Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.518

ОЦЕНКИ НОРМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

К. Т. Мынбаев, Е. Н. Ломакина

Аннотация. Найдены альтернативные критерии ограниченности и компактности интегрального оператора типа Харди, действующего в весовых пространствах Лебега. Критерии сформулированы в терминах последовательностей, зависящих от весовых функций и мер пространств. Найдены условия, при которых идеалы компактных операторов совпадают с идеалами, порожденными последовательностями $\mathbf{s}$-чисел рассматриваемого оператора. При этом получены оценки норм оператора в идеалах через интегральные выражения, зависящие от исходных весовых функций.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.207

Ключевые слова: интегральный оператор, измеримое пространство, топологическое пространство, $\mathbf{s}$-числа, аппроксимативные числа, числа Гельфанда, числа Колмогорова, операторный идеал.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра, содержащая борелевские подмножества открытого множества Ω в хаусдорфовом топологическом пространстве. Обозначим через $L^p_{vd\nu}(\Omega)$ пространство $\mathfrak{M}$-измеримых функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p_{vd\nu}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f|^p v\, d\nu\right)^{1/p},$$

весовой функцией v и $1 < p < \infty$. В данной работе изучаются свойства компактности и аппроксимируемости оператора типа Харди $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \le q < \infty$,

$$Tf(y) = \int\limits_{\Omega(\tau(y))} f\, d\nu, \tag{1.1}$$

на множестве ν-измеримых функций, заданных на открытом подмножестве Ω хаусдорфова топологического пространства с σ-аддитивными мерами ν и μ. Весовые функции u, v предполагаются положительными и конечными почти всюду на Ω. Норму линейного оператора T, действующего из $L^p_{vd\nu}(\Omega)$ в $L^q_{ud\mu}(\Omega)$, обозначим через $\|T\| = \|T\|_{L^p_{vd\nu}(\Omega)\to L^q_{ud\mu}(\Omega)}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Научного Комитета Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19676673), а также в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ для ХФИЦ ДВО РАН.

Свойства оператора (1.1) в пространствах Лебега на полуоси достаточно полно изучены во многих статьях и монографиях. Некоторые обобщения для многомерных областей в банаховых функциональных пространствах рассматривались в [1]. В статьях [2, 3] авторы смогли свести многомерный случай к одномерному, применяя сферические координаты, в [4, 5] — используя полярное разложение, в [6, 7], а также [8], сделав предположение, что веса являются произведениями функций одной переменной.

Данная работа является продолжением исследований К. Т. Мынбаева и Е. Н. Ломакиной [9]. Для оператора (1.1) доказаны критерии ограниченности и компактности, также получены двусторонние оценки аппроксимативных чисел. Теоремы доказываются с использованием специальных разбиений, что позволяет получить обобщение многих одномерных результатов. Трехвесовое неравенство Харди в топологических измеримых пространствах было исследовано в статье [10].

Развитие теории интегральных операторов, которое началось с получения критериев ограниченности и компактности, имеет свое продолжение в направлении исследования поведения $\mathbf{s}$-чисел и принадлежности оператора различным операторным идеалам. Основы теории $\mathbf{s}$-чисел, представителями которых являются аппроксимативные числа, числа Колмогорова, Гельфанда и др., заложены в [11–16]. Следуя [11, п. 1], операторные идеалы будем обозначать заглавными готическими буквами.

Пусть $\mathfrak{L}$ — класс всех ограниченных линейных операторов, действующих между произвольными банаховыми пространствами; $\mathfrak{L}(X,Y)$ — банахово пространство операторов из X в Y для заданных пространств X, Y.

Операторным идеалом $\mathfrak{I}$ называется всякий подкласс в $\mathfrak{L}$ такой, что для любой его компоненты $\mathfrak{I}(X,Y)=\mathfrak{I}\cap\mathfrak{L}(X,Y)$ выполнены условия:

1) $I_{\mathscr{R}}\in\mathfrak{I}$, где $\mathscr{R}$ обозначает одномерное банахово пространство;

2) если $S_1,S_2\in\mathfrak{I}(X,Y)$, то $S_1+S_2\in\mathfrak{I}(X,Y)$;

3) если $T\in\mathfrak{L}(X_0,X)$, $S\in\mathfrak{I}(X,Y)$ и $Q\in\mathfrak{L}(Y,Y_0)$, то $QST\in\mathfrak{I}(X_0,Y_0)$.

Наименьшим операторным идеалом является класс всех конечномерных операторов $\mathfrak{F}$. Класс всех компактных операторов образует операторный идеал и обозначается через $\mathfrak{K}$.

Оператор $S\in\mathfrak{L}(X,Y)$ называется *аппроксимируемым*, если существуют операторы $S_1,S_2,\ldots\in\mathfrak{F}(X,Y)$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|S-S_n\|=0$. Класс всех аппроксимируемых операторов образует операторный идеал $\mathfrak{G}$, также хорошо известно вложение $\mathfrak{G}\subset\mathfrak{K}$ [11, 1.11.2]. Теория операторных идеалов подробно изложена в монографии [11].

Говорят, что банахово пространство X обладает *аппроксимационным свойством* [11, 10.1.1], если для всякого компактного подмножества $K\subset X$ и для любого $\varepsilon>0$ существует конечномерный оператор $L:X\to X$ такой, что $\|L\|\le M<\infty$ и $\|x-Lx\|\le\varepsilon$ для всех $x\in K$. В силу того, что пространство $L^q_{ud\mu}(\Omega)$ при $1\le q\le\infty$ обладает аппроксимационным свойством, имеем [11, 10.1.3]

$$\mathfrak{G}\big(L^p_{vd\nu}(\Omega),L^q_{ud\mu}(\Omega)\big)=\mathfrak{K}\big(L^p_{vd\nu}(\Omega),L^q_{ud\mu}(\Omega)\big).$$

Другой способ построения операторных идеалов связан с $\mathbf{s}$-числами операторов: последовательность $\mathbf{s}$-чисел определяет (квази)норму оператора в операторном идеале.

Рассмотрим отображение $\mathbf{s}:S\to\{\mathbf{s}_n(S)\}$, сопоставляющее каждому оператору $S\in\mathfrak{L}(X,Y)$ однозначно определенную числовую последовательность

$\{\mathbf{s}_n(S)\}$, называемую $\mathbf{s}$-*функцией* и удовлетворяющую следующим условиям:

(a1) $\|S\| = \mathbf{s}_1(S) \ge \mathbf{s}_2(S) \ge \mathbf{s}_3(S) \ge \dots \ge 0$;

(a2) $\mathbf{s}_n(S+R) \le \mathbf{s}_n(S) + \|R\|$ для $S, R \in \mathfrak{L}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$;

(a3) $\mathbf{s}_n(BSA) \le \|B\|\mathbf{s}_n(S)\|A\|$, если $A \in \mathfrak{L}(X_0, X)$, $S \in \mathfrak{L}(X,Y)$, $B \in \mathfrak{L}(Y, Y_0)$, $n \in \mathbb{N}$;

(a4) $\mathbf{s}_n\big(\mathrm{Id} : l_2^n \to l_2^n\big) = 1$, $n \in \mathbb{N}$;

(a5) $\mathbf{s}_n(S) = 0$, если $\operatorname{rank} S < n$.

Будем называть $\mathbf{s}_n(S)$ *n-м $\mathbf{s}$-числом* оператора S. Примерами $\mathbf{s}$-чисел служат:

аппроксимативные числа ($\mathbf{a}$-числа), определяемые формулой

$$\mathbf{a}_n(S) = \inf\{\|S - L\|_{X\to Y} : L : X \to Y,\ \mathrm{rank} L \le n-1\}, \quad n \in \mathbb{N};$$

числа Гельфанда

$$\mathbf{c}_n(S) = \inf\big\{\big\|SJ_M^X\big\| : M \subseteq X,\ \mathrm{codim}(M) < n\big\},$$

где J_M^X означает каноническую инъекцию из подпространства M на банахово пространство X, т. е. $M \xrightarrow{J_M^X} X \xrightarrow{S} Y$;

числа Колмогорова

$$\mathbf{d}_n(S) = \inf\big\{\big\|Q_N^Y S\big\| : N \subseteq Y,\ \dim(N) < n\big\},$$

где Q_N^Y — каноническая сюръекция из банахова пространства Y на фактор-пространство Y/N, т. е. $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{Q_N^Y} Y/N$;

числа Гильберта

$$\mathbf{h}_n(S) = \sup\{\mathbf{a}_n(FSE) : E \in \mathfrak{L}(l_2, X),\ F \in \mathfrak{L}(Y, l_2),\ \|E\| \le 1,\ \|F\| \le 1\}.$$

Аксиоматическая теория $\mathbf{s}$-чисел разработана Пичем в монографиях [11, 12] и статье [14].

