Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.955

СПЕЦИАЛЬНАЯ СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

В. Г. Романов

Аннотация. Для уравнения параболического типа, главная часть которого представляет собой оператор теплопроводности, рассматривается задача Коши с точечным источником. Выписывается специальная структура решения этой задачи, в основе которой лежит представление решения через произведение фундаментального решения уравнения теплопроводности и полинома по степеням t с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных. Выводятся формулы для вычисления этих коэффициентов, дается оценка остаточного члена. Далее ставятся две обратные задачи для исходного уравнения, которые затем исследуются на основе выписанной структуры решения задачи Коши. Формулируется теорема единственности для рассматриваемых обратных задач.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.208

Ключевые слова: уравнение параболического типа, задача Коши, структура решения, томография, обратная задача, единственность.

К 70-летию Геннадия Владимировича Демиденко

1. Постановка прямой задачи, структура ее решения

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, и $u = u(\mathbf{x}, t)$. Рассмотрим задачу Коши

$$Lu \equiv u_t - \Delta u = q(\mathbf{x})u, \ (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad u(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \tag{1}$$

в которой $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $T > 0$ и $q(\mathbf{x})$ — гладкая функция, относительно которой предположим, что

$$q(\mathbf{x}) \in C^{2m}(\mathbb{R}^n), \quad \|q\|_{C^{2m}(\mathbb{R}^n)} \leq q_0. \tag{2}$$

Здесь $m \geq 0$ — некоторое целое число.

Если $q(\mathbf{x}) = 0$, то решение задачи (1) дается формулой

$$u_0(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}. \tag{3}$$

Для решения задачи (1) имеет место следующая теорема о структуре ее решения.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0029).

Теорема 1. *Пусть условие* (2) *выполнено. Тогда существует единственное непрерывное в области* $D_T = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)\}$ *решение задачи* (1) *и это решение представимо в виде*

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(\mathbf{x}) \frac{t^k}{k!} + u_m(\mathbf{x}, t), \tag{4}$$

в котором $u_m(\mathbf{x}, t)$ — *непрерывная в* D_T *функция, и для нее выполняется оценка*

$$|u_m(\mathbf{x}, t)| \le C u_0(\mathbf{x}, t) \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}, \quad (\mathbf{x}, t) \in D_T, \tag{5}$$

с постоянной $C = C(q_0, T)$, $\alpha_0(\mathbf{x}) = 1$, *функции* α_k *принадлежат* $C^{2(m+1-k)}(\mathbb{R}^n)$, $k = \overline{1, m}$, *и вычисляются по формулам*

$$\alpha_1(\mathbf{x}) = \int\limits_0^1 q(\mathbf{x}^0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) \, ds, \tag{6}$$

$$\alpha_k(\mathbf{x}) = \int\limits_0^1 s^{k-1} [q(\xi)\alpha_{k-1}(\xi) + k\Delta_\xi \alpha_{k-1}(\xi)]_{\xi = \mathbf{x}^0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)} \, ds, \quad k = \overline{2, m}. \tag{7}$$

Замечание. Аналогичное (4) представление решения задачи Коши для уравнения параболического типа было получено в работе [1] при $n = 2$ и $n = 3$ с использованием давно известной формулы связи между решениями задачи Коши для гиперболических и параболических уравнений и асимптотического разложения фундаментального решения гиперболического уравнения в окрестности характеристического конуса, установленного в книге [2]. Ниже дается доказательство теоремы 1, основанное на использовании только уравнения (1), что избавляет от необходимости рассматривать задачу Коши для соответствующего гиперболического уравнение на бесконечном по t интервале и от предположения о поведении ее решения при $t \to \infty$. В этом состоит, в основном, новизна части статьи, связанной с представлением (4).

