Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ГРУППЫ С МЕТАБЕЛЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА В СОМНОЖИТЕЛЯХ

М. Н. Коновалова, В. С. Монахов

Аннотация. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Исследуется конечная группа $G = AB$ при условии, что все подгруппы Шмидта в A и в B имеют равные производные длины. В этой ситуации, в частности, доказано, что если A и B субнормальны в G, а индексы подгрупп A и B взаимно просты, то все подгруппы Шмидта в G имеют равные производные длины. Кроме того, получена характеризация конечных групп, в которых каждая метабелева подгруппа нильпотентна. В частности, такая группа 2-замкнута и производная длина каждой ее подгруппы Шмидта равна 3. Отсюда следует, что в каждой ненильпотентной группе с единичной подгруппой Фраттини существует метабелева подгруппа Шмидта.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.205

Ключевые слова: конечная группа, метабелева подгруппа, подгруппа Шмидта, производная длина, факторизуемая группа.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Коммутант группы G обозначается через G'. Подгруппа $G'' = (G')'$ называется *вторым коммутантом группы* G, а $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ — i*-м коммутантом.* Если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$, то наименьшее натуральное n, для которого $G^{(n)} = 1$, называется *производной длиной группы* G и обозначается через $d(G)$. Группа, у которой $d(G) \leq 2$, называется *метабелевой.*

Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется *группой Шмидта.* Начало изучению таких групп положила известная работа О. Ю. Шмидта [1]. Группам Шмидта посвящены отдельные параграфы монографий [2, 3]. Любая группа Шмидта $S = P \rtimes Q$ является произведением нормальной силовской подгруппы P и ненормальной циклической силовской подгруппы Q, причем $d(P) \leq 2$. Поэтому производная длина любой группы Шмидта не больше 3. Если P абелева, то она элементарная абелева. Описание неабелевых нормальных силовских подгрупп в группах Шмидта получили В. Д. Мазуров, С. А. Сыскин и А. Х. Журтов [4, 5]. Неабелева группа, у которой все собственные подгруппы абелевы, называется *группой Миллера — Морено.* Ненильпотентная группа Миллера — Морено является метабелевой группой Шмидта.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научного проекта № Ф24КИ-021.

Пусть $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Классы групп, в которых все подгруппы Шмидта сверхразрешимы и несверхразрешимы, предложены в [6] и обозначаются через $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ и $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ соответственно. В [6] установлено, что классы $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ и $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ являются разрешимыми наследственными радикальными насыщенными формациями, и полностью описаны группы в этих классах.

Группа Шмидта сверхразрешима тогда и только тогда, когда ее коммутант имеет простой порядок [6, лемма 1], в частности, производная длина сверхразрешимой группы Шмидта равна 2. Поэтому класс $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ можно определить как наследственную формацию, в которой каждая группа Шмидта метациклическая.

У несверхразрешимой группы Шмидта нормальная силовская подгруппа может быть как абелевой (примером служит знакопеременная группа A_4), так и неабелевой (примером служит группа $SL_2(3) = Q_8 \rtimes C_3$). В первом случае производная длина равна 2, а во втором равна 3. Поэтому формацию $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ можно разбить на два подкласса:

- $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ — класс всех групп, в которых подгруппы Шмидта неметациклические и имеют производную длину, равную 2;
- $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ — класс всех групп, в которых подгруппы Шмидта имеют производную длину, равную 3.

Ясно, что $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}} = \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}} \cup \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$, $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}} \cap \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{N}$. Классы $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ замкнуты относительно подгрупп, но не являются формациями, см. лемму 2 настоящей работы.

Каждая группа из класса $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ 2-нильпотентна и имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Группа из класса $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ 2-замкнута, поэтому каждая группа из класса $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U} \cup \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ разрешима. Минимальная не $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$-группа является несверхразрешимой группой Шмидта [7, теорема 4 (3)], а минимальная не $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$-группа — сверхразрешимой группой Шмидта. В частности, $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ и $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ — $\widetilde{S}$-формации [8, с. 229]. Экраны формации $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ также известны, [9, предложение 2; 10, теорема 1(2-3)].

