

О МНОГОМЕРНЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ
ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ
С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ
И ОПЕРАТОРОМ МОНЖА — АМПЕРА
А. А. Косов, Э. И. Семенов

Аннотация. Изучается эволюционное уравнение с волновым оператором и оператором Монжа — Ампера. Предложен вариант метода редукции с использованием аддитивного и мультипликативного разделения переменных для построения точных многомерных решений. Получены параметрические семейства анизотропных по пространственным переменным точных решений, выражаемые явным образом через элементарные и специальные функции и/или через решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрен случай, когда для построения точных решений исследуемого нелинейного многомерного уравнения используются известные решения линейного волнового уравнения с одной пространственной переменной. Приводится ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.206

Ключевые слова: оператор Монжа — Ампера, волновое уравнение, многомерные точные решения.

1. Введение

В последнее время все больше внимания уделяется исследованию нелинейных эволюционных уравнений с оператором Монжа — Ампера и построению их точных решений. Так, в работах [1–5] проводится групповой анализ, исследуются редукции и находятся точные решения уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right], \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^\nu = k \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где k, ν — некоторые постоянные. Уравнение (1) возникает в магнитной гидродинамике при описании эволюции электронных вихрей в замагниченной плазме [6, 7] и является частным случаем (2). При $\nu = -1$ и $k = -1$ уравнение (2) есть известное параболическое уравнение Крылова [8]. В работе [9] встречается уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\det H(u)]^{\frac{1}{n}} + f(\mathbf{x}),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (темы FWEW-2026-0009 и FWEW-2026-0010).

где $u = u(\mathbf{x}, t)$ — искомая функция от $n + 1$ независимых переменных; $t > 0$ — время, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор пространственных переменных размерности $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $H(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ — матрица Гессе n -го порядка, $\det H(u)$ — определитель матрицы Гессе. В статье [10] методом разделения переменных ищутся точные решения эволюционного многомерного уравнения Монжа — Ампера вида

$$f(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \det H(u),$$

где функция $f(\mathbf{x}, t, u)$ является заданной. В работе авторов [11] строились точные решения обобщенного эволюционного уравнения Монжа — Ампера вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \det H(u) - f(u, \nabla u, \Delta u),$$

а также многомерного уравнения Крылова

$$-\frac{\partial u}{\partial t} \det H(u) = 1.$$

В данной статье изучается эволюционное уравнение с волновым оператором и оператором Монжа — Ампера следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \vartheta^2 \Delta u + \det H(u), \quad (3)$$

где Δ — оператор Лапласа в \mathbb{R}^n , $\vartheta \neq 0$ — некоторый числовой параметр. Основной задачей данной статьи является построение многомерных точных решений уравнения (3). Для решения поставленной задачи будем применять методы аддитивного и мультипликативного разделения переменных [12], метод редукции и следующую квадратичную функцию:

$$\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

где A — ненулевая числовая симметрическая матрица размера $n \times n$. Ранее авторами квадратичная функция (4) успешно использовалась для построения точных многомерных решений систем уравнений реакции-диффузии, эллиптических уравнений и многомерных систем эллиптических уравнений со степенными нелинейностями [13], а также для отыскания многомерных решений обобщенного уравнения Монжа — Ампера [14, 15] и системы уравнений с оператором Монжа — Ампера [16].

2. Основные результаты

Для дальнейшего исследования нам понадобится формула, которая задается в следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $F(z)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция. Тогда для любой симметрической матрицы A , задающей квадратичную форму $\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$, для гессиана функции $F(\xi) = F(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}))$ справедлива формула

$$\det \left(\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,n} = \det A \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right], \quad (5)$$

где $\det A$ — определитель матрицы A .

Доказательство леммы приведено в статье [14]. В этом разделе приведем результаты по построению точных многомерных решений уравнения (3) с применением формулы (5) и квадратичной функции (4).