Обозначим через $\mathscr{K}(X,Y)$ класс всех компактных операторов из $\mathfrak{L}(X,Y)$. Пусть H является комплексным гильбертовым пространством и $S \in \mathscr{K}(H,H)$, тогда S^*S имеет положительный самосопряженный квадратный корень, $|S| = (S^*S)^{1/2} \in \mathscr{K}(H,H)$ и для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{s}_n(S) = \boldsymbol{\lambda}_n(|S|),$$

где собственные числа $\boldsymbol{\lambda}_n(|S|)$ берутся в убывающем порядке и с учетом кратности.

Соотношения между рассматриваемыми числами оператора $S \in \mathfrak{L}(X,Y)$ содержатся в следующей теореме.

Теорема 1.1 [11, п. 11.12.2, 12.3.2; 12, п. 2.10.1, 2.10.2]. *Пусть $S \in \mathfrak{L}(X,Y)$. Тогда*

(i) $\mathbf{h}_n(S) \le \mathbf{c}_n(S) \le \mathbf{a}_n(S)$, $\quad \mathbf{h}_n(S) \le \mathbf{d}_n(S) \le \mathbf{a}_n(S)$,

(ii) $\mathbf{a}_n(S) \le 2n^{1/2}\mathbf{c}_n(S)$, $\quad \mathbf{a}_n(S) \le 2n^{1/2}\mathbf{d}_n(S)$.

Если $S \in \mathscr{K}(H,H)$, то $\mathbf{a}_n(S) = \mathbf{d}_n(S) = \mathbf{c}_n(S) = \mathbf{h}_n(S)$.

Таким образом, получив оценки для аппроксимативных чисел и используя теорему 1.1, можно получить оценки для других характеристических чисел оператора $S \in \mathfrak{L}(X,Y)$.

Оператор $S \in \mathfrak{L}(X,Y)$ называется $\mathfrak{A}_\alpha$-*оператором*, если последовательность его $\mathbf{a}$-чисел суммируема со степенью α. Обозначим

$$\|S\|_{\mathfrak{A}_\alpha} = \|\{\mathbf{a}_n(S)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n^\alpha(S)\right)^{1/\alpha}, \quad 1 < \alpha < \infty. \tag{1.2}$$

Класс операторов $\mathfrak{A}_\alpha$ с нормой (1.2) образует нормированный операторный идеал [11, 14.2.4]. Идеал $\mathfrak{A}_\alpha$ компактных операторов с нормой (1.2), действующих в гильбертовых пространствах, есть идеал Шаттена — фон Неймана [13].

Обозначим через $\mathbf{s}_n(S)$ одну из последовательностей характеристических чисел $\mathbf{c}_n(S)$ или $\mathbf{d}_n(S)$ оператора S. Соответствующий этой последовательности операторный идеал, следуя [11, 14.2.1], обозначается через $\mathfrak{S}_\alpha$ с нормой

$$\|S\|_{\mathfrak{S}_\alpha} = \|\{\mathbf{s}_k(S)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{s}_n^\alpha(S)\right)^{1/\alpha}, \quad 1 < \alpha < \infty.$$

Данная статья организована следующим образом. В разд. 2 рассматриваются ограничения на области Ω: это параметризация и условие монотонности. Интегрирование в Ω проводится по подмножествам $\Omega(t)$ произвольного открытого множества Ω в хаусдорфовом топологическом пространстве X с σ-аддитивными мерами μ, ν. Мы не накладываем требования на форму $\Omega(t)$ и не требуем связности $\Omega(t)$ и их дополнений $\Omega\backslash\Omega(t)$. Также в разд. 2 приведены основные результаты исследований [9], используемые в работе. В разд. 3 доказаны теоремы об ограниченности и компактности оператора (1.1) в терминах последовательностей, зависящих от весовых функций и мер пространств, в которых действует оператор T. Для данного оператора типа Харди (1.1) найдены необходимые и достаточные условия, при которых

$$\mathfrak{K}(X,Y) = \mathfrak{A}_\alpha(X,Y), \quad \mathfrak{K}(X,Y) = \mathfrak{S}_\alpha(X,Y),$$

где $X = L^p_{vd\nu}(\Omega)$, $Y = L^q_{ud\mu}(\Omega)$ в области параметров пространств $1 < p \le q < \infty$. При этом получены оценки нормы T в идеалах через интегральные выражения, зависящие от исходных весовых функций пространств. Данное исследование обобщает полученные ранее результаты [17–19].

2. Ограниченность и компактность оператора

Предположение 1. *Пусть Ω — открытое подмножество хаусдорфова топологического пространства E с σ-аддитивными мерами μ, ν. Меры заданы на σ-алгебре $\mathfrak{M}$, содержащей борелевские множества. Весовые функции u, v предполагаются положительными и конечными почти всюду на Ω.*

Предположение 2. *Обозначим через $\{\Omega(t) : t \ge 0\}$ однопараметрическое семейство открытых подмножеств Ω, удовлетворяющих свойству монотонности:*

1. *$\Omega(t_1)$ является собственным подмножеством $\Omega(t_2)$ при $t_1 < t_2$.*
2. *$\Omega(t)$ начиная с пустого множества покрывает почти все Ω:*

$$\Omega(0) = \bigcap_{t>0} \Omega(t) = \varnothing, \quad \nu\Big(\Omega\backslash \bigcup_{t>0} \Omega(t)\Big) = 0.$$

3. *Определим $\omega(t) = \overline{\Omega(t)} \cap \overline{(\Omega\backslash\Omega(t))}$ — границу $\Omega(t)$ в относительной топологии. Мы требуем, чтобы границы были непересекающимися и покрывали почти всё Ω:*

$$\omega(t_1) \cap \omega(t_2) = \varnothing, \ t_1 \ne t_2, \quad \nu\Big(\Omega\backslash \bigcup_{t>0} \omega(t)\Big) = 0. \tag{2.1}$$

4. *Переходя при необходимости к другой параметризации, считаем, что*

$$\nu\Big(\Omega\backslash \bigcup_{t\le N}\omega(t)\Big) > 0 \text{ для любого } N<\infty. \tag{2.2}$$

5. *Границы являются тонкими в том смысле, что*

$$\nu(\omega(t)) = 0 \text{ для всех } t>0. \tag{2.3}$$

Из этого предположения вытекают следствия.

1. В силу (2.1) для ν-почти каждого $y\in\Omega$ существует единственное $\tau(y)>0$, которое при $y\in\omega(\tau(y))$ позволяет определить оператор (1.1) для любой неотрицательной $\mathfrak{M}$-измеримой функции f.

На множестве $\Omega_0\subset\Omega$ тех y, у которых $\tau(y)$ не определено, полагаем $\tau(\Omega_0)=\varnothing$.

2. Условие (2.2) и $\omega(t)\neq\varnothing$ при $t>0$ приводят к равенству $\tau(\Omega)=(0,\infty)$.

3. Согласно предположению (2.3)

$$\int\limits_{\Omega(t)} f\,d\nu = \int\limits_{\overline{\Omega(t)}} f\,d\nu,$$

и с точностью до множества ν-меры нуль

$$\{x\in\Omega : \tau(x)>\tau(y)\} = \Omega\backslash\Omega(\tau(y)).$$

Для $0\le a<b\le\infty$ обозначим $\Omega([a,b])=\Omega(b)\setminus\Omega(a)$.

Так как $\tau(y_1)=\tau(y_2)$ для любых $y_1,y_2\in\omega(t)$, значение $Tf(y)$ одинаково для всех $y\in\omega(t)$, и можно определить $Sf(t)=Tf(y)$, если $y\in\omega(t)$.

Для неотрицательного f функция Sf не убывает, а ее скачки равны нулю в силу (2.3). Таким образом, для каждого $f\ge 0$

$$Sf \text{ непрерывна там, где она конечна, и } \lim_{t\to 0} Sf(t)=0. \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $1<p\le q<\infty$, $p'=\frac{p}{p-1}$. *Оператор* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega)\to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, *заданный формулой* (1.1), *ограничен тогда и только тогда, когда*

$$A=\sup_{t>0}A(t)=\sup_{t>0}\bigg(\int\limits_{\Omega(t)} v^{-p'/p}\,d\nu\bigg)^{1/p'}\bigg(\int\limits_{\Omega\backslash\Omega(t)} u\,d\mu\bigg)^{1/q}<\infty.$$

Более того, $A\le\|T\|\le 4A$.

Результаты теоремы об ограниченности рассматриваемого оператора T сохраняются при сужении на конечный интервал.