Пусть $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ — класс всех групп с метабелевыми подгруппами Шмидта. Ясно, что $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U} \cup \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}} \subset \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ и $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2 \cap \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{N}$. Класс $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ можно также определить как наследственный класс, в котором каждая группа Шмидта является группой Миллера — Морено. Группы из класса $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ могут быть неразрешимыми, например, все простые группы с абелевыми силовскими подгруппами принадлежат $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$, $PSL_2(7) \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$.

Начало исследованию групп, факторизуемых $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами, было положено в работе А. Ф. Васильева, Т. И. Васильевой и В. Н. Тютянова [11], здесь $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Напомним, что подгруппа H группы G $\mathbb{P}$-субнормальна в G, если $H = G$ или существует цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$$

такая, что все индексы $|H_{i+1} : H_i|$ принадлежат $\mathbb{P}$. Результаты этого направления, полученные до 2020 г., представлены в [12].

В 2022 г. было доказано [13, теорема 2.1], что $G = AB \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, если A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G и принадлежат $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$.

В настоящей работе исследуется конечная факторизуемая группа $G = AB$ при условии, что сомножители A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G и принадлежат классу $\mathrm{Sch}_i\,\overline{\mathfrak{U}}$, $i = 2, 3$. В частности, доказано, что если A и B — субнормальные подгруппы группы G взаимно простых индексов, $A, B \in \mathrm{Sch}_i \overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_i \overline{\mathfrak{U}}$. Кроме того, получена характеризация конечных групп, в которых каждая метабелева подгруппа нильпотентна. В частности, установлено, что такая группа принадлежит $\mathrm{Sch}_3 \overline{\mathfrak{U}}$ и каждая ее подгруппа с единичной подгруппой Фраттини абелева. Отсюда следует, что в каждой ненильпотентной группе с единичной подгруппой Фраттини существует метабелева подгруппа Шмидта.

2. Вспомогательные результаты

Если G — группа, то $\pi(G)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок G. Если $|\pi(G)| = 1$, то группа G называется *примарной*, при $|\pi(G)| = 2$ — *бипримарной*. Будем также придерживаться следующих обозначений: $A \rtimes B$ — полупрямое произведение нормальной в AB подгруппы A и подгруппы B; C_p — группа порядка p; C_p^n — элементарная абелева группа порядка p^n; Q_8 — группа кватернионов порядка 8: группа, в которой все силовские подгруппы циклические, называется *z-группой*. Класс всех разрешимых групп обозначается через $\mathfrak{S}$.

Лемма 1. (1) *Класс* $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ *является наследственной насыщенной радикальной формацией.*

(2) *Группа G принадлежит* $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ *тогда и только тогда, когда G 2-замкнута и для каждой пары простых чисел $p > q$, q делит $p-1$, бипримарная $\{p, q\}$-холлова подгруппа q-замкнута.*

(3) *В группе G все сверхразрешимые подгруппы нильпотентны тогда и только тогда, когда* $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.

(4) *В группе G каждая подгруппа Шмидта является минимальной несверхразрешимой подгруппой тогда и только тогда, когда* $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.

(5) *В группе G каждая бипримарная z-подгруппа циклическая тогда и только тогда, когда* $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.

(6) *Минимальная не* $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$*-группа является сверхразрешимой группой Шмидта.*

Доказательство. Утверждения (1), (2) доказаны в [6]. Утверждения (3)–(5) следуют из определения класса $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.

Проверим утверждение (6). Пусть группа G не принадлежит классу $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, а каждая ее собственная подгруппа содержится в $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$. Тогда в G есть сверхразрешимая подгруппа Шмидта S. Она не может быть собственной подгруппой в G, поэтому $G = S$.