2.1. Точные решения с аддитивным разделением переменных. Из формулы (5) следует, что гессиан функции $\phi(\mathbf{x}) = \xi + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, где ξ задается формулой (4), равен определителю симметричной матрицы A . В свою очередь, лапласиан функции $\phi(\mathbf{x})$ равен следу матрицы A . Вторая частная производная по переменной t от функции

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{t^2}{2}(\det A + \vartheta^2 \operatorname{tr} A) + \alpha_0 t + \xi + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta \quad (6)$$

равна $\det A + \vartheta^2 \operatorname{tr} A$. Таким образом, мы показали, что функция (6) является многомерным решением уравнения (3) с аддитивным разделением переменных. В формуле (6) $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A , α_j , $j = 0, 1, \dots, n$, β — произвольные постоянные.

Перейдем к построению решений с аддитивным разделением переменных вида

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t) + F(\xi), \quad (7)$$

где функции $\psi(t)$ и $F(\xi)$ подлежат определению. При построении точных решений уравнения (3) в виде (7) мы должны потребовать выполнение некоторых условий на матрицу A , а именно, мы должны подобрать матрицу A в классе симметрических матриц таким образом, чтобы для функции (4) выполнялось равенство

$$|\nabla \xi|^2 = \sigma \xi, \quad (8)$$

где ∇ — оператор взятия градиента по $x \in \mathbb{R}^n$, а $\sigma > 0$ — некоторая постоянная. Как показано в [15], необходимым свойством обладает симметрическая матрица

$$A = \frac{\sigma}{2} S E_m S^T, \quad (9)$$

где E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей, S — произвольная ортогональная матрица. После подстановки анзаца (7) в уравнение (3) с учетом формул (5), (8) и несложных вычислений приходим к равенству

$$\frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} = \vartheta^2 \left[\operatorname{tr} A \frac{dF}{d\xi} + \sigma \xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right] + \det A \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right]. \quad (10)$$

Для дальнейшего исследования необходимо рассмотреть два случая: $m < n$ и $m = n$. Пусть имеет место первый случай. При $m < n$ определитель матрицы (9), очевидно, равен нулю. В этом случае равенство (10) упростится и запишется так:

$$\frac{1}{\vartheta^2} \frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} = \sigma \left[\frac{m}{2} \frac{dF}{d\xi} + \xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right].$$

Если правая и левая части этого равенства равны некоторой постоянной μ , то мы получим решение с аддитивным разделением переменных вида (7) с вырожденной матрицей (9). При этом функция $F(\xi)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) вида

$$\sigma \left[\frac{m}{2} \frac{dF}{d\xi} + \xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right] = \mu, \quad (11)$$

а функция $\psi(t)$ задается формулой

$$\psi(t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1t + T_2, \quad (12)$$

где T_1, T_2 — произвольные постоянные. Общее решение ОДУ (11) в зависимости от значений параметра m задается формулами

$$F(\xi) = \frac{2\mu}{m\sigma}\xi + C_1\xi^{1-\frac{m}{2}} + C_2, \quad m \neq 2,$$

$$F(\xi) = \frac{\mu}{\sigma}\xi + C_1 \ln \xi + C_2, \quad m = 2.$$

Таким образом, мы пришли к справедливости следующего результата

Утверждение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Тогда уравнение (3) имеет точные решения

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1t + \frac{2\mu}{m\sigma} \left(\frac{\sigma}{2} SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) + C_1 \left(\frac{\sigma}{2} SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \right)^{1-\frac{m}{2}} + C_2, \quad m \neq 2, \quad (13)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1t + \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\sigma}{2} SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) + C_1 \ln \left(\frac{\sigma}{2} SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) + C_2, \quad m = 2, \quad (14)$$