Доказательство. Будем искать решение задачи (1) в виде (4) с $\alpha_0(\mathbf{x}) = 1$. Так как имеют место равенства

$$u_t(\mathbf{x}, t) = (u_0)_t(\mathbf{x}, t) \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(\mathbf{x}) \frac{t^k}{k!} + u_0(\mathbf{x}, t) \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(\mathbf{x}) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + (u_m)_t(\mathbf{x}, t),$$

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) = \Delta u_0(\mathbf{x}, t) \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(\mathbf{x}) \frac{t^k}{k!}$$
$$- u_0(\mathbf{x}, t) \left[\sum_{k=1}^{m} \nabla \alpha_k(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \frac{t^{k-1}}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \Delta \alpha_k(\mathbf{x}) \frac{t^k}{k!} \right] + \Delta u_m(\mathbf{x}, t)$$

и $L u_0(\mathbf{x}, t) = 0$ для $t > 0$, получаем, что

$$0 = Lu - q(\mathbf{x})u$$
$$= u_0(\mathbf{x}, t) \sum_{k=1}^{m} \frac{t^{k-1}}{k!} [\nabla \alpha_k(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + k\alpha_k(\mathbf{x}) - k\Delta \alpha_{k-1}(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x})\alpha_{k-1}(\mathbf{x})]$$
$$+ L u_m(\mathbf{x}, t) - q(\mathbf{x}) u_m(\mathbf{x}, t) - u_0(\mathbf{x}, t) \frac{t^m}{m!} (\Delta \alpha_m(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\alpha_m(\mathbf{x})), \ (\mathbf{x}, t) \in D_T. \tag{8}$$

Приравнивая к нулю выражение, заключенное в квадратные скобки, получаем уравнения для отыскания функций $\alpha_k(\mathbf{x})$:

$$\nabla\alpha_k(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)+k\alpha_k(\mathbf{x})-k\Delta\alpha_{k-1}(\mathbf{x})-q(\mathbf{x})\alpha_{k-1}(\mathbf{x})=0,\quad k=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Как результат, из (8) находим также, что функция $u_m(\mathbf{x},t)$ должна быть решением задачи Коши

$$Lu_m(\mathbf{x},t)=q(\mathbf{x})u_m(\mathbf{x},t)+h_m(\mathbf{x})u_0(\mathbf{x},t)\frac{t^m}{m!},\ (\mathbf{x},t)\in D_T;\quad u_m(\mathbf{x},0)=0, \tag{10}$$

в которой

$$h_m(\mathbf{x})=\Delta\alpha_m(\mathbf{x})+q(\mathbf{x})\alpha_m(\mathbf{x}).$$

Проинтегрируем уравнения (9). Рассмотрим луч $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0+s\nu$, $s>0$, где $\nu(\mathbf{x})=(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)/|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$ — единичный вектор, $\nu\in\mathbb{S}^{n-1}$. Умножая уравнение (9) на s^{k-1}, перепишем его в виде

$$\frac{d}{ds}(s^k\alpha_k(\mathbf{x}^0+s\nu(\mathbf{x})))-s^{k-1}[q(\xi)\alpha_{k-1}(\xi)+k\Delta_\xi\alpha_{k-1}(\xi)]_{\xi=\mathbf{x}^0+s\nu(\mathbf{x})}=0,\quad k=\overline{1,m}. \tag{11}$$

Интегрируя (11) по отрезку $s\in[0,|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|]$, находим, что

$$\alpha_k(\mathbf{x})=\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k}\int\limits_0^{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|}s^{k-1}[q(\xi)\alpha_{k-1}(\xi)+k\Delta_\xi\alpha_{k-1}(\xi)]_{\xi=\mathbf{x}^0+s\nu(\mathbf{x})}\,ds$$
$$=\int\limits_0^1 s_1^{k-1}[q(\xi)\alpha_{k-1}(\xi)+k\Delta_\xi\alpha_{k-1}(\xi)]_{\xi=\mathbf{x}^0+s_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}\,ds_1,\quad k=\overline{1,m}. \tag{12}$$