Лемма 2. *Классы* $\mathrm{Sch}_2 \overline{\mathfrak{U}}$, $\mathrm{Sch}_3 \overline{\mathfrak{U}}$ *и* $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ *наследственные, но не являются формациями.*

Доказательство. Ясно, что все три класса замкнуты относительно подгрупп, т. е. наследственные.

Предположим, что класс $\mathrm{Sch}_2 \overline{\mathfrak{U}}$ является формацией. Пусть G — минимальная не $\mathrm{Sch}_2 \overline{\mathfrak{U}}$-группа. Так как $G \notin \mathrm{Sch}_2 \overline{\mathfrak{U}}$, то в G имеется подгруппа Шмидта $S = P \rtimes Q$ такая, что P неабелева. Если $S < G$, то $S \in \mathrm{Sch}_2 \overline{\mathfrak{U}}$, поскольку G — минимальная не $\mathrm{Sch}_2 \overline{\mathfrak{U}}$-группа, и подгруппа P должна быть абелевой. Противоречие, поэтому $S = G$ — группа Шмидта. А. Н. Скиба [14] доказал локальность разрешимой формации $\mathfrak{F}$, у которой всякая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа либо имеет простой порядок, либо является группой Шмидта.

Так как локальная формация является насыщенной [15, IV.4.6], то и формация $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ должна быть насыщенной. Группа $SL_2(3) = Q_8 \rtimes C_3$ является группой Шмидта с неабелевой силовской подгруппой Q_8, поэтому $SL_2(3) \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $SL_2(3) \notin \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$. Кроме того,

$$\Phi(SL_2(3)) \cong C_2, \; SL_2(3)/\Phi(SL_2(3)) \cong A_4 \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}.$$

Поскольку формация $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ насыщенная, то $SL_2(3)$ должна принадлежать $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$; противоречие. Поэтому предположение неверно и класс $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ не является формацией.

Класс $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ не замкнут относительно фактор-групп: $Q_8 \rtimes C_3 \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$, а $(Q_8 \rtimes C_3)/C_2 \cong A_4 \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$. Поэтому $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ не является формацией.

Предположим, что класс $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ является формацией. Пусть G — минимальная не $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$-группа. Так как $G \notin \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$, то в G имеется подгруппа Шмидта $S = P \rtimes Q$ такая, что P неабелева. Если $S < G$, то $S \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$, поскольку G — минимальная не $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ и подгруппа P должна быть абелевой. Противоречие, поэтому $S = G$ — группа Шмидта. Согласно [14] формация $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ должна быть насыщенной. Теперь $SL_2(3)$ должна принадлежать $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$; противоречие. Поэтому предположение неверно и класс $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ не является формацией.

Лемма 3. *Пусть A, B и C — подгруппы группы G и $G = AB = AC = BC$.*
(1) *Если A, B, $C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.*
(2) *Если A, B, $C \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, то $G \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Оба утверждения получены в [16, следствие 7.4] как следствие их теоремы о N-критическом графе трижды факторизуемой группы. Приведем прямые доказательства этих утверждений.

(1) Ясно, что $G = AB = AC^g = BC^g$ для любого $g \in G$. Так как A, B, $C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то A, B и C 2-замкнуты по лемме 1(2), а по теореме Кегеля [17, теорема 1] группа G 2-замкнута, в частности, G разрешима. Предположим, что $G \notin \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$. По лемме 1(2) существуют простые числа $p > q$, q делит $p-1$, такие, что $\{p,q\}$-холлова подгруппа $G_{\{p,q\}}$ группы G не q-замкнута. Согласно [18, лемма (3)] существуют $\{p,q\}$-холловы подгруппы $G_{\{p,q\}}$, $A_{\{p,q\}}$, $B_{\{p,q\}}$ и $C^g_{\{p,q\}}$ соответственно в G, A, B и C^g для некоторого $g \in G$ такие, что $G_{\{p,q\}} = A_{\{p,q\}}B_{\{p,q\}} = A_{\{p,q\}}C^g_{\{p,q\}} = B_{\{p,q\}}C^g_{\{p,q\}}$ — трижды факторизуемая группа. Поскольку $A_{\{p,q\}}$, $B_{\{p,q\}}$, $C_{\{p,q\}} \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $A_{\{p,q\}}$, $B_{\{p,q\}}$ и $C_{\{p,q\}}$ q-замкнуты по лемме 1(2), а согласно [17, теорема 1] группа $G_{\{p,q\}}$ q-замкнута; противоречие. Поэтому допущение неверно и $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.