где $m < n$, E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей, S — произвольная ортогональная матрица, $\mu, \sigma \neq 0$, T_1, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как волновой оператор и оператор Монжа — Ампера являются операторами второго порядка, с учетом свойства аддитивности точными решениями уравнения (3) также будут функции (13), (14), в правые части которых можно добавить слагаемое $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, где α_i — произвольные постоянные.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 3, m = 2$ и матрица A задается соотношением

$$A = \frac{\sigma}{2} \begin{pmatrix} 197/200 & -21/200 & \sqrt{6}/40 \\ -21/200 & 53/200 & 7\sqrt{6}/40 \\ \sqrt{6}/40 & 7\sqrt{6}/40 & 3/4 \end{pmatrix}, \quad \det A = 0, \quad \text{tr } A = \sigma. \quad (15)$$

Тогда по утверждению 1 уравнение (3) в трехмерном координатном пространстве имеет анизотропное по пространственным переменным точное решение

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1t + \frac{\mu}{800}\eta + C_1 \ln \eta + C_2,$$

где $\mu \neq 0, T_1, C_1, C_2$ — произвольные постоянные и введено обозначение

$$\eta = 197x_1^2 + 53x_2^2 + 150x_3^2 - 42x_1x_2 + 10\sqrt{6}x_1x_3 + 70\sqrt{6}x_2x_3.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 4, m = 3$ и матрица A задается соотношением

$$A = \frac{\sigma}{2} \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & 4/9 & 0 \\ 2/9 & 8/9 & -2/9 & 0 \\ 4/9 & -2/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 0, \quad \text{tr } A = \frac{3\sigma}{2}. \quad (16)$$

Тогда по утверждению 1 уравнение (3) в четырехмерном координатном пространстве имеет анизотропное по пространственным переменным точное решение

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1t + \frac{\mu}{54}\eta + C_1\eta^{-1/2} + C_2,$$

где $\mu \neq 0$, T_1 , C_1 , C_2 — произвольные постоянные и введено обозначение

$$\eta = 5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 9x_4^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Пусть теперь $m = n$, тогда имеем $E_m = E_n = E$ и $A = (\sigma/2)E$, где E — единичная матрица. При этом из формулы (4) получим $\xi = (\sigma/4)\|\mathbf{x}\|^2$. Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n . В этом случае равенство (10) запишется так:

$$\frac{1}{\vartheta^2} \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{\sigma}{2} \left[n \frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2} \right] + \left(\frac{\sigma}{2} \right)^n \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2} \right].$$

Если правая и левая части этого равенства равны некоторой постоянной μ , то получим решение с аддитивным разделением переменных вида (7) с матрицей $A = (\sigma/2)E$. При этом функция $F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ вида

$$\frac{\sigma}{2} \left[n \frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2} \right] + \left(\frac{\sigma}{2} \right)^n \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2} \right] = \mu, \quad (17)$$

а функция $\psi(t)$ задается формулой (12). Таким образом, мы пришли к справедливости следующего утверждения

Утверждение 2. Уравнение (3) имеет точное радиально-симметричное решение

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1t + T_2 + F(\xi), \quad \xi = \frac{\sigma}{4}\|\mathbf{x}\|^2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где μ , T_1 , T_2 — произвольные постоянные, а функция $F(\xi)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ второго порядка (17).

ПРИМЕР 3. Пусть $n = 2$, тогда уравнение (3) в двумерном координатном пространстве имеет точные радиально-симметричные решения

$$u_1(x_1, x_2, t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1t + T_2 + F_1(\xi), \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(x_1^2 + x_2^2), \quad \mu \neq -1,$$

$$u_2(x_1, x_2, t) = -\frac{\vartheta^2}{2}t^2 + T_1t + T_2 + F_2(\xi), \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(x_1^2 + x_2^2), \quad \mu = -1,$$

где функции $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ задаются формулами

$$F_1(\xi) = \frac{C_1}{4\sigma\sqrt{1+\mu}} \ln \left(\sqrt{4(1+\mu)\xi^2 + C_1\xi} + 2\xi\sqrt{1+\mu} + \frac{C_1}{4\sqrt{1+\mu}} \right) + \frac{2}{\sigma}\xi + \frac{1}{\sigma}\sqrt{4(1+\mu)\xi^2 + C_1\xi} + C_2, \quad F_2(\xi) = \frac{2}{\sigma}\xi + C_1\sqrt{\xi} + C_2.$$

Здесь C_1 , C_2 — произвольные постоянные.