Замечание 1. Оператор $T_{[a,b]} : L^p_{vd\nu}(\Omega([a,b]))\to L^q_{ud\mu}(\Omega([a,b]))$, $1<p\le q<\infty$, заданный формулой

$$T_{[a,b]}f(y)=\int\limits_{\Omega(a<\tau(y)<b)} f\,d\nu,$$

ограничен тогда и только тогда, когда

$$A_{[a,b]}=\sup_{a<\tau(x)<b}A_{[a,b]}(\tau(x)) = \sup_{a<\tau(x)<b}\bigg(\int\limits_{\Omega([a,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\bigg)^{1/p'}\bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),b])} u\,d\mu\bigg)^{1/q}<\infty. \tag{2.5}$$

Более того, $A_{[a,b]} \le \|T_{[a,b]}\| \le 4A_{[a,b]}$.

Замечание 2. В статье [9] рассматривается также критерий ограниченности и компактности оператора Харди $T^*: L^p_{vd\nu}(D) \to L^q_{ud\mu}(D)$, $1 < p \le q < \infty$, вида

$$T^*f(y) = \int\limits_{D(\tau(y))} f\,d\nu, \quad y \in D, \tag{2.6}$$

где на область D в отличие от Ω накладываются предположения:

1) $\{D(t) : t \ge 0\}$ — однопараметрическое семейство открытых подмножеств D такое, что $D(t_2)$ — собственное подмножество $D(t_1)$ при $t_1 < t_2$;

2) $D(0) = D$, $D(\infty) = \bigcap\limits_{t>0} D(t) = \varnothing$, $\nu\big(D\setminus \bigcup\limits_{t>0} D(t)\big) = 0$.

В классическом случае это оператор $T^*f(y) = \int\limits_y^\infty f(t)\,dt$ и $D(t) = (t,\infty) \subset D(0,\infty)$, границей является $\omega(t) = t$ и $D(t) = \{s \in D : \omega(s) > \omega(t)\}$.

Теорема 2.2. *Оператор $T^*: L^p_{vd\nu}(D) \to L^q_{ud\mu}(D)$, $1 < p \le q < \infty$, заданный формулой* (2.6), *ограничен тогда и только тогда, когда*

$$A^* = \sup_{t>0} A^*(t) = \sup_{t>0}\bigg(\int\limits_{D\setminus D(t)} u\,d\mu\bigg)^{1/q}\bigg(\int\limits_{D(t)} v^{-p'/p}\,d\nu\bigg)^{1/p'} < \infty.$$

Более того, $A^* \le \|T^*\| \le 4A^*$.

Теорема 2.3. *Оператор $T: L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \le q < \infty$, заданный формулой* (1.1), *компактен тогда и только тогда, когда $A < \infty$ и*

$$\varlimsup_{t\to 0} A(t) = \varlimsup_{t\to+\infty} A(t) = 0.$$

Далее, на $[a,b] \subseteq [0,\infty)$ рассмотрим вопрос о том, насколько хорошо оператор (1.1) аппроксимируется средним. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\mu_u(\Omega([a,b])) = \int\limits_{\Omega([a,b])} u\,d\mu, \quad Ff = \frac{1}{\mu_u(\Omega([a,b]))}\int\limits_{\Omega([a,b])} (Tf)u\,d\mu,\\ \mathscr{T}_{[a,b]}f(x) = \chi_{\Omega([a,b])}(x)(Tf(x) - Ff).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Теорема 2.4. *Пусть оператор $\mathscr{T}_{[a,b]}: L^p_{vd\nu}(\Omega([a,b])) \to L^q_{ud\mu}(\Omega([a,b]))$, $1 < p \le q < \infty$, определен формулой* (2.7). *Точка d выбрана так, что $\mu_u(\Omega([a,d])) = \mu_u(\Omega([d,b])) = \frac{1}{2}\mu_u(\Omega([a,b]))$, и $\mathbf{A}_{[a,b]} = \max\{A^*_{[a,d]}, A_{[d,b]}\}$, где*

$$A^*_{[a,d]} = \sup_{a<\tau(x)<d}\bigg(\int\limits_{\Omega([a,\tau(x)])} u\,d\mu\bigg)^{1/q}\bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),\,d])} v^{-p'/p}\,d\nu\bigg)^{1/p'},$$

$$A_{[d,b]} = \sup_{d<\tau(x)<b}\bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),b])} u\,d\mu\bigg)^{1/q}\bigg(\int\limits_{\Omega([d,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\bigg)^{1/p'}.$$

Тогда

$$(1 - 2^{-1/q})\mathbf{A}_{[a,b]} \le \|\mathscr{T}_{[a,b]}\| \le 8\mathbf{A}_{[a,b]}.$$

Теорема 2.5. *Пусть оператор* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \le q < \infty$, *заданный формулой* (1.1), *компактен. Для* $0 < \varepsilon < \|T\|$ *найдутся точки* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = \infty$ *и промежутки* $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, \ldots, N$, *такие, что*

$$\sup_{t\in\Delta_0} A_{\Delta_0}(t) = \varepsilon, \quad \max_{k=1,\ldots,N-2} \mathbf{A}_{\Delta_k} = \varepsilon, \quad \mathbf{A}_{\Delta_{N-1}} \le \varepsilon, \quad \sup_{t\in\Delta_N} A_{\Delta_N}(t) = \varepsilon. \tag{2.8}$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{1/q}}\right)\varepsilon N^{1/q-1/p} \le \mathbf{a}_N(T), \quad \mathbf{a}_{N+1}(T) \le 8\varepsilon. \tag{2.9}$$

Обозначим через $\mathbf{s}_n(T)$ одну из последовательностей $\mathbf{c}_n(T)$ или $\mathbf{d}_n(T)$ оператора T. Используя соотношения между характеристическими числами (теорему 1.1), получаем следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Тогда*

$$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{1/q}}\right)\varepsilon N^{1/q-1/p-1/2} \le \mathbf{s}_N(T), \quad \mathbf{s}_{N+1}(T) \le 8\varepsilon.$$

Теоремы 2.1–2.6 доказаны в статье [9].

3. Оценки норм оператора типа Харди в операторном идеале

Введем в рассмотрение последовательности $\{\sigma_n\}$ и $\{\delta_n\}$, секвенциальные нормы которых позволяют получить альтернативные критерии ограниченности и компактности исходного оператора и оценить норму оператора (1.1) в операторных идеалах $\mathfrak{A}_\alpha$ и $\mathfrak{S}_\alpha$.

Пусть $0 < \int\limits_\Omega v^{-p'/p}\, d\nu = \infty$. Согласно выводам (2.4) $Sf(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Определим разбиение $\{\beta_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, следующим образом: сначала выберем точку β_0 так, что

$$\int\limits_{\Omega(\beta_0)} v^{-p'/p}\, d\nu = 1,$$

остальные точки разбиения определим согласно формуле

$$\beta_n = \begin{cases} \sup\{t > 0 : 2Sv^{-p'/p}(t) \le Sv^{-p'/p}(\beta_{n+1})\}, & n < 0; \\ \inf\{t > 0 : Sv^{-p'/p}(t) \ge 2Sv^{-p'/p}(\beta_{n-1})\}, & n > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

В случае $n > 0$ видим, что

$$\beta_1 = \inf\{t > 0 : Sv^{-p'/p}(t) \ge 2Sv^{-p'/p}(\beta_0)\},$$

в силу непрерывности $Sv^{-p'/p}(t)$ получаем

$$Sv^{-p'/p}(\beta_1) = 2Sv^{-p'/p}(\beta_0), \quad \beta_0 < \beta_1,$$

и

$$\int\limits_{\Omega(\beta_1)} v^{-p'/p} d\nu = 2 \int\limits_{\Omega(\beta_0)} v^{-p'/p} d\nu = 2 \cdot 1 = 2^1.$$

При $n = 2$

$$\beta_2 = \inf\{t > 0 : Sv^{-p'/p}(t) \ge 2Sv^{-p'/p}(\beta_1)\},$$

$$Sv^{-p'/p}(\beta_2) = 2Sv^{-p'/p}(\beta_1) \quad \text{и} \int\limits_{\Omega(\beta_2)} v^{-p'/p} d\nu = 2 \int\limits_{\Omega(\beta_1)} v^{-p'/p} d\nu = 2^2.$$

В результате

$$\int\limits_{\Omega(\beta_n)} v^{-p'/p} d\nu = 2 \int\limits_{\Omega(\beta_{n-1})} v^{-p'/p} d\nu = 2^n \int\limits_{\Omega(\beta_0)} v^{-p'/p} d\nu = 2^n,$$

когда $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$, при этом полагая $\Omega(\infty) = \infty$.

