *исходную* периодическую систему (1) вида

$$\dot{x} = \frac{\pi}{2}\sin t \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

у которой все решения 2π-периодичны и получаются поворотами каждого начального вектора x_0 за каждую половину периода ровно на половину целого оборота то в одну, то в другую сторону:

$$x_f(2m\pi, x_0) = x_0, \quad x_f(\pi + 2\pi m, x_0) = -x_0, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для заданного $\mu \in [0;1]$ подберем значение $\alpha \in [0;1]$ из соображений, описанных в п. 1 выше, и возмутим исходную систему 2π-периодически так, чтобы все решения, начинающиеся в области $x_2^2 > x_1^2 \operatorname{tg}(\mu\pi/2)$, за каждую половину периода делали чуть меньше пол-оборота, оставаясь при этом 2π-периодичными, а все остальные решения не менялись. Тогда для блуждаемости, колеблемости и неблуждаемости, неколеблемости полученной системы будут выполнены все требования теоремы 4.

Наконец, если возмутить исходную систему 2π-периодически так, чтобы опять же все решения, начинающиеся в области $x_1^4 > x_2^2$, за каждую половину периода делали чуть меньше пол-оборота, оставаясь при этом 2π-периодичными, а все остальные решения не менялись, то с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в п. 1 выше, получаем, что для стандартных осцилляционных свойств блуждаемости и колеблемости этой системы будут выполнены все требования теоремы 5, а если указанное возмущение применить, наоборот, к тем решениям, которые начинаются в области $x_1^4 < x_2^2$, то будут выполнены все требования теоремы 6.

Доказательство теоремы 7. Проведем рассуждение от противного. Пусть для системы (1) мера данного свойства определенного типа при ассоциированном значении $\varkappa$ равна 0, однако сферическая мера множества $U_\varkappa \subset \mathbb{S}_1$ всех направлений, имеющих положительные радиальные меры этого свойства, положительна. Рассмотрим два случая.

1. Если данное свойство есть устойчивость или асимптотическая устойчивость при ассоциированном $\varkappa \in \{\lambda, \pi, \sigma, \lambda_0, \pi_0, \sigma_0\}$, то:

(а) найдутся такие $\alpha, \gamma > 0$, что множество $U_\varkappa(\gamma) \subset U_\varkappa$ направлений $u \in \mathbb{S}_1$, для каждого из которых при любом $\varepsilon > 0$ для некоторого $\Delta \equiv \Delta(\varepsilon, u) > 0$ выполнено неравенство

$$\inf_{0<\delta<\Delta} \frac{\operatorname{mes} \mathrm{M}_{\varkappa,u}(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes} B_{\delta,u}} > \gamma, \tag{3}$$

имеет меру, превышающую α: действительно, в противном случае ни при каком $\gamma > 0$ мера множества $U_\varkappa(\gamma)$, расширяющегося (нестрого) при убывании γ, не превосходила бы никакого $\alpha > 0$, поэтому

$$\operatorname{mes}' U_\varkappa = \operatorname{mes}'\Big(\bigcup_{\gamma>0} U_\varkappa(\gamma)\Big) = \sup_{\gamma>0} \operatorname{mes}' U_\varkappa(\gamma) \le \alpha,$$

откуда в силу произвольности $\alpha > 0$ получилось бы противоречие: $0 < \operatorname{mes}' U_\varkappa = 0$;

(б) для найденного значения $\gamma > 0$ найдется такое $\beta > 0$, что при любом $\varepsilon > 0$ для некоторого $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ подмножество $U_\varkappa(\varepsilon, \Delta) \subset U_\varkappa$ направлений $u \in \mathbb{S}_1$, удовлетворяющих неравенству (3), имеет меру, превышающую β: действительно, в противном случае при каждом $\beta > 0$ нашлось бы такое $\varepsilon > 0$, что ни для какого $\Delta > 0$ последнее требование не выполнялось, т. е. мера множества $U_\varkappa(\varepsilon, \Delta)$, расширяющегося (нестрого) как при убывании Δ (поскольку точная нижняя грань по множеству заведомо не больше, чем по его подмножеству), так и при возрастании ε, не превосходила бы β, поэтому

$$\operatorname{mes}' U_\varkappa(\gamma) = \operatorname{mes}'\Big(\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\Delta>0} U_\varkappa(\varepsilon,\Delta)\Big) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\Delta>0} \operatorname{mes}' U_\varkappa(\varepsilon,\Delta) \le \beta,$$