(2) Согласно [5, теорема 1] группа G принадлежит $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и для каждой пары простых чисел $p > q$, q не делит $p-1$, бипримарная $\{p,q\}$-холлова в G подгруппа нильпотентна. Поэтому подгруппы A, B и C имеют силовские башни сверхразрешимого типа, а согласно [17, следствие 1] группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, в частности, G разрешима. Предположим, что $G \notin \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$. Тогда существуют простые числа $p > q$, q не делит $p-1$, такие, что $\{p,q\}$-холлова подгруппа $G_{\{p,q\}}$ группы G ненильпотентна. Так как $G_{\{p,q\}} = A_{\{p,q\}}B_{\{p,q\}} = A_{\{p,q\}}C^g_{\{p,q\}} = B_{\{p,q\}}C^g_{\{p,q\}}$ — трижды факторизуемая группа, $A_{\{p,q\}}$, $B_{\{p,q\}}$, $C_{\{p,q\}} \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, то $A_{\{p,q\}}$, $B_{\{p,q\}}$ и $C_{\{p,q\}}$ нильпотентны. Согласно [17, следствие 1] группа $G_{\{p,q\}}$ нильпотентна. Получили противоречие. Поэтому допущение неверно и $G \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$.

Лемма 4 [19, лемма 1.9]. *Пусть H, U — подгруппы разрешимой группы G.*

(1) *Если H $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то $H \cap U$ $\mathbb{P}$-субнормальна в U.*

(2) *Если H — субнормальная подгруппа группы G, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

В следующей лемме собраны используемые свойства групп Шмидта [1–3, 6].

Лемма 5. *Пусть S — группа Шмидта, т. е. минимальная ненильпотентная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$S = P \rtimes Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа, $Q = \langle y \rangle$ — не нормальная силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа и $y^q \in Z(S)$;*

(2) *$S' = P$ и $|P/\Phi(P)| = p^m$, где m — показатель числа p по модулю q;*

(3) *группа S имеет точно два класса сопряженных максимальных подгрупп:*

$$P \times \langle y^q \rangle \lhd S, \ \{\Phi(P) \times \langle x^{-1}yx \rangle \mid x \in P \setminus \Phi(P)\};$$

(4) *группа S сверхразрешима тогда и только тогда, когда выполняется любое одно из следующих требований:*

(4.1) *q делит $(p-1)$;*

(4.2) *в S существует подгруппа индекса p;*

(4.3) *подгруппа Q $\mathbb{P}$-субнормальна в S.*

3. Группы, факторизуемые $\mathbb{P}$-субнормальными $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$-подгруппами

Теорема 1. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные разрешимые подгруппы группы G и $(|G : A|, |G : B| = 1)$. Если каждая подгруппа Шмидта в A и каждая подгруппа Шмидта в B метабелева, то каждая подгруппа Шмидта в G метабелева.*

Доказательство. Так как $G = AB$, A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные разрешимые подгруппы, то группа G разрешима [11, теорема 4.2]. Воспользуемся индукцией по порядку группы.