Отметим, что частное решение ОДУ (17) для любого n имеет вид $F(\xi) = B\xi + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная, а константа $B \neq 0$ удовлетворяет алгебраическому уравнению $(\sigma/2)^n B^n + n(\sigma/2)B = \mu$.

2.2. Редукция к линейному волновому уравнению для функции с одной пространственной переменной. В предыдущем разделе было показано, что исследуемое уравнение (3) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных (6). Интересный результат получится, если в правую часть решения (6) добавить произвольную функцию $V(x_i, t)$, зависящую от одной пространственной переменной x_i , где индекс i принимает любое фиксированное значение от 1 до n . Так, имеет место

Утверждение 3. Уравнение (3) обладает точным многомерным решением

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{t^2}{2}(\det A + \vartheta^2 \operatorname{tr} A) + \alpha_0 t + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + V(x_i, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (18)$$

где $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A , α_j , $j = 0, 1, \dots, n$, — произвольные постоянные, причем функция $V(x_i, t)$ удовлетворяет линейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = (\vartheta^2 + M_{ii}) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}, \quad (19)$$

где M_{ii} — минор элемента a_{ii} матрицы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После подстановки функции (18) в левую часть уравнения (3) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \det A + \vartheta^2 \operatorname{tr} A + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (20)$$

Оператор Лапласа от функции (18) приводит к соотношению

$$\Delta u = \operatorname{tr} A + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}. \quad (21)$$

Вычисляя матрицу Гессе для функции (18), получим матрицу вида

$$H(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Найдем детерминант этой матрицы. Для этого воспользуемся формулой разложения определителя по элементам i -й строки. Тогда получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \det H(u) &= a_{i1} A_{i1} + \dots + \left(a_{ii} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \right) A_{ii} + \dots + a_{in} A_{in} \\ &= (a_{i1} A_{i1} + \dots + a_{ii} A_{ii} + \dots + a_{in} A_{in}) + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} A_{ii} = \det A + M_{ii} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A , а M_{ij} — минор элемента a_{ij} . Подставляя равенства (20) и (21), (22) соответственно в левую и правую части уравнения (3), приходим к линейному волновому уравнению (19). Утверждение доказано. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Значимость утверждения 3 в том, что оно устанавливает связь между уравнением (3) и классическим линейным волновым уравнением (19), которое в случае $\vartheta^2 + M_{ii} > 0$ называется уравнением колебаний струны.

Как известно, общее решение уравнения (19) задается формулой

$$V(x_i, t) = \varphi(x_i + t\sqrt{\vartheta^2 + M_{ii}}) + \psi(x_i - t\sqrt{\vartheta^2 + M_{ii}}), \quad \vartheta^2 + M_{ii} > 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где φ и ψ — произвольные функции. Частные точные решения уравнения (19) можно найти во многих учебниках и справочниках (см., например, [17]).

2.3. Точные решения с мультипликативным разделением переменных. В этом разделе рассмотрим точные решения с мультипликативным разделением переменных вида

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t)F(\xi), \quad (23)$$

где функции $\psi(t)$ и $F(\xi)$ подлежат определению. При этом аргумент ξ задается формулой (4), в которой матрица A имеет вид (9). После подстановки анзаца (23) в уравнение (3) с учетом формул (5), (8) и несложных вычислений приходим к равенству

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}F(\xi) = \frac{\sigma\vartheta^2}{2}\psi(t) \left[m\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2} \right] + \psi^n(t) \det A \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2} \right]. \quad (24)$$