откуда в силу произвольности $\beta > 0$ получилось бы противоречие:

$$\alpha < \operatorname{mes}' U_\varkappa(\gamma) = 0;$$

(в) при найденном $\gamma > 0$, каждом $\varepsilon > 0$ и всех $\delta \in (0, \Delta(\varepsilon))$ имеем

$$\frac{\operatorname{mes} \mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes} B_\delta} \ge \operatorname{mes}' U_\varkappa(\gamma) \cdot \frac{\operatorname{mes} B_{\gamma\delta}}{\operatorname{mes} B_\delta} > \beta \cdot \gamma^n, \tag{4}$$

а в итоге для меры данного свойства получаем противоречие:

$$0 = \mu_\varkappa(f) \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{\delta\to+0} \frac{\operatorname{mes} \mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes} B_\delta} \ge \beta \cdot \gamma^n > 0. \tag{5}$$

2. Если данное свойство есть неустойчивость при ассоциированном $\varkappa \in \{\overline{\lambda}, \overline{\pi}, \overline{\sigma}\}$, то:

(г) найдутся такие $\alpha, \gamma > 0$, что множество $U_\varkappa(\gamma) \subset U_\varkappa$ направлений $u \in \mathbb{S}_1$, для каждого из которых при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\Delta \equiv \Delta(u) > 0$ выполнено неравенство (3), имеет меру, превышающую α — в противном случае получается противоречие, аналогичное приведенному в рассуждении из п. (а) выше;

(д) для найденного значения $\gamma > 0$ найдется такое $\beta > 0$, что при некоторых $\varepsilon, \Delta > 0$ подмножество $U_\varkappa(\varepsilon, \Delta) \subset U_\varkappa$ направлений $u \in \mathbb{S}_1$, удовлетворяющих неравенству (3), имеет меру, превышающую β: действительно, в противном случае при каждом $\beta > 0$ ни для каких $\varepsilon, \Delta > 0$ последнее требование не выполнялось бы, т. е. мера множества $U_\varkappa(\varepsilon, \Delta)$, расширяющегося при убывании как Δ, так и ε, не превосходила бы β, поэтому

$$\mathrm{mes}'\, U_\varkappa(\gamma) = \mathrm{mes}'\Big(\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcup_{\Delta>0} U_\varkappa(\varepsilon, \Delta)\Big) = \sup_{\varepsilon>0}\sup_{\Delta>0} \mathrm{mes}'\, U_\varkappa(\varepsilon, \Delta) \le \beta,$$

откуда в силу произвольности $\beta > 0$ получилось бы противоречие:

$$\alpha < \mathrm{mes}'\, U_\varkappa(\gamma) = 0;$$

(е) при найденном $\gamma > 0$ для всех $\varepsilon > 0$, не превосходящих значения, полученного в п. (д), и всех $\delta \in (0, \Delta)$ выполнены оценки (4), а в итоге опять же получается противоречие (5).

Теоремы 1–7 доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.

2. *Perron O.* Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Z. 1930. V. 31, N 1. P. 748–766.

3. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

5. *Изобов Н. А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

6. *Сергеев И. Н.* Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2020. Т. 56. С. 63–78.

7. *Сергеев И. Н.* О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2023. № 33. С. 353–423.

8. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 6. С. 895–904.

9. *Сергеев И. Н.* Зависимость от начального момента мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Вестн. Удмуртского ун-та. Математики, Механика, Компьютерные науки. 2024. Т. 34, № 1. С. 80–90.

10. *Сергеев И. Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Т. 46, № 2. С. 171–183.