По условию подгруппа A $\mathbb{P}$-субнормальна в G, поэтому существует в G подгруппа M такая, что $A \leq M$, A $\mathbb{P}$-субнормальна в M и $|G : M|$ — простое число. Так как $|G : A| = |G : M||M : A|$, то $|M : A|$ делит $|G : A|$. Поскольку $G = MB$, $|G : B| = |M : M \cap B|$, то $|M : M \cap B|$ делит $|G : B|$ и $(|M : A|, |M : M \cap B|) = 1$. По тождеству Дедекинда $M = A(M \cap B)$, а в A и в $M \cap B$ каждая подгруппа Шмидта метабелева. Так как группа G разрешима, то $M \cap B$ $\mathbb{P}$-субнормальна в M по лемме 4(1). Поэтому к M применима индукция, по которой в M каждая подгруппа Шмидта метабелева. Без ущерба для доказательства подгруппу A можно заменить максимальной в G подгруппой M простого индекса. Аналогично подгруппу B можно заменить максимальной в G подгруппой простого индекса. Следовательно, можно считать, что $|G : A| = p$, $|G : B| = q$, p и q — различные простые числа.

Предположим, что в G существует не метабелева подгруппа Шмидта. Тогда для некоторых $r, t \in \pi(G)$ в группе G существует r-замкнутая $\{r, t\}$-подгруппа Шмидта $S = R \rtimes T$ такая, что силовская r-подгруппа R неабелева. Если $p \notin \{r, t\}$, то $\{r, t\}$-холлова подгруппа в A является $\{r, t\}$-холловой подгруппой в G. По теореме Холла $S \leq A^x$ для некоторого $x \in G$ и S метабелева; противоречие. Поэтому $p \in \{r, t\}$. Аналогично $q \in \{r, t\}$ и $\{p, q\} = \{r, t\}$. Без ущерба для доказательства можно считать, что $p = r \neq t$ и $T \leq A$. По тождеству Дедекинда и лемме 5(3) получаем

$$A \cap S = (A \cap R) \times T, \quad A \cap S \leq \Phi(R) \times T.$$

Так как R неабелева, то из леммы 5(2–4) следует, что $|S : (A \cap S)| = r^n > r$ для некоторого натурального $n \geq 2$. Поскольку

$$|G| = |A|r \geq |AS| = |A||S|/|A \cap S| = |A||S : (A \cap S)| > |A|r,$$

получили противоречие. Поэтому предположение неверно и каждая подгруппа Шмидта в G метабелева.

Пример 1. Группа $G = C_7 \times SL_2(3)$ [20, SmallGroup(168,22)] содержит максимальные подгруппы $A \cong C_7 \times Q$, $|G : A| = 3$, и $B \cong C_{42}$, $|G : B| = 4$. Поскольку A и B нильпотентны, то A и B принадлежат $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$. Группа G содержит не метабелеву подгруппу Шмидта $SL_2(3)$, поэтому $G \notin \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$. Этот пример показывает, что требование «A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G» в теореме 1 отбросить нельзя.

В группах из класса $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U} \cup \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ каждая подгруппа Шмидта метабелева. Если A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$, $A, B \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, то $G \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, [13, теорема 2.1]. Для класса $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ получаем

Следствие 1.1. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы G, $A, B \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $(|G : A|, |G : B| = 1)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$G \in \mathfrak{S} \cap \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$;*

(2) *если $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$;*

(3) *если в G существует подгруппа $C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $G = AC = BC$, то $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. (1), (2) Согласно лемме 1(2) подгруппы A и B разрешимы, а по теореме 1 группа G разрешима и каждая ее подгруппа Шмидта метабелева, поэтому $G \in \mathfrak{S} \cap \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$. Если $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то в группе G каждая подгруппа Шмидта несверхразрешима и $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$.

(3) Так как $G = AB = AC = BC$, $A,\ B,\ C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ по лемме 3. Теперь из (2) следует, что $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$.

Пример 2. В следствии 1.1(2) требование «$G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$» убрать нельзя. Примером служит симметрическая группа S_4 степени 4:

$$S_4 = D_8 A_4,\ |S_4 : D_8| = 3,\ |S_4 : A_4| = 2,\ D_8 \in \mathfrak{N} \subset \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}},\ A_4 \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}.$$

Так как S_4 содержит сверхразрешимую подгруппу Шмидта, изоморфную $S_3 \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, то $S_4 \notin \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$. Но это требование можно убрать в случае, когда подгруппы A и B субнормальны в G.