При выводе этого равенства мы также использовали следующее свойство определителя [18]: $\det(\lambda M_n) = \lambda^n \det M_n$, где M_n — матрица размера $n \times n$. Здесь также необходимо рассмотреть два случая: $m < n$ и $m = n$. Случай $m = n$ интереса не представляет, так как в этом случае при $n > 1$ разделить переменные невозможно. Пусть $m < n$, тогда имеем $\det A = 0$. В этом случае равенство (24) упростится и запишется так:

$$\frac{2}{\sigma\vartheta^2} \frac{1}{\psi(t)} \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{1}{F(\xi)} \left[m\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2} \right].$$

В этом соотношении переменные разделены и для определения функций $\psi(t)$, $F(\xi)$ получим следующие ОДУ:

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \mu\frac{\sigma\vartheta^2}{2}\psi(t), \quad m\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2} = \mu F(\xi). \quad (25)$$

Здесь μ — константа разделения. ОДУ (25) являются линейными и легко интегрируются. Таким образом, приходим к справедливости следующего утверждения.

Утверждение 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда уравнение (3) имеет точные решения с мультипликативным разделением переменных

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}, t) &= \left[T_1 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma t}\right) + T_2 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma t}\right) \right] \\ &\times [C_1\xi^{\frac{1}{2}-\frac{m}{4}}J_{\frac{m}{2}-1}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi}) + C_2\xi^{\frac{1}{2}-\frac{m}{4}}Y_{\frac{m}{2}-1}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi})], \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x}), \\ u_2(\mathbf{x}, t) &= \left[T_1 \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma t}\right) + T_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma t}\right) \right] \\ &\times [C_1\xi^{\frac{1}{2}-\frac{m}{4}}I_{\frac{m}{2}-1}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi}) + C_2\xi^{\frac{1}{2}-\frac{m}{4}}K_{\frac{m}{2}-1}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi})], \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x}), \\ u_3(\mathbf{x}, t) &= (T_1 t + T_2)(C_1\xi^{1-\frac{m}{2}} + C_2), \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x}), \\ u_4(\mathbf{x}, t) &= (T_1 t + T_2)(C_1 \ln \xi + C_2), \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(SE_2 S^T \mathbf{x}, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

где $m < n$, $J_{\frac{m}{2}-1}$, $Y_{\frac{m}{2}-1}$ — функции Бесселя первого и второго рода, $I_{\frac{m}{2}-1}$, $K_{\frac{m}{2}-1}$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, $\mu > 0$, $\sigma > 0$, T_1, T_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

ПРИМЕР 4. Пусть $n = 3$ и $m = 2$, а матрица A задается формулой (15). Тогда в силу утверждения 4 уравнение (3) в трехмерном координатном пространстве обладает следующим анизотропным по пространственным переменным точным периодическим по времени решением:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, t) &= \left[T_1 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma t}\right) + T_2 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma t}\right) \right] \\ &\times [C_1 J_0(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi}) + C_2 Y_0(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi})], \end{aligned}$$

где $\mu > 0$, $\sigma > 0$, T_1, T_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные и введено обозначение

$$\xi = \frac{\sigma}{800} (197x_1^2 + 53x_2^2 + 150x_3^2 - 42x_1x_2 + 10\sqrt{6}x_1x_3 + 70\sqrt{6}x_2x_3).$$

Здесь J_0, Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода.

ПРИМЕР 5. Пусть $n = 4$ и $m = 3$, а матрица A задается формулой (16). Тогда в силу утверждения 4 уравнение (3) в четырехмерном координатном пространстве обладает следующим анизотропным по пространственным переменным точным решением:

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = \left[T_1 \exp\left(\vartheta \frac{\sqrt{2\mu}}{2} \sqrt{\sigma t}\right) + T_2 \exp\left(-\vartheta \frac{\sqrt{2\mu}}{2} \sqrt{\sigma t}\right) \right] \times \frac{C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi}) + C_2 \operatorname{ch}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}},$$

где $\mu > 0$, $\sigma > 0$, T_1, T_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные и введено обозначение

$$\xi = \frac{\sigma}{36} (5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 9x_4^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3).$$