11. *Сергеев И. Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2016. № 31. С. 177–219.

12. *Сергеев И. Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 732–751.

13. *Сергеев И. Н.* Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, Механика. 2021. № 3. С. 41–46.

14. *Сергеев И. Н.* Полные свойства блуждаемости, колеблемости и вращаемости дифференциальной системы и их связь с мерами этих свойств // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2025. Т. 65. С. 72–84.

15. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства мер колеблемости, блуждаемости и вращаемости дифференциальной системы // Мат. заметки. 2025. Т. 117, № 2. С. 305–314.

16. *Сергеев И. Н.* О различных радиальных свойствах дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 5. С. 596–605.

17. *Сергеев И. Н.* Радиальная устойчивость и неустойчивость дифференциальной системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, Механика. 2025. № 2. С. 83–88.

18. *Бондарев А. А.* Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями радиальной устойчивости и неустойчивости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, Механика. 2025. № 2. С. 36–43.

19. *Бондарев А. А., Сергеев И. Н.* Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 506. С. 25–29.

20. *Сергеев И. Н.* Примеры автономных дифференциальных систем с контрастными сочетаниями мер ляпуновской, перроновской и верхнепредельной устойчивости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, Механика. 2024. № 1. С. 50–54.

21. *Бондарев А. А.* Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика Механика. 2021. № 2. С. 43–47.

22. *Бондарев А. А.* Пример дифференциальной системы с перроновской и верхнепредельной полной неустойчивостью, но массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 2. С. 147–152.

23. *Бондарев А. А.* Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 6. С. 858–859.

24. *Бондарев А. А.* Пример глобально неустойчивой по Ляпунову системы с перроновской и верхнепредельной глобальной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 6. С. 860–861.

25. *Бондарев А. А.* Три контрпримера двумерных автономных дифференциальных систем с тотальными радиальными свойствами // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 11. С. 1573–1574.

26. *Бондарев А. А.* Многомерная автономная дифференциальная система, обладающая единичной мерой неустойчивости, но массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 8. С. 1011–1020.

27. *Денисов Н. В., Васильев В. Д.* Реализуемость неединичной суммы мер устойчивости и неустойчивости дифференциальной системы и их непрерывность по начальному моменту // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 11. С. 1574–1575.

28. *Гаргянц А. Г.* Возможные значения меры перроновской устойчивости линейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика Механика. 2025. № 5. С. 64–68.

29. *Васильев В. Д.* Реализуемость произвольной зависимости меры устойчивости дифференциальной системы от начального момента // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 11. С. 1572–1573.

30. *Денисов Н. В.* Пример системы с единичной мерой устойчивости и тотальной радиальной неустойчивостью // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 11. С. 1573–1574.

31. *Горицкий А. Ю., Фисенко Т. Н.* Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 4. С. 479–486.

32. *Смоленцев М. В.* Существование периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальным спектром частот // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1571–1572.

33. *Бурлаков Д. С., Цой С. В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2014. № 30. С. 75–93.

34. *Кокушкин В. И.* Характеристики колеблемости и вращаемости решений линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1406–1407.

35. *Миценко В. В.* О границах блуждаемости и колеблемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем и линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 851–852.

36. *Лысак М. Д.* Оценки скорости блуждания решений некоторых типов систем линейных дифференциальных уравнений // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Т. 46, № 2. С. 106–111.

37. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60, № 1. С. 24–31.

38. *Быков В. В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 4. С. 419–425.

39. *Шишлянников Е. М.* Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости // Мат. сборник. 2018. Т. 209, № 12. С. 149–164.

40. *Сташ А. Х., Аллахвердян А. А., Артисевич А. Е., Лобода Н. А.* О нулевых спектрах характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера // Динамические системы. 2020. Т. 10, № 2. С. 216–224.

Поступила в редакцию 12 декабря 2025 г.
После доработки 12 декабря 2025 г.
Принята к публикации 15 декабря 2025 г.

Сергеев Игорь Николаевич (ORCID 0000-0001-8976-0732)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
`igniserg@gmail.com`