Следствие 1.2. *Пусть A и B — субнормальные подгруппы группы G и $(|G : A|, |G : B| = 1)$. Если $A, B \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Так как $A, B \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}} \subseteq \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ — класс Фиттинга по лемме 1(1), то $G = AB \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ согласно [15, IX.1.1(a)]. Поскольку группа G разрешима, то подгруппы A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G по лемме 4(2). По следствию 1.1(2) группа G принадлежит $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$. Следствие доказано.

Пусть A и B — подгруппы группы G. Если A перестановочна с каждой субнормальной подгруппой в B, а B перестановочна с каждой субнормальной подгруппой в A, то говорят, что подгруппы A и B *взаимно sn-перестановочны* [21].

Лемма 6. *Пусть A и B — взаимно sn-перестановочные подгруппы группы G. Если подгруппа B разрешима, то подгруппа A $\mathbb{P}$-субнормальна в AB.*

Доказательство. Пусть $1 = B_0 \leq B_1 \leq \ldots \leq B_{n-1} \leq B_n = B$ — композиционный ряд в подгруппе B. Так как B разрешима, то все индексы $|B_{i+1} : B_i|$ — простые числа. Из определения взаимно sn-перестановочных подгрупп следует, что существует цепь подгрупп

$$A = AB_0 \leq AB_1 \leq \ldots \leq AB_{n-1} \leq AB_n = AB.$$

Так как $|AB_{i+1} : AB_i|$ делит $|B_{i+1} : B_i|$, то A $\mathbb{P}$-субнормальна в AB.

Из теоремы 1 и следствия 1.1 с помощью леммы 6 получаем

Следствие 1.3. *Пусть A и B — взаимно sn-перестановочные подгруппы группы G, и пусть $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $A, B \in \mathfrak{S} \cap \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$, то $G \in \mathfrak{S} \cap \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$;*

(2) *если $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, $A, B \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

4. Группы, факторизуемые $\mathbb{P}$-субнормальными $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$-подгруппами

Класс $\mathscr{A}$ всех групп с абелевыми силовскими подгруппами является наследственной формацией и $G^{\mathscr{A}} \leq G'$ в любой группе G. Формация $\mathscr{A}$ не насыщенная и не радикальная.

Теорема 2. *Для группы G следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$;*

(2) *каждая метабелева подгруппа группы G нильпотентна;*

(3) *все $\mathscr{A}$-подгруппы в G абелевы.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть в группе G производная длина каждой подгруппы Шмидта группы G равна 3 и H — метабелева подгруппа группы G. Поскольку каждая подгруппа в H имеет производную длину не более 2, то в H нет подгрупп Шмидта. Поэтому H нильпотентна.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть каждая метабелева подгруппа группы G нильпотентна и S — подгруппа Шмидта из G. Так как производная длина любой подгруппы Шмидта равна 2 (в этом случае она метабелева) или 3, то $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть каждая метабелева подгруппа группы G нильпотентна и H — $\mathscr{A}$-подгруппа группы G. Так как (1) $\Leftrightarrow$ (2), то группа G разрешима. По теореме Ито [2, VI.4.4] $\{p, q\}$-подгруппа $H_{\{p,q\}}$ в H метабелева для всех $p \in \pi(H)$ и $q \in \pi(H)$. По условию подгруппа $H_{\{p,q\}}$ нильпотентна. Поскольку силовские подгруппы H_p и H_q абелевы, то $H_{\{p,q\}}$ абелева. Отсюда следует, что подгруппа H абелева. Следовательно, все $\mathscr{A}$-подгруппы в G абелевы.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть все $\mathscr{A}$-подгруппы в группе G абелевы и $S = P \rtimes Q$ — подгруппа Шмидта группы G, где P — силовская p-подгруппа, Q — силовская q-подгруппа в S. Поскольку Q циклическая и S неабелева, то подгруппа P не может быть абелевой по условию. Из свойств групп Шмидта следует, что подгруппа P является коммутантом в S. Следовательно, коммутант каждой подгруппы Шмидта группы G неабелев и $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.