3. Заключение

В статье предложен вариант метода редукции с использованием процедуры разделения переменных для построения точных многомерных решений эволюционного уравнения с волновым оператором и оператором Монжа — Ампера. Получены многомерные точные решения, выражаемые явным образом через элементарные и специальные функции и/или через решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Отдельно выделен случай, когда для построения точных решений исследуемого нелинейного многомерного уравнения используются известные решения линейного волнового уравнения с одной пространственной переменной. Полученные в статье результаты представляют теоретический интерес, так как найденные семейства точных решений можно использовать для качественного анализа, выявления колебательных и периодических решений, оценки скорости роста и выделения неограниченных решений, конструирования краевых условий и т. п. Они могут также использоваться для тестирования вычислительных методов, алгоритмов и программ решения прикладных задач с краевыми и начальными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полянин А. Д. Точные решения и редукции нестационарных уравнений математической физики типа Монжа — Ампера // Вестн. Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2023. Т. 12, № 5. С. 276–288.
2. Аксенов А. В., Полянин А. Д. Групповой анализ, редукции и точные решения уравнения Монжа — Ампера // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 6. С. 750–763.
3. Polyainin A. D., Aksenov A. V. Unsteady magnetohydrodynamics PDE of Monge–Ampère type: Symmetries, closed-Form solutions, and reductions // Mathematics. V. 2024. V. 12. 2127.
4. Aksenov A. V., Polyainin A. D. Symmetries, reductions and exact solutions of monstationary Monge–Ampère type equations // Mathematics. 2025. V. 13. 525.
5. Dubinov A. E., Kitayev I. N. New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics // Magnetohydrodynamics. 2020. V. 56, N 4. P. 369–375.

6. Smirnov V. V., Chukbar K. V. «Phonons» in two-dimensional vortex lattices // J. Experimental and Theoret. Physics. 2001. V. 93, N 1. P. 126–135.
7. Zaburdaev V. Yu., Smirnov V. V., Chukbar K. V. Nonlinear dynamics of electron vortex lattices // Plasma Physics Reports. 2014. V. 30, N 3. P. 214–217.
8. Крылов Н. В. Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 2. С. 290–303.
9. Zhang Wei, Bao Jiguang. A Calabi theorem for solutions to the parabolic Monge–Ampère equation with periodic data // Ann. Inst. H. Poincaré. 2018. V. 35, N 5. P. 1143–1173.
10. Рахмелевич И. В. Многомерное неавтономное эволюционное уравнение типа Монжа — Ампера // Владикавк. мат. журн. 2023. Т. 25, № 1. С. 64–80.
11. Косов А. А., Семенов Э. И. О многомерных точных решениях обобщенных эволюционных уравнений Монжа — Ампера // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 6. С. 748–762.
12. Polyani A. D., Zhurov A. I. Separation of variables and exact solutions to nonlinear PDEs. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2021.
13. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных решениях многомерной системы эллиптических уравнений со степенными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 12. С. 1619–1640.
14. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных решениях многомерного обобщенного уравнения Монжа — Ампера // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 10. С. 1334–1349.
15. Косов А. А., Семенов Э. И. Обобщенное уравнение типа Монжа — Ампера и его многомерные точные решения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35, № 2. С. 215–230.
16. Косов А. А., Семенов Э. И. Система уравнений с оператором Монжа — Ампера и ее многомерные точные решения // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 4. С. 669–682.
17. Полянин А. Д. Уравнения и задачи математической физики. Ч. 2. Справочник для вузов. М.: ЮРАЙТ, 2023.
18. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Поступила в редакцию 6 июля 2025 г.

После доработки 6 июля 2025 г.

Принята к публикации 20 октября 2025 г.

Косов Александр Аркадьевич (ORCID 0000-0003-1352-1828)

Семенов Эдуард Иванович (ORCID 0000-0002-9768-9945)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,

ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033

kosov_idstu@mail.ru, edwseiz@gmail.com