Для $n < 0$ по формуле (3.1) получаем

$$\beta_{-1} = \sup\{t > 0 : 2Sv^{-p'/p}(t) \le Sv^{-p'/p}(\beta_0)\},$$

в силу непрерывности $Sv^{-p'/p}(t)$ следует равенство

$$2Sv^{-p'/p}(\beta_{-1}) = Sv^{-p'/p}(\beta_0), \quad \beta_0 > \beta_{-1},$$

и

$$\int\limits_{\Omega(\beta_{-1})} v^{-p'/p} d\nu = 2^{-1} \int\limits_{\Omega(\beta_0)} v^{-p'/p} d\nu = 2^{-1} \cdot 1 = 2^{-1}.$$

Далее,

$$\beta_{-2} = \sup\{t > 0 : 2Sv^{-p'/p}(t) \le Sv^{-p'/p}(\beta_{-1})\},$$

$$2Sv^{-p'/p}(\beta_{-2}) = Sv^{-p'/p}(\beta_{-1}), \quad \beta_0 > \beta_{-1} > \beta_{-2},$$

и

$$\int\limits_{\Omega(\beta_{-2})} v^{-p'/p} d\nu = 2^{-1} \int\limits_{\Omega(\beta_{-1})} v^{-p'/p} d\nu = 2^{-1} \cdot 2^{-1} = 2^{-2}.$$

Таким образом, когда $\beta_0 > \beta_{-1} > \beta_{-2} > \dots$, имеем

$$\int\limits_{\Omega(\beta_{-n})} v^{-p'/p}\, d\nu = 2^{-1} \int\limits_{\Omega(\beta_{-\{n-1\}})} v^{-p'/p}\, d\nu = 2^{-n} \int\limits_{\Omega(\beta_0)} v^{-p'/p}\, d\nu = 2^{-n}.$$

Определим слои $s_n = \Omega(\beta_n) \backslash \Omega(\beta_{n-1})$ и рассмотрим последовательность

$$\sigma_n = \Bigg(\int\limits_{s_n} v^{-p'/p}\, d\nu \Bigg)^{1/p'} \Bigg(\int\limits_{s_{n+1}} u\, d\mu \Bigg)^{1/q}. \tag{3.2}$$

Из формул (3.1), (3.2) следует, что

$$\sigma_n = 2^{(n-1)/p'} \Bigg(\int\limits_{s_{n+1}} u\, d\mu \Bigg)^{1/q} \quad \text{и} \int\limits_{s_{n+1}} u\, d\mu = \frac{2^{q/p'} \sigma_n^q}{2^{nq/p'}}. \tag{3.3}$$

Аналогично для другой весовой функции, если $0 < \int\limits_{\Omega} u\, d\mu = \infty$, определим разбиение $\{\gamma_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, следующим образом: сначала выберем точку γ_0 так, чтобы

$$\int\limits_{\Omega \backslash \Omega(\gamma_0)} u\, d\mu = 1,$$

остальные точки разбиения согласно формуле

$$\gamma_n = \begin{cases} \inf\left\{t > 0 : 2 \int\limits_{\Omega\backslash\Omega(t)} u\,d\mu \le \int\limits_{\Omega\backslash\Omega(\gamma_{n-1})} u\,d\mu\right\}, & n > 0; \\ \sup\left\{t > 0 : 2 \int\limits_{\Omega\backslash\Omega(t)} u\,d\mu \ge \int\limits_{\Omega\backslash\Omega(\gamma_{n+1})} u\,d\mu\right\}, & n < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Введем в рассмотрение последовательность

$$\delta_n = \left(\int\limits_{\widetilde{s}_n} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\widetilde{s}_{n+1}} u\,d\mu\right)^{1/q}, \tag{3.5}$$

где $\widetilde{s}_n = (\Omega\backslash\Omega(\gamma_{n-1}))\backslash(\Omega\backslash\Omega(\gamma_n)) = \Omega([\gamma_{n-1}, \gamma_n])$.

Из (3.4), (3.5) следует, что

$$\delta_n = \frac{2^{-n/q}}{2^{1/q}} \left(\int\limits_{\widetilde{s}_n} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{1/p'} \quad \text{и} \quad \int\limits_{\widetilde{s}_n} v^{-p'/p}\,d\nu = 2^{p'/q} 2^{np'/q} \delta_n^{p'}. \tag{3.6}$$

Замечание 3. Если $0 < \int\limits_{\Omega} v^{-p'/p}\,d\nu < \infty$ и $0 < \int\limits_{\Omega} u\,d\mu < \infty$, то $\{\beta_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ будут иметь одностороннюю ограниченность, вычисления проводятся аналогично.

Пусть $0 \le a < b < \infty$ и $A_{[a,b]}$ определено в (2.5). В теореме 2.5 построено разбиение $\{\Delta_k\}$, $k = 0, \ldots, N$, с помощью которого были получены двусторонние оценки аппроксимативных чисел. В следующих двух технических леммах оценим величину A_{Δ_k} из замечания 1 через σ_n и δ_n в зависимости от расположения интервалов Δ_k и дизъюнктных промежутков $J_n = (\beta_n, \beta_{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}$, разбиения (3.1) и соответственно промежутков $Z_n = (\gamma_{n-1}, \gamma_n)$ разбиения (3.4).

Лемма 3.1. 1. *Пусть номера $n_1 < n_2$ такие, что $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}) \subset \bigcup\limits_{n=n_1}^{n_2} J_n$, где $t_k \in J_{n_1}$, $t_{k+1} \in J_{n_2}$. Тогда*

$$A_{\Delta_k} = \sup_{t_k < \tau(x) < t_{k+1}} A_{\Delta_k}(\tau(x)) \le \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'} - 1)} \max_{n_1 \le n \le n_2} \sigma_n. \tag{3.7}$$

2. *Пусть номера $n_1 < n_2$ такие, что $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}) \subset \bigcup\limits_{n=n_1}^{n_2} Z_n$, где $t_k \in Z_{n_1}$, $t_{k+1} \in Z_{n_2}$. Тогда*

$$A_{\Delta_k} = \sup_{t_k < \tau(x) < t_{k+1}} A_{\Delta_k}(\tau(x)) \le \frac{2^{3/q}}{(2^{1/q} - 1)} \max_{n_1 \le n \le n_2} \delta_n. \tag{3.8}$$

Доказательство. 1. Пусть $\tau(x) \in J_n = (\beta_n, \beta_{n+1})$, где $n_1 \le n \le n_2$. Согласно заданию последовательностей (3.1), (3.2), формуле (3.3) и неравенству Йенсена видим, что

$$A_{\Delta_k}(\tau(x)) = \left(\int\limits_{\Omega([t_k,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\Omega([\tau(x),t_{k+1}])} u\,d\mu\right)^{1/q}$$
$$\le \left(\int\limits_{\Omega([\beta_{n_1},\beta_{n+1}])} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\Omega([\beta_n,\beta_{n_2+1}])} u\,d\mu\right)^{1/q}$$

$$\leq 2^{1/p'} 2^{n/p'} \Bigg(\int\limits_{s_n} u\, d\mu + \dots + \int\limits_{s_{n_2}} u\, d\mu \Bigg)^{1/q}$$

$$\leq 2^{1/p'} 2^{n/p'} \left(\frac{2^{q/p'} \sigma_n^q}{2^{nq/p'}} + \dots + \frac{2^{q/p'} \sigma_{n_2}^q}{2^{n_2 q/p'}} \right)^{1/q}$$

$$\leq 2^{2/p'} \max_{n_1 \leq n \leq n_2} \sigma_n \left(1 + \dots + \frac{1}{2^{(n_2 - n)/p'}} \right) \leq 2^{2/p'} \max_{n_1 \leq n \leq n_2} \sigma_n \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l/p'}} \right).$$

Следовательно,

$$A_{\Delta_k}(\tau(x)) \leq \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'} - 1)} \max_{n_1 \leq n \leq n_2} \sigma_n$$

и

$$A_{\Delta_k} = \sup_{t_k < \tau(x) < t_{k+1}} A_{\Delta_k}(\tau(x)) \leq \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'} - 1)} \max_{n_1 \leq n \leq n_2} \sigma_n.$$