Так как $\alpha_0(\mathbf{x})=1$, из (12) вытекают формулы (6) и (7). Из этих формул следует, что $\alpha_k\in C^{2(m+1-k)}(\mathbb{R}^n)$, $k=\overline{1,m}$. Тогда становится очевидной также оценка

$$\|h_m\|_{C(\mathbb{R}^n)}\le A_m q_0^{\eta_m}, \tag{13}$$

в которой A_m — некоторое положительное число, а $\eta_m=1$, если $q_0\le 1$, и $\eta_m=m+1$, если $q_0>1$. Задача (10) сводится к решению интегрального уравнения

$$u_m(\mathbf{x},t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}}\left[q(\xi)u_m(\xi,s)+h_m(\xi)u_0(\xi,s)\frac{s^m}{m!}\right]d\xi ds,\ (\mathbf{x},t)\in D_T. \tag{14}$$

Обозначим

$$u_m^0(\mathbf{x},t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}}h_m(\xi)u_0(\xi,s)\frac{s^m}{m!}\,d\xi ds$$
$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-[\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}+\frac{|\xi-\mathbf{x}^0|^2}{4s}]}s^m h_m(\xi)}{(4\pi)^n[s(t-s)]^{n/2}m!}\,d\xi ds. \tag{15}$$

Тогда уравнение (14) принимает вид

$$u_m(\mathbf{x},t)=u_m^0(\mathbf{x},t)+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}}q(\xi)u_m(\xi,s)\,d\xi ds. \tag{16}$$

Воспользуемся для уравнения (16) методом последовательных приближений. В силу линейности этого уравнения удобно представить его решение в виде ряда

$$u_m(\mathbf{x},t) = u_m^0(\mathbf{x},t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_m^k(\mathbf{x},t),$$

в котором функции $u_m^k(\mathbf{x},t)$, $k = 1, 2, \ldots$, определены формулой

$$u_m^k(\mathbf{x},t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}} q(\xi) u_m^{k-1}(\xi,s)\,d\xi ds, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Оценим $u_m^k(\mathbf{x},t)$, $k = 0, 1, \ldots$. Введем новую систему координат ξ', ξ_n', причем $\xi' = (\xi_1', \ldots, \xi_{n-1}')$ и ξ_i', $i = 1, 2, \ldots, n$, определены формулой

$$\xi = \mathbf{x}^0 + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i' \mathbf{e}_i + \xi_n' \mathbf{e}_n,$$

в которой векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ ортогональны друг другу и $\mathbf{e}_n = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)/|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$. Тогда

$$\begin{aligned} g(\xi,\mathbf{x},s,t) := \frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)} + \frac{|\xi-\mathbf{x}^0|^2}{4s} &= \frac{|\xi'|^2 + (\xi_n' - |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|)^2}{4(t-s)} + \frac{|\xi'|^2 + |\xi_n'|^2}{4s} \\ &= \frac{t(|\xi'|^2 + |\xi_n'|^2) - 2s\xi_n'|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| + s|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4s(t-s)} \\ &= \frac{t(|\xi'|^2 + (\xi_n' - s|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|/t)^2)}{4s(t-s)} + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}. \end{aligned} \tag{18}$$

Введем также сферические координаты $r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ вектора ξ' формулой

$$\xi' = r\nu'(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}),$$

в которой $\nu'(\varphi)$ — вектор единичной сферы $\mathbb{S}^{n-2}$. Положим

$$r = 2\sqrt{zs(t-s)/t}, \quad \xi_n' = s|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|/t + 2(-1)^j\sqrt{\zeta s(t-s)/t},$$

где $j = 1$, если $\xi_n' < s|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|/t$, и $j = 2$, если $\xi_n' > s|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|/t$. Тогда

$$\begin{gathered} g(\xi,\mathbf{x},s,t) = z + \zeta + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}, \\ d\xi = d\xi' d\xi_n' = r^{n-2}\,dr d\omega d\xi_n' = 2^{n-2}[s(t-s)/t]^{n/2} z^{(n-3)/2}\zeta^{-1/2}\,dz d\omega d\zeta. \end{gathered} \tag{19}$$

В этой формуле $d\omega$ — элемент площади единичной сферы $\mathbb{S}^{n-2}$.