Следствие 2.1. (1) *Если* $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ *и* $\Phi(G) = 1$*, то* G *абелева.*

(2) *Если* $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$*,* $H \leq G$ *и* $\Phi(H) = 1$*, то* H *абелева.*

Доказательство. (1) Пусть N — минимальная нормальная в G подгруппа. Так как $N\langle x\rangle$ метабелева, то $N\langle x\rangle$ нильпотентна для любого элемента $x \in G$ по теореме 2. Пусть N — r-подгруппа, $r \in \pi(G)$, G_r и $G_{r'}$ — силовская r-подгруппа и r'-холлова подгруппа группы G соответственно. Тогда

$$NG_{r'} = N \times G_{r'},\ N \cap Z(G_r) \neq 1,\ N \cap Z(G_r) \lhd G,\ |N| = r,\ N \leq Z(G).$$

Таким образом, каждая минимальная нормальная подгруппа группы G содержится в центре группы G. Если $\Phi(G) = 1$, то $F(G)$ — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп и $F(G) \leq Z(G)$. Поскольку $C_G(F(G)) \leq F(G)$ в разрешимых группах, то G абелева.

Поскольку $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ — наследственный класс, то (2) следует из (1).

Следствие 2.2. *Если* G *— ненильпотентная группа с единичной подгруппой Фраттини, то в* G *существует метабелева подгруппа Шмидта.*

Пример 3. Утверждение (2) следствия 2.1 не допускает обращения. В группе Шмидта $C_3 \rtimes C_4$ [20, SmallGroup(12,1)] все собственные подгруппы абелевы, $\Phi(C_3 \rtimes C_4) \neq 1$ и $C_3 \rtimes C_4 \notin \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$. Утверждение следствия 2.2 также не допускает обращения, примером служит $SL_2(5)$.

Пример 4. Группа $GL_2(3) = (Sd_{16})(SL_2(3))$ [20, SmallGroup(48,29)] факторизуется подгруппами Sd_{16} индекса 3 и $SL_2(3)$ индекса 2. Здесь Sd_{16} — полудиэдральная группа порядка 16. Ясно, что

$$Sd_{16} \in \mathfrak{N} \subset \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}, \quad SL_2(3) = Q_8 \rtimes C_3 \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}},$$

$$|GL_2(3) : Sd_{16}| = 3, \quad |GL_2(3) : SL_2(3)| = 2.$$

Поскольку в $GL_2(3)$ есть подгруппа, изоморфная S_3, то $GL_2(3) \notin \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$. Поэтому в следующей теореме требование «$G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$» убрать нельзя.

Теорема 3. *Пусть* A *и* B *—* $\mathbb{P}$*-субнормальные подгруппы группы* $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$*. Если* $A, B \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ *и* $(|G : A|, |G : B| = 1)$*, то* $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$*.*

Доказательство. Так как $G = AB$, A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные разрешимые подгруппы, то группа G разрешима [11, теорема 4.2]. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Повторяя начальную часть доказательства теоремы 1, получаем, что $|G : A| = p$, $|G : B| = q$, p и q — различные простые числа.

Предположим, что в G существует $\{r, t\}$-подгруппа Шмидта $S = R \rtimes T$ такая, что силовская r-подгруппа R абелева. Если $p \notin \{r, t\}$, то $S \leq A^x$ для некоторого $x \in G$ и S не метабелева; противоречие. Поэтому $p \in \{r, t\}$. Аналогично $q \in \{r, t\}$ и $\{p, q\} = \{r, t\}$. Без ущерба для доказательства можно считать, что $p = r \neq t$ и $T \leq A$. По тождеству Дедекинда $A \cap S = (A \cap R) \times T$ и $A \cap S \leq \Phi(R) \times T$ по лемме 5(3). По условию $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, поэтому подгруппа S несверхразрешима. Из леммы 5(2)–(4) заключаем, что $|S : (A \cap S)| = r^n > r$ для некоторого натурального n. Поскольку

$$|G| = |A|r \geq |AS| = |A||S|/|A \cap S| = |A||S : (A \cap S)| > |A|r,$$

получили противоречие. Поэтому предположение неверно и каждая подгруппа Шмидта в G не метабелева.