2. По условию $t_k \in (\gamma_{n_1-1}, \gamma_{n_1})$ и $t_{k+1} \in (\gamma_{n_2-1}, \gamma_{n_2})$. Допустим, что $\tau(x) \in (\gamma_{n-1}, \gamma_n)$, где $n_1 \leq n \leq n_2$. Тогда, используя формулы (3.4)–(3.6) и неравенство Йенсена, получаем

$$A_{\Delta_k}(\tau(x)) \leq \Bigg(\int\limits_{\Omega([\gamma_{n_1-1}, \gamma_n])} v^{-p'/p}\, d\nu \Bigg)^{1/p'} \Bigg(\int\limits_{\Omega([\gamma_{n-1}, \gamma_{n_2}])} u\, d\mu \Bigg)^{1/q}$$

$$\leq 2^{1/q} 2^{-n/q} \Bigg(\int\limits_{\widetilde{s}_{n_1}} v^{-p'/p}\, d\nu + \dots + \int\limits_{\widetilde{s}_n} v^{-p'/p}\, d\nu \Bigg)^{1/p'}$$

$$\leq 2^{2/q} 2^{-n/q} (2^{n_1 p'/q} \delta_{n_1}^{p'} + \dots + 2^{np'/q} \delta_n^{p'})^{1/p'}$$

$$\leq 2^{2/q} \max_{n_1 \leq n \leq n_2} \delta_n \left(1 + \dots + \frac{1}{2^{(n - n_1)/q}} \right) \leq 2^{2/q} \max_{n_1 \leq n \leq n_2} \delta_n \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l/q}} \right).$$

Следовательно,

$$A_{\Delta_k}(\tau(x)) \leq \frac{2^{3/q}}{(2^{1/q} - 1)} \max_{n_1 \leq n \leq n_2} \delta_n,$$

что приводит к оценке

$$A_{\Delta_k} = \sup_{t_k < \tau(x) < t_{k+1}} A_{\Delta_k}(\tau(x)) \leq \frac{2^{3/q}}{(2^{1/q} - 1)} \max_{n_1 \leq n \leq n_2} \delta_n. \quad \square$$

Лемма 3.2. *Пусть* $s = \frac{qp'}{q+p'}$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 1, \dots, l$.

1. *Если* $\bigcup\limits_{k=1}^{l} \Delta_k \subset J_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{l} A_{\Delta_k}^s \leq 2^{s/p'} \sigma_n^s$.

2. *Если* $\bigcup\limits_{k=1}^{l} \Delta_k \subset Z_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{l} A_{\Delta_k}^s \leq 2^{s/q} \delta_n^s$.

Доказательство. 1. Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p'+q}{q}$, $\frac{p'+q}{p'}$ и формулы (3.1), (3.3), видим, что

$$\sum_{k=1}^{l} \Bigg(\int\limits_{\Omega([t_k, \tau(x)])} v^{-p'/p}\, d\nu \Bigg)^{s/p'} \Bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x), t_{k+1}])} u\, d\mu \Bigg)^{s/q}$$

$$\le \sum_{k=1}^{l}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t_k,t_{k+1}])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{s/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t_k,t_{k+1}])} u\,d\mu\Bigg)^{s/q}$$

$$\le \Bigg(\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\Omega([t_k,t_{k+1}])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{s/p'}\Bigg(\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\Omega([t_k,t_{k+1}])} u\,d\mu\Bigg)^{s/q}$$

$$\le \Bigg(\int\limits_{s_{n+1}} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{s/p'}\Bigg(\int\limits_{s_{n+1}} u\,d\mu\Bigg)^{s/q} = (2^n)^{s/p'}\left(\frac{2^{q/p'}\sigma_n^q}{2^{(nq)/p'}}\right)^{s/q} = 2^{s/p'}\sigma_n^s.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{l}\sup_{\tau(x)\in\Delta_k}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t_k,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{s/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),t_{k+1}])} u\,d\mu\Bigg)^{s/q} \le 2^{s/p'}\sigma_n^s.$$

Доказательство п. 2 проводится аналогичными рассуждениями с использованием формул (3.4)–(3.6). $\square$

В терминах последовательностей $\{\sigma_n\}$ и $\{\delta_n\}$ охарактеризуем ограниченность и компактность оператора (1.1).

Теорема 3.1. *Ограниченность оператора $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \le q < \infty$, вида (1.1) эквивалентна каждому из следующих условий:*

1) *последовательность $\{\sigma_n\}$ принадлежит ℓ^∞, при этом норма оператора удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n \le \|T\| \le \frac{2^{3/p'+2}}{(2^{1/p'}-1)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n; \tag{3.9}$$

2) $\{\delta_n\} \in \ell^\infty$ *и норма оператора удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n \le \|T\| \le \frac{2^{3/q+2}}{(2^{1/q}-1)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n. \tag{3.10}$$

Доказательство. 1. Зададим $\varepsilon > 0$. При некотором фиксированном t видим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\varepsilon,t])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t,1/\varepsilon])} u\,d\mu\Bigg)^{1/q} = \Bigg(\int\limits_{\Omega(t)} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(t)} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}.$$

Далее,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\varepsilon<t<\frac{1}{\varepsilon}}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\varepsilon,t])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t,1/\varepsilon])} u\,d\mu\Bigg)^{1/q} = \sup_{t>0}A(t).$$

Применяя неравенство (3.7) леммы 3.1, оцениваем

$$A\left(\left(\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) = \sup_{\varepsilon<t<\frac{1}{\varepsilon}}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\varepsilon,t])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t,1/\varepsilon])} u\,d\mu\Bigg)^{1/q} \le \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n.$$

Следовательно,

$$A=\sup_{t>0}A(t)\le\frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n.$$

Согласно оценке нормы оператора в теореме 2.1 получаем неравенство

$$\|T\|\le 4A\le\frac{2^{3/p'+2}}{(2^{1/p'}-1)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n. \tag{3.11}$$

С другой стороны, с помощью формулы (3.3) выводим

$$\sigma_n\le 2^{n/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\beta_n)}u\,d\mu\Bigg)^{1/q}=A(\beta_n).$$

Переходя в неравенстве к супремуму справа, а затем слева, заключаем, что

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n\le\sup_{n\in\mathbb{Z}}A(\beta_n)\le A. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) согласно оценке нормы оператора в теореме 2.1 имеем эквивалентность $\|T\|\approx\|\{\sigma_n\}\|_{\ell^\infty}$ и двустороннюю оценку (3.9). Доказательство (3.10) следует аналогичными рассуждениями. $\square$

Теорема 3.2. *Оператор* $T:L^p_{vd\nu}(\Omega)\to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1<p\le q<\infty$, *вида* (1.1) *компактен тогда и только тогда, когда*

$$\|\{\sigma_n\}\|_{\ell^\infty}<\infty\ \ (\textit{или}\ \|\{\delta_n\}\|_{\ell^\infty}<\infty)\ \ \textit{и}\ \ \lim_{k\to+\infty}\sup_{k\le n}\sigma_n=\lim_{k\to-\infty}\sup_{n\le k}\delta_n=0.$$

Доказательство. Достаточность. Оценка нормы оператора в теореме 2.1 и неравенство (3.9) позволяют оценить:

$$A\le\|T\|\le\frac{2^{3/p'+2}}{\left(2^{1/p'}-1\right)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n,$$

что влечет $A<\infty$.

Используя равенство (3.3), видим, что

$$A(\beta_k)=\Bigg(\int\limits_{\Omega(\beta_k)}v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\beta_k)}u\,d\mu\Bigg)^{1/q}=2^{k/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\beta_k)}u\,d\mu\Bigg)^{1/q}$$
$$=2^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{s_k}v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\beta_k)}u\,d\mu\Bigg)^{1/q}.$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Применяя оценку (3.7) леммы 3.3 и выбирая $k(\varepsilon)$ при условии, что $1/\varepsilon\in J_{k_\varepsilon}$, получаем

$$A(\beta_k)=2^{1/p'}\lim_{\varepsilon\to0}\Bigg(\int\limits_{s_k}v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\beta_k,1/\varepsilon])}u\,d\mu\Bigg)^{1/q}$$
$$\le\frac{2^{4/p'}}{(2^{1/p'}-1)}\lim_{\varepsilon\to0}\max_{k\le n\le k(\varepsilon)}\sigma_n\le\frac{2^{4/p'}}{(2^{1/p'}-1)}\sup_{k\le n}\sigma_n.$$

Таким образом, $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}A(\beta_k)=0$ в том случае, если $\lim\limits_{k\to+\infty}\sup\limits_{k\le n}\sigma_n=0$.

Аналогичными рассуждениями для последовательности $\{\gamma_k\}$, $k\in\mathbb{Z}$, выводим

$$A(\gamma_k)=\Bigg(\int\limits_{\Omega(\gamma_k)} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\gamma_k)} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}=2^{-k/q}\Bigg(\int\limits_{\Omega(\gamma_k)} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}$$
$$=2^{1/q}\Bigg(\int\limits_{\Omega(\gamma_k)} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\widetilde{s}_{k+1}} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}.$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Применяя неравенство (3.8) леммы 3.1 и выбирая $k(\varepsilon)$ при условии, что $\varepsilon\in Z_{k_\varepsilon}$, заключаем

$$A(\gamma_k)=2^{1/q}\lim_{\varepsilon\to0}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\varepsilon,\gamma_k])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\widetilde{s}_{k+1}} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}$$
$$\le\frac{2^{4/q}}{(2^{1/q}-1)}\lim_{\varepsilon\to0}\max_{k(\varepsilon)\le n\le k}\delta_n\le\frac{2^{4/q}}{(2^{1/q}-1)}\sup_{n\le k}\delta_n.$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{k\to-\infty}}A(\gamma_k)=0$, если $\lim\limits_{k\to-\infty}\sup\limits_{n\le k}\delta_n=0$.