Из условия (2) и формул (13), (15) и (19) находим, что

$$\begin{aligned} |u_m^0(\mathbf{x},t)| &\le \frac{A_m q_0^{\eta_m}}{2^{n+1}\pi^n t^{n/2} m!} \\ &\quad \times e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}} \int_0^t \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-2}} e^{-z-\zeta} z^{(n-3)/2}\zeta^{-1/2}\,d\omega dz d\zeta\, s^m\,ds \\ &= \frac{A_m q_0^{\eta_m} t^{m+1}}{2\pi^{n/2}(m+1)!} u_0(\mathbf{x},t)\omega_{n-1}\Gamma((n-1)/2)\Gamma(1/2), \end{aligned}$$

где $\omega_{n-1} = (n-1)\pi^{(n-1)/2}/\Gamma((n-1)/2)$ — площадь сферы $\mathbb{S}^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Так как $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$, получаем окончательную оценку в виде

$$\left|u_m^0(\mathbf{x},t)\right| \leq \frac{A_m q_0^{\eta_m}(n-1)t^{m+1}}{2(m+1)!}\, u_0(\mathbf{x},t). \tag{20}$$

Используя формулы (17), (19) и (20), получаем оценку последующего приближения

$$\begin{aligned}\left|u_m^1(\mathbf{x},t)\right| \leq{}& \frac{A_m q_0^{\eta_m+1}(n-1)}{2^{2+n}\pi^n t^{n/2}(m+1)!} \\ &\times e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} e^{-z-\zeta} z^{(n-3)/2}\zeta^{-1/2}\, d\omega dz d\zeta\, s^{m+1}\, ds \\ &= \frac{A_m q_0^{\eta_m+1}(n-1)t^{m+2}}{4\pi^{n/2}(m+2)!} u_0(\mathbf{x},t)\omega_{n-1}\Gamma((n-1)/2)\Gamma(1/2) \\ &= A_m\, u_0(\mathbf{x},t)\frac{q_0^{1+\eta_m}(n-1)^2 t^{(m+2)}}{2^2(m+2)!}.\end{aligned}$$

Методом математической индукции устанавливается общая оценка

$$\left|u_m^k(\mathbf{x},t)\right| \leq A_m\, u_0(\mathbf{x},t)\frac{q_0^{k+\eta_m}(n-1)^{k+1}t^{m+k+1}}{2^{k+1}(m+k+1)!}, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{21}$$

Действительно, допустим, что эта оценка верна для всех $k \leq k_0$, $k_0 \geq 1$. Тогда согласно (16) имеем

$$\begin{aligned}\left|u_m^{k_0+1}(\mathbf{x},t)\right| \leq{}& q_0 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \left|u_m^{k_0}(\xi,s)\right| d\xi ds \\ &\leq \frac{q_0}{(4\pi)^n} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-g(\xi,\mathbf{x},s,t)} A_m \frac{q_0^{k_0+\eta_m}(n-1)^{k_0+1}s^{m+k_0+1}}{2^{k_0+1}(m+k_0+1)!}\, d\xi ds \\ &\leq A_m \frac{q_0^{k_0+1+\eta_m}(n-1)^{k_0+1}e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}}}{\pi^n 2^{k_0+n+2}t^{n/2}(m+k_0+1)!} \\ &\times \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} e^{-z-\zeta} z^{(n-3)/2}\zeta^{-1/2}\, d\omega dz d\zeta\, s^{m+k_0+1}\, ds \\ &= A_m \frac{q_0^{k_0+1+\eta_m}(n-1)^{k_0+2}u_0(\mathbf{x},t)t^{m+k_0+2}}{2^{k_0+2}(m+k_0+2)!}.\end{aligned} \tag{22}$$

Формула (22) совпадает с формулой (21) при $k = k_0 + 1$. Тем самым формула (21) установлена.

Из формулы (21) следует, что ряд

$$u_m^0(\mathbf{x},t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_m^k(\mathbf{x},t)$$

сходится в области D_T равномерно к функции $u_m(\mathbf{x},t)$ и для этой функции справедлива оценка

$$|u_m(\mathbf{x},t)| \leq A_m q_0^{\eta_m}\, u_0(\mathbf{x},t)\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q_0^k(n-1)^{k+1}t^k(m+1)!}{2^{k+1}(m+k+1)!}.$$

Отсюда выводится неравенство (5).