Следствие 3.1. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы G, $A, B \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $(|G:A|, |G:B| = 1)$. Если в G существует подгруппа $C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $G = AC = BC$, то $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Так как

$$G = AB = AC = BC, \quad A, B, C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}},$$

то $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ по лемме 3. Теперь из теоремы 3 следует, что $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.

Следствие 3.2. *Пусть A и B — субнормальные подгруппы группы G и $(|G:A|, |G:B| = 1)$. Если $A, B \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Так как $A, B \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}} \subseteq \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ — класс Фиттинга по лемме 1, то $G = AB \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ согласно [15, IX.1.1 (a)]. Поскольку группа G разрешима, то подгруппы A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G по лемме 4 (2). Согласно теореме 3 группа $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.

Из теоремы 1 с помощью леммы 6 получаем

Следствие 3.3. *Пусть A и B — взаимно sn-перестановочные подгруппы группы G, и пусть $(|G:A|, |G:B|) = 1$. Если $A, B \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$, $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I.. Berlin: Springer-Verl., 1967.
3. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
4. *Мазуров В. Д., Сыскин С. А.* О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 2. С. 217–222.
5. *Журтов А. Х., Сыскин С. А.* О группах Шмидта // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 26, № 2. С. 74–78.
6. *Монахов В. С.* О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 5. С. 717–722.
7. *Монахов В. С.* О трех формациях над $\mathfrak{U}$ // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 3. С. 358–367.
8. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
9. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Симоненко Д. Н.* О MP-замкнутых насыщенных формациях конечных групп // Изв. вузов. Математика. 2017. № 6. С. 9–17.
10. *Yia Xiaolan, Jiang Shunhuan, Kamornikov Sergey.* A new formation with Shemetkov property // Commun. Algebra. 2024. V. 52, N 12. P. 5180–5185.
11. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–67.
12. *Трофимук А. А.* Конечные факторизуемые группы с ограничениями на сомножители. Минск: Издательский центр БГУ, 2021.
13. *Монахов В. С.* Конечные факторизуемые группы с $\mathbb{P}$-субнормальными v-сверхразрешимыми и sh-сверхразрешимыми сомножителями // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 3. С. 403–410.
14. *Скиба А. Н.* Об одном классе локальных формаций конечных групп // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 11. С. 982–985.
15. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 1992.
16. *Васильев А. Ф., Мурашко В. И.* Арифметические графы и классы конечных групп // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 1. С. 55–73.
17. *Kegel O. H.* Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. V. 87, N 1. P. 42–48.
18. *Pennington E.* Trifactorisable groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1973. V. 8. P. 461–469.
19. *Монахов В. С.* Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.

20. *A system for computational discrete algebra GAP 4.12.2* [Electronic resource]. Mode of access: https://www.gap-system.org. Date of Access: 10.09.2023.

21. *Alejandre M. J., Ballester-Bolinches A., Cossey J., Pedraza-Aguilera M. C.* On some permutable products of supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoamericana. 2004. V. 20. P. 413–425.

Поступила в редакцию 14 июля 2025 г.
После доработки 19 декабря 2025 г.
Принята к публикации 19 декабря 2025 г.

Коновалова Марина Николаевна (ORCID 0000-0002-0338-237X)
Брянский филиал Российской академии народного хозяйства
и государственной службы при Президенте РФ
ул. Дуки, 61, Брянск 241050
msafe83@mail.ru

Монахов Виктор Степанович (ORCID 0000-0003-0977-7396)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
victor.monakhov@gmail.com