Необходимость условия теоремы следует из неравенства (3.11). $\square$

Положим на конечном интервале $I=(a,b)\subset(0,\infty)$

$$A_I^*=\sup_{a<\tau(x)<b}\Bigg(\int\limits_{\Omega([a,\tau(x)])} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),b])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'},$$

$$A_I=\sup_{a<\tau(x)<b}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),b])} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}\Bigg(\int\limits_{\Omega([a,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}.$$

Лемма 3.3. *Пусть $I=(a,b)\subset(0,\infty)$, $J_n=(\beta_n,\beta_{n+1})$, $Z_n=(\gamma_{n-1},\gamma_n)$, где последовательности $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ заданы формулами* (3.1), (3.4). *Тогда*

$$A^*_{(\overline{J_n}\cup\overline{J_{n+1}})}>\sigma_n,\quad A^*_{(\overline{Z_n}\cup\overline{Z_{n+1}})}>\delta_n,\quad A_{(\overline{J_n}\cup\overline{J_{n+1}})}\ge\sigma_n,\quad A_{(\overline{Z_n}\cup\overline{Z_{n+1}})}\ge\delta_n.$$

Доказательство. Используя формулы (3.1)–(3.3), находим, что

$$A^*_{(\overline{J_n}\cup\overline{J_{n+1}})}=\sup_{\beta_n<\tau(x)<\beta_{n+2}}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\beta_n,\tau(x)])} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),\beta_{n+2}])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}$$
$$\ge\Bigg(\int\limits_{s_{n+1}} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}\Bigg(\int\limits_{s_{n+2}} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}=2^{1/p'}2^{n/p'}\Bigg(\int\limits_{s_{n+1}} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}=4^{1/p'}\sigma_n>\sigma_n.$$

Аналогичным способом приходим к оценке

$$A_{(\overline{J_n}\cup\overline{J_{n+1}})}=\sup_{\beta_n<\tau(x)<\beta_{n+2}}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),\beta_{n+2}])} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\beta_n,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}$$
$$\ge\Bigg(\int\limits_{s_{n+1}} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}\Bigg(\int\limits_{s_n} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}=\sigma_n.$$

Для последовательности $\{\delta_n\}$ неравенства можно получить подобными рассуждениями, используя формулы (3.4)–(3.6). $\square$

Для $0<\varepsilon<\|T\|$ зададим множество
$$M_I(\varepsilon)=\{n\in\mathbb{Z}:\overline{J_n}\subset I,\ \sigma_n>\varepsilon\}. \tag{3.13}$$

Лемма 3.4. *Пусть* $0\le a<b<\infty$, $I=[a,b]$ *и* $0<\varepsilon<\|T\|$, *где оператор* T *задан в* (1.1). *Тогда если* $\operatorname{card}(M_I(\varepsilon))\ge 4$, *то* $\mathbf{A}_{[a,b]}>\varepsilon$.

Доказательство. Выберем точку $s\in I$ согласно условиям теоремы 2.4. Так как мы предположили, что $\operatorname{card}(M_I(\varepsilon))\ \underline{\ge}\ 4$, то хотя бы один из промежутков $[a,s]$ или $(s,b]$ содержит два элемента $\overline{J_n}$. В первом случае, обозначая $n_1=\min\{n:\ n\in M_I(\varepsilon)\}$, получаем, что $\overline{J_{n_1}}\cup\overline{J_{n_1+1}}\subset[a,s]$, и по лемме 3.3 оцениваем:
$$A^*_{[a,s]}\ge A^*_{(\overline{J_{n_1}}\cup\overline{J_{n_1+1}})}\ge 4^{\frac{1}{p'}}\sigma_{n_1}>\sigma_{n_1}>\varepsilon.$$
Если же два элемента разбиения $\underline{\{J_n\}}$ попадают в $(s,b]$, то полагаем $n_2=\max\{n:n\in M_I(\varepsilon)\}$. В этом случае $\overline{J_{n_2-1}}\cup\overline{J_{n_2}}\subset(s,b]$ и
$$A_{[s,b]}\ge A_{(\overline{J_{n_2-1}}\cup\overline{J_{n_2}})}\ge\sigma_{n_2}>\varepsilon.$$
Следовательно, $\mathbf{A}_{[a,b]}=\max\{A^*_{[a,s]},A_{[s,b]}\}>\varepsilon$. $\square$

Замечание 4. Лемма 3.4 показывает, что в предположении $\operatorname{card}M_{\Delta_k}(\varepsilon)\ge 4$ мы приходим к неравенству $\mathbf{A}_{[a,b]}>\varepsilon$, что противоречит разбиению (2.8). Следовательно, на Δ_k возможно только $\operatorname{card}\ M_{\Delta_k}(\varepsilon)<4$.

Лемма 3.5. *Пусть* $0<\varepsilon<\|T\|$, *разбиение* $\{\Delta_k\}$, $k=1,\dots,N=N(\varepsilon)$, *определено в соответствии с* (2.8). *Тогда*
$$\operatorname{card}\{n\in\mathbb{Z}:\sigma_n>\varepsilon\}\le 6N(\varepsilon). \tag{3.14}$$

Доказательство. Мы видим, что
$$\operatorname{card}\{n\in\mathbb{Z}:t_k\in\overline{J_n}\text{ при }1\le k\le N\}\le 2N. \tag{3.15}$$
Далее, по выбору $\mathbf{A}_{\Delta_k}$ согласно (2.8) в силу условий леммы 3.4 и замечания 4 для номеров $n\in\mathbb{Z}$, не содержащихся в (3.15), т. е. когда $\overline{J_n}\subset\Delta_k=[t_k,t_{k+1})$, $1\le k\le N$, заключаем, что
$$\operatorname{card}\{n\in\mathbb{Z}:\overline{J_n}\subset\Delta_k,\ \sigma_n>\varepsilon\}\le 3.$$
Следовательно,
$$\operatorname{card}\{n\in\mathbb{Z}:\sigma_n>\varepsilon\}=\sum_{i=0}^{N}\operatorname{card}\{n\in\mathbb{Z}:\overline{J_n}\subset\Delta_i,\ \sigma_n>\varepsilon\}+2N$$
$$\le 3(N+1)+2N\le 6N.\quad\square$$

Лемма 3.6. *Для любого* $t>0$ *справедливо неравенство*
$$\operatorname{card}\{n\in\mathbb{Z}:\sigma_n>t\}\le 6\operatorname{card}\{k\in\mathbb{N}:\mathbf{a}_k(T)k^{\frac1p-\frac1q}\ge c_1t\},$$
где $c_1=\frac{2^{1/q}-1}{2^{1/q+1}}$.

Доказательство. Согласно формуле (2.9) для номеров $k=1,\dots,N$ с подходящим $\varepsilon(k)$ выполняется оценка $c_1\varepsilon(k)\le\mathbf{a}_k(T)k^{\frac1p-\frac1q}$ с константой $c_1=\frac12\big(1-\frac{1}{2^{1/q}}\big)$.