Таким образом, представление (4) обосновано. Заметим, что построенное решение задачи (1) единственно. Это следует из хорошо известных теорем для линейных параболических уравнений. □

2. Постановка обратных задач

В этом разделе будем предполагать, что точка $\mathbf{x}^0$ может меняться, т. е. она является переменным параметром задачи (1). Поэтому решение этой задачи в дальнейшем обозначим через $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}^0)$, а фундаментальное решение уравнения теплопроводности — через $u_0(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}^0)$. Коэффициенты α_k разложения (4) обозначим через $\alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$.

Пусть функция $F(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0)$ определена формулой

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \lim_{t \to +0} \left[\frac{1}{t} \left(\frac{u(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}^0)}{u_0(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}^0)} - 1 \right) \right]. \tag{23}$$

Из теоремы 1 следует, что эта формула корректна, если функция $q(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию (2) при $m = 1$. Более того, в этом случае имеет место равенство

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \int_0^1 q(\mathbf{x}^0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))\, ds. \tag{24}$$

Пусть $r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ — сферические координаты точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, определяемые формулой

$$\mathbf{x} = r\nu(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}),$$

в которой координаты единичного вектора $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ заданы равенствами

$$\begin{aligned}
&\nu_1 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1},\\
&\nu_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1},\\
&\nu_3 = \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\nu_n = \sin\varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Пусть $n \geq 3$ и $\mathbf{e}^{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) = \nu(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, 0)$ — единичный вектор. Определим векторы

$$\mathbf{e}^k(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) = \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \mathbf{e}^{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}), \quad k = \overline{1, n-2}.$$

Все векторы $\mathbf{e}^k(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$, $k = \overline{1, n-1}$, ортогональны друг другу и лежат в плоскости $x_n = 0$. Пусть $\mathbf{e}^n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ — единичный орт оси x_n. Зададим двумерную плоскость $\Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$:

$$\Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^k(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) = 0,\ k = \overline{1, n-2}\}.$$

При $n = 2$ примем, что $\Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим окружность C_R, которая является пересечением плоскости $\Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$ и сферы $S_R = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| = R\}$. Если точка $\mathbf{x}$ принадлежит C_R, то она может быть записана в виде

$$\mathbf{x} = R[\mathbf{e}^{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cos\psi + \mathbf{e}^n \sin\psi] := \chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi), \quad \psi \in [0, 2\pi).$$

Аналогично любую точку $\mathbf{x}^0 \in C_R$ можно представить в виде

$$\mathbf{x}^0 = R(\mathbf{e}^{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cos\psi_0 + \mathbf{e}^n \sin\psi_0) = \chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi_0),\ \psi_0 \in [0, 2\pi).$$

Ниже формулируются две обратные задачи о восстановлении коэффициента $q(\mathbf{x})$ в уравнении (1) по функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$. Их формулировки отличаются только множествами, на которых задана функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$.

Задача 1. *Найти* $q(\mathbf{x})$ *в области* $B_R = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| < R\}$ *по функции*

$$f_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi, \psi_0) = F(\chi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi), \chi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi_0)) \qquad (25)$$
$$\forall(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}), (\psi, \psi_0) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi).$$

Пусть теперь $q(\mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^n \setminus B_R)$ и $\mathbf{x}^0 = z\mathbf{e}^n$, где $z \in (a, b), R < a < b$, а $\mathbf{x} \in C_R(z)$, где $C_R(z) = \{\mathbf{x} \in C_R \mid \psi \in ([0, 2\pi) \setminus (\arccos(R/z), \pi - \arccos(R/z)))\}$. Заметим, что $\mathbf{x} \in C_R(z)$ тогда и только тогда, когда отрезок прямой линии, соединяющий точки $\mathbf{x}^0 = z\mathbf{e}^n$ и $\mathbf{x} \in C_R$, пересекает область B_R.