Выбирая $\varepsilon=\min\varepsilon(k)$, видим, что
$$\operatorname{card}\big\{k\in\mathbb{N}\ :a_k(T)k^{\frac1p-\frac1q}\ge c_1\varepsilon\big\}\ge N(\varepsilon).$$
Используя неравенство (3.14) леммы 3.5, получаем
$$\operatorname{card}\{n\in\mathbb{Z}:\sigma_n>t\}\le 6N(t)\le 6\operatorname{card}\{k\in\mathbb{N}:\mathbf{a}_k(T)k^{\frac1p-\frac1q}\ge c_1t\}.\quad\square$$

Теорема 3.3. *Пусть оператор* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \le q < \infty$, *вида* (1.1) *компактен. Тогда для* $\alpha \in (0, \infty)$ *справедливы неравенства*

$$\|\{\sigma_j\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \le 6^{1/\alpha} \left(\frac{2^{1/q+1}}{2^{1/q}-1}\right) \|\{\mathbf{a}_n(T) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}, \tag{3.16}$$

$$\|\{\delta_j\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \le 6^{1/\alpha} \left(\frac{2^{1/q+1}}{2^{1/q}-1}\right) \|\{\mathbf{a}_n(T) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}. \tag{3.17}$$

Доказательство. Используя определение нормы последовательности в пространстве ℓ^α через ее функцию распределения (см. [20, предложение 1.1.4]) и применяя лемму 3.6, находим

$$\|\{\sigma_j\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} = \alpha \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\{j \in \mathbb{Z} : \sigma_j > t\}\, dt$$

$$\le 6\alpha \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_n(T) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \ge c_1 t\}\, dt$$

(замена переменных $\tau = c_1 t$)

$$= 6(c_1)^{-\alpha} \alpha \int\limits_0^\infty \tau^{\alpha-1} \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_n(T) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \ge \tau\}\, d\tau$$

$$= 6 \left(\frac{2^{1/q+1}}{2^{1/q}-1}\right)^\alpha \|\{\mathbf{a}_n(T) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}.$$

Аналогичными рассуждениями доказывается оценка (3.17). $\square$

Теорема 3.4. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $s = \frac{qp'}{q+p'}$, $s < \alpha < \infty$ *и оператор* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, *определенный формулой* (1.1), *компактен. Тогда*

$$\|\{\mathbf{a}_n(T)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} \le 2^{1/p'+3} \left(\frac{s}{\alpha - s}\right)^{1/\alpha} \|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}, \tag{3.18}$$

$$\|\{\mathbf{a}_n(T)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} \le 2^{1/q+3} \left(\frac{s}{\alpha - s}\right)^{1/\alpha} \|\{\delta_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}. \tag{3.19}$$

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < \|T\|$, число $N = N(\varepsilon)$ определено в (2.8) теоремы 2.5. Рассматривая взаимное расположение промежутков $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, \dots, N$, разбиения (2.8) и дизъюнктных интервалов $J_j = (\beta_j, \beta_{j+1})$, $j \in \mathbb{Z}$, разбиения (3.1), имеем следующие два возможных варианта.

1. Когда $t_k \in J_l$, а $t_{k+1} \in J_{l+m}$ для некоторых $l, m \in \mathbb{Z}$, $m \ge 1$, т. е. если $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}) \subset \bigcup\limits_{j=l}^{l+m} J_j$. Используя замечание 1 и лемму 3.1, получаем, что

$$\varepsilon = \mathbf{A}_{\Delta_k} \le A_{\Delta_k} \le \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)} \max_{l \le j \le l+m} \sigma_j = \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)} \sigma_{j_k}$$

для некоторого $j_k \in [j_l, j_{l+m}]$.

2. Если $\bigcup_{i=l}^{l+m_j} \Delta_i \subset J_j$, $l, m_j \in \mathbb{N}$, $m_j \geq 1$, то, применяя результаты леммы 3.2, заключаем, что

$$\varepsilon^s m_j \leq \sum_{i=l}^{l+m_j} \mathbf{A}_{\Delta_i}^s \leq \sum_{i=l}^{l+m_j} A_{\Delta_i}^s \leq 2^{s/p'} \sigma_j^s.$$

Следовательно,

$$N(\varepsilon) \leq \operatorname{card}\left\{k: \ \sigma_{j_k} \geq \frac{\varepsilon}{C_1}\right\} + \sum_{j: m_j \geq 1} \operatorname{card}\left\{j: \sigma_j \geq \frac{\varepsilon m_j^{1/s}}{C_2}\right\}$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{card}\left\{k: \sigma_k \geq \frac{n^{1/s}\varepsilon}{C_3}\right\}, \qquad (3.20)$$

где $C_1 = \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)}$, $C_2 = 2^{1/p'}$, $C_3 = \min\{C_1, C_2\} = 2^{1/p'}$.

Верхняя оценка (2.9) в теореме 2.5 показывает, что число номеров аппроксимативных чисел, для которых $\mathbf{a}_n(T) > 8\varepsilon$, не превосходит номера $N = N(\varepsilon)$, т. е.

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}: \mathbf{a}_n(T)\} > 8\varepsilon\} \leq N(\varepsilon).$$

Используя свойство нормы [20, предложение 1.1.4] и оценку (3.20), заключаем, что

$$\|\{\mathbf{a}_n(T)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}^\alpha = \alpha \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}: \mathbf{a}_n(T)\} > \tau\}\, d\tau$$
$$\leq 8^\alpha \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} N(t)\, dt \leq 8^\alpha \alpha \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\left\{k \in \mathbb{Z}: \sigma_k \geq \frac{n^{1/s}t}{C_3}\right\} dt$$
$$= 2^{\alpha/p'} 8^\alpha \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha/s}}\right) \int_0^\infty \alpha\theta^{\alpha-1} \operatorname{card}\{k: \sigma_k \geq \theta\}\, d\theta$$
$$= 2^{\alpha(1/p'+3)} \left(\frac{s}{\alpha - s}\right) \|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}^\alpha,$$

что доказывает оценку (3.18). Второе неравенство (3.19) получается аналогичными рассуждениями. □

Из теорем 3.3, 3.4 вытекает

Следствие 3.1. 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \alpha < \infty$,

$$\|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} = \left(\sum_k \left(\int_{s_k} v^{-p'/p}\, d\nu\right)^{\alpha/p'} \left(\int_{s_{k+1}} u\, d\mu\right)^{\alpha/p}\right)^{1/\alpha} < \infty$$

и оператор $T: L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^p_{ud\mu}(\Omega)$ *вида* (1.1) *компактен. Тогда он принадлежит операторному идеалу* $\mathfrak{A}_\alpha$ *и выполняется неравенство*

$$\frac{2^{1/p}-1}{2^{1/p+1}6^{1/\alpha}} \|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \leq \|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} \leq 2^{1/p'+3} \left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{1/\alpha} \|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}. \qquad (3.21)$$

2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \alpha < \infty$,

$$\|\{\delta_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} = \left(\sum_k \left(\int\limits_{\widetilde{s}_n} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{\alpha/p'} \left(\int\limits_{\widetilde{s}_{k+1}} u\,d\mu\right)^{\alpha/p}\right)^{1/\alpha} < \infty$$

и оператор $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^p_{ud\mu}(\Omega)$ *вида* (1.1) *компактен. Тогда он принадлежит операторному идеалу* $\mathfrak{A}_\alpha$ *и выполняется неравенство*

$$\frac{2^{1/p}-1}{2^{1/p+1}6^{1/\alpha}}\|\{\delta_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \le \|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} \le 2^{1/p+3}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{1/\alpha}\|\{\delta_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}. \tag{3.22}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbb{I}_\alpha = \left(\int\limits_\Omega \left(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\tau(t))} u\,d\mu\right)^{\alpha/q} \left(\int\limits_{\Omega(\tau(t))} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{\alpha/p'-1} v^{-p'/p}(t)\,d\nu(t)\right)^{1/\alpha},$$

$$\mathbb{J}_\alpha = \left(\int\limits_\Omega \left(\int\limits_{\Omega(\tau(t))} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{\alpha/p'} \left(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\tau(t))} u\,d\mu\right)^{\alpha/q-1} u(t)\,d\mu(t)\right)^{1/\alpha}.$$

Теорема 3.5. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $s = \frac{qp'}{q+p'}$, $s < \alpha < \infty$, $\mathbb{I}_\alpha < \infty$, $\mathbb{J}_\alpha < \infty$. *Для компактности оператора* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$ *вида* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал операторному идеалу* $\mathfrak{A}_\alpha$ *и чтобы выполнялась одна из оценок*

$$\|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} = \left(\sum_{n=1}^\infty \mathbf{a}_n^\alpha(T)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le C_1\mathbb{I}_\alpha,\ \text{где } C_1 = \begin{cases} 2^{\frac{1}{p'}+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & p' \le \alpha,\\ 2^{\frac{1}{\alpha}+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & s < \alpha < p',\end{cases} \tag{3.23}$$

или

$$\|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} = \left(\sum_{n=1}^\infty \mathbf{a}_n^\alpha(T)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le C_2\mathbb{J}_\alpha,\ \text{где } C_2 = \begin{cases} 2^{\frac{1}{q}+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & q \le \alpha,\\ 2^{\frac{1}{\alpha}+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & s < \alpha < q.\end{cases} \tag{3.24}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор компактен. Используя формулы (3.1)–(3.3), сначала докажем неравенство $\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k^\alpha\right)^{1/\alpha} \le \mathbb{I}_\alpha$, которое справедливо при $\alpha \ge p'$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_\alpha^\alpha &= \sum_k \int\limits_{s_k} \left(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\tau(t))} u\,d\mu\right)^{\frac{\alpha}{q}} \left(\int\limits_{\Omega(\tau(t))} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{\frac{\alpha}{p'}-1} v^{-p'/p}(t)\,d\nu(t)\\
&\ge \sum_k \left(\int\limits_{s_{k+1}} u\,d\mu\right)^{\frac{\alpha}{q}} \int\limits_{s_k} \left(\int\limits_{\Omega(\tau(t))} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{\frac{\alpha}{p'}-1} v^{-p'/p}(t)\,d\nu(t)\\
&\ge \sum_k \left(\int\limits_{s_{k+1}} u\,d\mu\right)^{\frac{\alpha}{q}} \left(\int\limits_{\Omega(\beta_{k-1})} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{\frac{\alpha}{p'}-1} \int\limits_{s_k} v^{-p'/p}(t)\,d\nu(t)\\
&= \sum_k \left(\int\limits_{s_{k+1}} u\,d\mu\right)^{\frac{\alpha}{q}} 2^{(k-1)\alpha/p'} = \sum_k \left(\int\limits_{s_{k+1}} u\,d\mu\right)^{\frac{\alpha}{q}} \left(\int\limits_{s_k} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{\frac{\alpha}{p'}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k^\alpha.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \le \mathbb{I}_\alpha$. Согласно неравенству (3.18) теоремы 3.4 и в силу ограничения на α, которое по условиям теоремы больше s, видим, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n^\alpha(T)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2^{1/p'+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2^{1/p'+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\mathbb{I}_\alpha < \infty.$$

Если же $s < \alpha < p'$, то

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_\alpha^\alpha &\ge \sum_k\left(\int\limits_{s_{k+1}} u\,d\mu\right)^{\frac{\alpha}{q}}\left(\int\limits_{\Omega(\beta_k)} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{\frac{\alpha}{p'}-1}\int\limits_{s_k} v^{-p'/p}(t)\,d\nu(t)\\ &= \sum_k\left(\int\limits_{s_{k+1}} u\,d\mu\right)^{\frac{\alpha}{q}}2^{k\alpha/p'-1} = 2^{\alpha/p'-1}\sum_k\left(\int\limits_{s_{k+1}} u\,d\mu\right)^{\frac{\alpha}{q}}\left(\int\limits_{s_k} v^{-p'/p}\,d\nu\right)^{\frac{\alpha}{p'}}\\ &= 2^{\alpha/p'-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k^\alpha.\end{aligned}$$

Тем самым $\|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \le 2^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p'}}\,\mathbb{I}_\alpha$ и

$$\|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n^\alpha(T)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2^{1/p'+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2^{\frac{1}{\alpha}+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\mathbb{I}_\alpha < \infty.$$

Таким образом, интегральный оператор T вида (1.1) принадлежит идеалу $\mathfrak{A}_\alpha(L^p_{vd\nu}(\Omega), L^q_{ud\mu}(\Omega))$.

Аналогичными рассуждениями доказывается оценка (3.24).

Достаточность. Пусть выполняется оценка (3.23). Это означает, что оператор T принадлежит $\mathfrak{A}_\alpha\big(L^p_{vd\nu}, L^q_{ud\mu}\big)$. Сходимость ряда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n^\alpha(T)\right)^{1/\alpha}$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{a}_n(T) = 0$, что согласно [11, предложение 10.1.3] выражает аппроксимируемость оператора T. Так как оператор действует в пространствах, обладающих аппроксимационным свойством, делаем вывод, что он компактен [11, п. 10.1.3]. $\square$

Обозначим через $\mathbf{s}_n(T)$ одну из последовательностей характеристических чисел $\mathbf{c}_n(T)$ или $\mathbf{d}_n(T)$ оператора (1.1).

Предложение 3.1. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $s = \frac{qp'}{q+p'}$, $s < \alpha < \infty$, $\mathbb{I}_\alpha < \infty$, $\mathbb{J}_\alpha < \infty$. *Для компактности оператора* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$ *вида* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал операторному идеалу* $\mathfrak{S}_\alpha$ *и чтобы выполнялась одна из оценок*

$$\|T\|_{\mathfrak{S}_\alpha} \le C_1\mathbb{I}_\alpha \quad \text{или} \quad \|T\|_{\mathfrak{S}_\alpha} \le C_2\mathbb{J}_\alpha, \tag{3.25}$$

где константы C_1 *и* C_2 *определены формулами* (3.23), (3.24).

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.1(i) и теоремы 3.5.

Достаточность. Пусть выполняется одна из оценок (3.25). Сходимость ряда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n^\alpha(T)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{c}_n(T) = 0$, что согласно [16, предложение 2.3.1] и определению [16, (2.3.5)] дает компактность оператора T. Так же рассматриваются числа Колмогорова. Сходимость ряда $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{d}_n^{\alpha}(T)\right)^{1/\alpha}$ влечет $\lim_{n\to\infty} \mathbf{d}_n(T) = 0$. В силу [16, предложение 2.5.5] имеем $\lim_{n\to\infty} \mathbf{c}_n(T') = 0$, что дает компактность оператора $T' : L^{q'}_{ud\mu}(\Omega) \to L^{p'}_{vd\nu}(\Omega)$, двойственного к T. Применяя теорему Шаудера [16, теорема Шаудера, с. 82], заключаем, что оператор T компактен. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Edmunds D. E., Kokilashvili V., Meskhi A.* Bounded and compact integral operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. (Math. Appl.; V. 543).

2. *Sinnamon G.* One-dimensional Hardy-type inequalities in many dimensions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1998. V. 128, N 4. P. 833–848.

3. *Drábek P., Heinig H. P., Kufner A.* Higher-dimensional Hardy inequality // General inequalities. 1997. V. 7. P. 3–16.

4. *Ruzhansky M., Verma D.* Hardy inequalities on metric measure spaces. I // Proc. Roy. Soc. Sect. A. 2019. V. 475. 2223, 20180310. 15 pp.

5. *Ruzhansky M., Verma D.* Hardy inequalities on metric measure spaces. II: the case $p > q$ // Proc. Roy. Soc. Sect. A. 2021. V. 477. 2250, 20210136. 16 pp.

6. *Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э.* О двумерных билинейных неравенствах с прямоугольным оператором Харди в весовых пространствах Лебега // Функциональные пространства, теория приближения и смежные опросы анализа. М.: Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 2021. Т. 312. С. 251–258.

7. *Wedestig A.* Weighted inequalities of Hardy type and their limiting inequalities. Lulea University of Technology, Sweden. Doctoral thesis, Department of Mathematics. 2003.

8. *Persson L. E., Ushakova E. P.* Some multi-dimensional Hardy type integral inequalities // J. Math. Inequal. 2007. V. 1, N 3. P. 301–319.

9. *Mynbaev K., Lomakina E.* Two-weight Hardy inequality on topological measure spaces // Euras. Math. J. 2025. V. 16, N 1. P. 60–85.

10. *Mynbaev K.* Three weight Hardy inequality on measure topological spaces // Euras. Math. J. 2023. V. 14, N 2. P. 58–78.

11. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

12. *Pietsch A.* Eigenvalues and s-numbers. Leipzig: Geest Porting, 1987.

13. *König H.* Eigenvalue distribution of compact operators. Basel: Birkhäuser Verl., 1986. (Operator Theory: Advances and Applications; V. 16).

14. *Pietsch A.* s-Numbers of operators in Banach spaces // Studia Math. 1974. V. 51. P. 201–223.

15. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Spectral theory and differential operators. Oxford: Oxford Univ. Press, 1987. (Oxford Math. Monogr.).

16. *Carl B., Stephani I.* Entropy, compactness and the approximation of operators. Cambridge: Camb. Univ. Press., 1990.

17. *Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. J.* Approximation numbers of certain Volterra integral operators // London Math. Soc. (2). 1988. V. 37, N 2-3. P. 471–489.

18. *Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. J.* Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra integral operators // Studia Math. 1997. V. 124, N 1. P. 59–80.

19. *Lomakina E., Stepanov V.* On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten–von Neumann norms of the Hardy-type integral operators // Function spaces and application. New Delhi: Narosa Publishing Hause, 2000. P. 153–187.

20. *Grafakos L.* Classical Fourier analysis. New York: Springer-Verl., 2008.

Поступила в редакцию 12 мая 2025 г.
После доработки 25 ноября 2025 г.
Принята к публикации 25 ноября 2025 г.

Мынбаев Кайрат Турысбекович (ORCID 0000-0002-0367-8023)
Международная школа экономики,
Казахстанско-Британский технический университет,
Толеби, 59, Алматы 050000, Казахстан
k_mynbayev@ise.ac

Ломакина Елена Николаевна (ORCID 0000-0002-2301-8380)
Лаборатория приближенных методов и функционального анализа,
Вычислительный Центр ДВО РАН,
Ким Ю Чена 65, Хабаровск 680000
enlomakina@mail.ru