Задача 2. *Найти* $q(\mathbf{x})$ *в области* $B_R = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| < R\}$ *по функции*

$$f_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi, z) = F(\chi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi), z\mathbf{e}^n) \qquad (26)$$
$$\forall(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}), \psi \in ([0, 2\pi) \setminus (\arccos(R/z), \pi - \arccos(R/z))), \quad z \in (a, b).$$

3. Анализ обратных задач

Используя формулы (24) и (25), приведем задачу 1 к решению уравнения

$$\int_0^1 q(\chi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi_0) + s[\chi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi) - \chi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi_0)])\, ds$$
$$= f_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi, \psi_0)\ \forall(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}), (\psi, \psi_0) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi). \qquad (27)$$

Это уравнение означает, что при каждом фиксированном наборе переменных φ_k, $k = \overline{1, n-2}$, на двумерной плоскости $\Sigma(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})$ заданы интегралы по всем отрезкам прямых линий, соединяющим точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^0$ окружности C_R, лежащей на той же самой плоскости. Следовательно, задача о восстановлении функции $q(\mathbf{x})$ в сечении $B_R \cap \Sigma(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})$ сводится к обычной задаче томографии. О ее применении в медицине смотрите лекцию нобелевского лауреата А. М. Кормака [3]. Методы ее решения хорошо разработаны (см. [4–10]) и существует множество ее численных реализаций. Таким образом, в каждом сечении $B_R \cap \Sigma(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})$ функция $q(\mathbf{x})$ однозначно восстанавливается по данным обратной задачи. Объединение всех таких сечений образует область B_R. Следовательно, задание интегралов (27) позволяет однозначно найти искомый коэффициент $q(\mathbf{x})$ во всей области B_R.

Перейдем к анализу задачи 2. Используя формулы (24) и (26), приходим к уравнению

$$\int_0^1 q(z\mathbf{e}^n + s[\chi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi) - z\mathbf{e}^n])\, ds = f_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}, \psi, z) \qquad (28)$$
$$\forall(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}), \psi \in ([0, 2\pi) \setminus (\arccos(R/z), \pi - \arccos(R/z))), \quad z \in (a, b).$$

Рассмотрим опять двумерное сечение $B_R \cap \Sigma(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})$. Уравнение (28) означает, что в этом сечении заданы интегралы от $q(\mathbf{x})$ по отрезкам прямых линий, соединяющим точки $\mathbf{x}^0 = z\mathbf{e}^n$, $z \in (a, b)$, и $\mathbf{x} \in C_R$, причем на части этих отрезков, лежащей вне области B_R, функция $q(\mathbf{x})$ равна нулю. В результате приходим в этом сечении к так называемой *задаче томографии с неполными данными*. Эта задача отличается от предыдущей меньшей устойчивостью к данным задачи, но сохраняется единственность ее решения (см. [10]).

Резюмируя выполненный анализ обратных задач, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Обратные задачи* 1 *и* 2 *имеют не более одного решения. Задача* 1 *сводится к решению задачи рентгеновской томографии* (27), *задача* 2 *— к задаче томографии* (28) *с неполными данными.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В. Г.* Асимптотическое разложение фундаментального решения параболического уравнения и обратные задачи // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 2. С. 141–144.

2. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.

3. *Cormack A. M.* Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it // Nobel lectures in physiology or medicine 1971.1980. Singapore: World Sci. Publ. Co., 1992. P. 551–563.

4. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1966.

5. *Deans S. R.* The Radon transform and some of its applications. New York: John Wiley & Sons, 1983.

6. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

7. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.

8. *Finch D. V.* Cone beam reconstruction with sources on a curve // SIAM J. Appl. Math. 1985. V. 45, N 4. P. 665–673.

9. *Grangeat P.* Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1991. (Mathematical methods in tomography).

10. *Palamodov V. P.* Reconstructive integral geometry. Basel: Birkhäuser, 2004.

Поступила в редакцию 31 декабря 2025 г.
После доработки 31 декабря 2025 г.
Принята к публикации 26 января 2026 г.

Романов Владимир Гаврилович (ORCID 0000-0002-5426-4277)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru