Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.946

ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ С ВОЗРАСТАЮЩИМИ И НЕВОЗРАСТАЮЩИМИ СИМВОЛАМИ

Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян

Аннотация. Находятся необходимые и достаточные условия почти гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в случае, когда символы (характеристические многочлены) этих операторов бесконечно возрастают при стремлении модуля аргумента этих многочленов к бесконечности и когда они иногда могут быть ограниченными.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.204

Ключевые слова: почти гипоэллиптический дифференциальный оператор (многочлен), регулярность, устойчивость многочленов, элементарность центральных линий относительно многочлена.

Посвящается юбилею
Геннадия Владимировича Демиденко

0. Введение

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ — n-мерные евклидовы пространства точек (векторов) $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ соответственно, $\mathbb{C}^n := \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n,+} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$, $\mathbb{R}^{n,0} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_1 \dots \xi_n \neq 0\}$. Через $\mathbb{N}$ обозначим множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, через $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ — множество всех n-мерных мультииндексов, т. е. множество всех точек с целыми неотрицательными координатами $\{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \ (i = 1, \dots, n)\}$.

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^{n,+} : \lambda_j > 0 \ (j = 1, \dots, n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $t > 0$. Положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$, $|\lambda, \xi| = \sqrt{\xi_1^{2/\lambda_1} + \dots + \xi_n^{2/\lambda_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $t^\lambda := (t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n})$, $t^\lambda \xi := (t^{\lambda_1}\xi_1, \dots, t^{\lambda_n}\xi_n)$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = 1/i \ \partial/\partial x_j$ или $D_j = \partial/\partial \xi_j \ (j = 1, \dots, n)$.

Хёрмандером введено следующее понятие линейного гипоэллиптичекого дифференциального оператора (многочлена) (см. [1, определение 11.1.2, теорема 11.1.3]).

Определение 0.1. Дифференциальный оператор $P(D)$ и многочлен $P(\xi)$ называются *гипоэллиптическими*, если выполняются следующие эквивалентные условия:

1) если $\Omega \subset \mathbb{E}^n$, $u \in D'(\Omega)$ и $P(D)u = 0$, то $u \in C^\infty(\Omega)$,

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта 25 RG-1A205 научного комитета РА и тематического финансирования РАУ из средств МОБНРФ.

2) если $0 \neq \nu \in \mathbb{N}_0^n$, то $P^{(\nu)}(\xi)/P(\xi) := D^\nu P(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$,

3) $d_P(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, где $d_P(\xi)$ — расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до многообразия $\mathbb{D}(P) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n, P(\zeta) = 0\}$,

4) существуют такие положительные постоянные c и C, что если $\xi \in \mathbb{R}^n$ и величина $|\xi|$ достаточно велика, то

$$|D^\alpha P(\xi)|/|P(\xi)| \leq C|\xi|^{-c|\alpha|}. \tag{0.1}$$

Пусть оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) удовлетворяет более слабому условие, чем условие 2, а именно, существует число $C = C(P) > 0$ такое, что

$$|D^\nu P(\xi)|/[|P(\xi)| + 1] \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall \nu \in \mathbb{N}_0^n, \tag{0.2}$$

или пусть условие 3 заменено более слабым условием

$$d_P(\xi) \geq \varepsilon > 0 \tag{0.3}$$

при достаточно больших $|\xi|$.

Известно (см. [2]), что если символ $P(\xi)$ дифференциального оператора $P(D)$ удовлетворяет условию (0.2) и бесконечно растет при $|\xi| \to \infty$, то все решения уравнения $P(D)u = 0$, которые «не слишком быстро» растут на бесконечности, являются бесконечно дифференцируемыми функциями в $\mathbb{E}^n$.

Цель настоящей работы — нахождение алгебраических условий, при которых $P(\xi)$ удовлетворяет условию (0.2) и бесконечно растет при $|\xi| \to \infty$.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, введем некоторые классы операторов и функций.

Прежде всего докажем, что при определенных (не очень жестких) ограничениях условия (0.2) и (0.3) эквивалентны.

Предложение 0.1. *Пусть существуют положительные числа κ и m такие, что*

$$|P(\xi)| \geq \kappa \quad \forall \xi, \ |\xi| \geq m. \tag{0.4}$$

Тогда условия (0.2) *и* (0.3) *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть для многочлена P выполняются условия (0.3) и (0.4). Покажем, что многочлен P удовлетворяет также условию (0.2). Будем пользоваться леммой 11.1.4 монографии [1], согласно которой существует постоянная $C = C(P) > 0$ такая, что

$$C^{-1} \leq d_P(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|} \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ P(\xi) \neq 0. \tag{0.5}$$

В силу условия (0.3) существует $M > 0$ такое, что при $|\xi| \geq M$ имеем

$$\varepsilon \sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|} \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ P(\xi) \neq 0,$$

т. е.

$$\sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq \left[\sum_{\alpha \neq 0} \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|}\right] |P(\xi)| \quad \forall \xi, \ |\xi| \geq M.$$

Так как, очевидно, с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$\sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq c_1 \quad \forall \xi, \ |\xi| \leq M,$$

отсюда получаем

$$\sum_{\alpha\neq 0}|P^{(\alpha)}(\xi)| \le \max\left[c_1, \sum_{\alpha\neq 0}\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|}\right][|P(\xi)|+1] \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,$$

т. е. многочлен P удовлетворяет условию (0.2).

Докажем обратное утверждение, т. е. что при выполнении условий (0.2), (0.4) для многочлена P с некоторой постоянной $c>0$ выполняется оценка (0.3).

Из условий (0.2), (0.4) с некоторыми положительными постоянными c_2, c_3 при $|\xi|\ge m$ для любого мультииндекса α имеем

$$|P^{(\alpha)}(\xi)| \le c_2[|P(\xi)|+1] = \frac{c_2}{\kappa}[\kappa|P(\xi)|+\kappa] \le \frac{c_2}{\kappa}[\kappa|P(\xi)|+|P(\xi)|]$$
$$= \frac{c_2(1+\kappa)}{\kappa}|P(\xi)| =: c_3|P(\xi)|.$$

Отсюда и из левой части неравенств (0.5) выводим

$$C^{-1} \le d_P(\xi)\sum_{\alpha\neq 0}|P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|} \le d_P(\xi)\sum_{\alpha\neq 0}\left|\frac{c_3P(\xi)}{P(\xi)}\right|^{1/|\alpha|}$$
$$= d_P(\xi)\sum_{\alpha\neq 0}(c_3)^{1/|\alpha|} \quad \forall\xi,\ |\xi|\ge m,$$

откуда получаем утверждение нашего предложения при $\varepsilon = C^{-1}/\sum_{\alpha\neq 0}(c_3)^{1/|\alpha|}$.

Предложение 0.1 доказано. □

Замечание 0.1. Предложение 0.1 можно перефразировать так: при выполнении условия (0.4) многочлен P почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда

$$\rho(P) := \lim_{t\to\infty}\inf_{|\xi|=t} d_P(\xi) > 0. \tag{0.6}$$

В связи с изучением общих линейных дифференциальных уравнений (операторов) многими авторами достаточно хорошо исследованы символы (характеристические многочлены), отвечающие этим уравнениям (операторам) (кроме упомянутой книги Хёрмандера см., например, [3–12]).

Введем понятие сравнения мощностей дифференциальных операторов (многочленов) и, в этих терминах, понятия гипоэллиптического и почти гипоэллиптического операторов (многочленов).

Определение 0.2 (см. [13] или [14]). Будем говорить, что оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) *мощнее* оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$) и будем обозначать через $Q<P$, если существует постоянная $c>0$ такая, что $|Q(\xi)|\le c[|P(\xi)|+1]$ $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$. Если $P<Q<P$, то будем говорить, что операторы $P(D)$ и $Q(D)$ *имеют одинаковую мощность*. Если $|Q(\xi)|/[|P(\xi)|+1]\to 0$ при $|P(\xi)|\to\infty$, то будем говорить, что оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) *доминирует по мощности над оператором* $Q(D)$ (*над многочленом* $Q(\xi)$), и обозначать через $Q\ll P$.

Определение 0.3 (см.[1, 15–19]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется

1) *гипоэллиптическим*, если $D^\alpha P\ll P$ для всех $0\neq\alpha\in\mathbb{N}_0^n$,
2) *почти гипоэллиптическим*, если $D^\alpha P<P$ для всех $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$.

Из этих определений следует, что гипоэллиптический многочлен является почти гипоэллиптическим. Обратное неверно, в чем можно убедиться на примере многочлена $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1^2\xi_2^2$, которому соответствует оператор

$$P(D) = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}.$$

Действительно, почти гипоэллиптичность этого многочлена очевидна, в то время как на последовательности $\{\xi^s\} = \{(1, s)\}_{s=1}^{\infty}$

$$D_1 P(\xi^s)/P(\xi^s) \to 2 \neq 0 \quad \text{при } s \to \infty.$$

1. Бесконечно возрастающие почти гипоэллиптические многочлены

В многомерном случае на поведение многочлена от $n > 1$ переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ решающее влияние на бесконечности могут оказать младшие члены. Как иллюстрацию сказанного рассмотрим следующие многочлены, где $n = 2$ и $a, b \in \mathbb{R}^1$.

Пример 1.1. $P^1(\xi) = (\xi_1 + \xi_2)^2 \xi_1^2 + a\xi_2^2$. Очевидно, при $a > 0$ имеем $P^1(\xi) \to \infty$ при $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \to \infty$. В то же время P^1 не обладает этим свойством при $a \leq 0$.

Пример 1.2. $P^2(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) + 2b(\xi_1 - \xi_2)\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) + \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)$. Представляя этот многочлен в виде $P^2(\xi) = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)[(\xi_1 - \xi_2)^2 + 2b(\xi_1 - \xi_2) + 1]$, легко убедиться, что $|P^2(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, когда $|b| < 1$, в то время как $P^2(\xi^s) = 0$ на последовательности $\xi^s = [(s - b) + \sqrt{b^2 - 1}, s]$ $(s = 1, 2, \ldots)$, когда $|b| \geq 1$.

Исходя из этих примеров, введем два класса многочленов, обозначим через $\mathbb{I}_n$ множество многочленов $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (с, вообще говоря, комплексными коэффициентами) таких, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$ (отметим, что таковыми являются, например, гипоэллиптические многочлены (см. также [2, 14, 15, 17]) и обозначим через $\mathbb{I}_n^+$ множество положительных многочленов с вещественными коэффициентами таких, что $P(\xi) \to +\infty$ при $|\xi| \to \infty$.

Очевидно, что в вышеприведенных примерах $P^1 \in \mathbb{I}_2^+$ при $a > 0$ и $P^1 \notin \mathbb{I}_2^+$ при $a \leq 0$, $P^2 \in \mathbb{I}_2$ при $|b| < 1$ и $P^2 \notin \mathbb{I}_2$ при $|b| \geq 1$.

Легко убедиться, что модуль символа (характеристического многочлена) $P(\xi)$ гипоэллиптического оператора $P(D)$ бесконечно возрастает при бесконечном возрастании модуля его аргумента $|\xi|$. Этим свойством, вообще говоря, не обладают почти гипоэллиптические операторы, в чем можно убедиться на следующем простом примере: $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 + 1$. Очевидно, что это почти гипоэллиптический многочлен, при этом $P(\xi^s) = 1$ на последовательности $\{\xi^s = (s, s)\}_{s=1}^{\infty}$.

Возникает естественный вопрос о нахождении условий, при которых почти гипоэллиптический оператор принадлежит классу $\mathbb{I}_n$. Для ответа на такой вопрос нам необходимы следующие понятия.

Определение 1.1. Будем говорить, что многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *по существу зависит от всех переменных* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, если существует точка $\xi \in \mathbb{R}^n$ такая, что $\prod_{j=1}^{n} D_j P(\xi) \neq 0$.

Определение 1.2. Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, по существу зависящий от всех переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, назовем

1) *устойчивым относительно линейного невырожденного преобразования* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T\xi = \eta$ (относительно невырожденной матрицы $T = \left(t_i^j\right)_{i,j=1}^n$), если многочлен $Q_T(\eta) := P(T^{-1}\eta)$ по существу зависит от всех переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n$,

2) *неустойчивым относительно невырожденного преобразования* T, если многочлен $Q_T(\eta)$ зависит только от переменных $\eta_{1_1}, \ldots, \eta_{1_k}$, где $k < n$.

Приведем пример многочлена и относительно него неустойчивого преобразования.

Пусть $n = 2$, $m \in \mathbb{N}$, $a_m b \neq 0$,

$$P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^{m} a_j(\xi_1 + b\xi_2)^j.$$

Легко убедится, что

1) это почти гипоэллиптический многочлен,

2) $P \notin \mathbb{I}_2$,

3) линейным невырожденным преобразованием $\eta_1 = \xi_1 + b\xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$ этот многочлен переходит в многочлен от одной переменной

$$Q(\eta) = Q(\eta_1) = \sum_{j=0}^{m} a_j \eta_1^j.$$

Лемма 1.1. *Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ степени m почти гипоэллиптичен, $T = \left(t_i^j\right)_{i,j=1}^n$ — невырожденная матрица и $\eta = T\xi$. Тогда многочлен $Q(\eta) = Q_T(\eta) = P(T^{-1}\eta)$ почти гипоэллиптический.*

Доказательство. Так как для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ многочлен

$$D_\eta^\alpha Q(\eta) = D_\eta^\alpha P(T^{-1}\eta)$$

является линейной комбинацией $\left\{\left(D_\xi^\beta P\right)(T^{-1}\eta)\right\}$ для $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $|\beta| = |\alpha|$, то из почти гипоэллиптичности P следует существование положительных констант c_1 и c_2 таких, что

$$\sum_{|\alpha| \le m} \left|D_\eta^\alpha Q(\eta)\right| = \sum_{|\alpha| \le m} \left|D_\eta^\alpha P(T^{-1}\eta)\right| \le c_1 \sum_{|\alpha| \le m} \left|D_\xi^\beta P(T^{-1}\eta)\right|$$
$$\le c_2[1 + |P(T^{-1}\eta)|] = c_2[1 + |Q(\eta)| \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

Для однородного многочлена $R(\xi) = R(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ степени m введем обозначения

$$\Sigma_n(R) := \{\eta \in \mathbb{R}^n, R(\eta) = 0\}, \quad \Sigma_{n,m}(R) := \Big\{\eta \in \Sigma_n(R), \sum_{|\alpha| \le m-1} |D^\alpha R(\eta)| = 0\Big\}.$$

Замечание 1.1. Очевидно, что $0 \in \Sigma_{n,m}(R)$ для любого однородного многочлена R степени $m \ge 1$ от n переменных, и легко убедиться, что множество $\Sigma_{n,m}(R)$ является подпространством $\mathbb{R}^n$.

Через $\sigma_{n,m}(R)$ обозначим размерность пространства $\Sigma_{n,m}(R)$.

Представим многочлен

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

степени $m \ge 1$ в виде суммы однородных многочленов, а именно

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \tag{1.1}$$

Лемма 1.2. *Для почти гипоэллиптического многочлена $P \notin \mathbb{I}_n$ степени $m \ge 1$*

$$1 \le \sigma_{n,m}(P_m) \le n - 1. \tag{1.2}$$

Доказательство. Правая часть неравенства очевидна, докажем левую часть. Так как множество $\Sigma_{n,m}(P_m)$ является линейным многообразием, для доказательства левой части (1.2) достаточно показать существование ненулевой точки $\eta \in \Sigma_{n,m}(P_m)$.

Так как $P \notin \mathbb{I}_n$, существуют последовательность $\{\xi^s\}$ и постоянная $a_1 > 0$ такие, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$|P(\xi^s)| \le a_1 \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.3}$$

Векторы $\eta^s := \xi^s/|\xi^s|$ $(s = 1, 2, \dots)$ являются единичными ($|\eta^s| = 1$), поэтому множество $\{\eta^s\}$ имеет точку сгущения $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| = 1$, и, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$. Легко видеть, что $\eta \in \Sigma_n(P_m)$. Покажем, что $\eta \in \Sigma_{n,m}(P_m)$.

Поскольку $D^\alpha(P - P_m)(\xi) = \mathrm{const} =: C_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = m - 1$, то ввиду почти гипоэллиптичности многочлена P имеем

$$\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P_m(\xi)| = \sum_{|\alpha|=m-1} |[D^\alpha P_m(\xi) + C_\alpha] - C_\alpha|$$
$$= \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P(\xi) - C_\alpha| \le \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P(\xi)| + a_2 \le a_3[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $a_2 = \sum\limits_{|\alpha|=m-1} |C_\alpha|$, $a_3 = a_3(P, a_2) > 0$.

Отсюда и из (1.3) следует, что

$$\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P_m(\xi^s)| \le a_3(a_1 + 1) \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.4}$$

Так как $|\xi^s| \to \infty$, $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$ и для $|\alpha| = m - 1$ многочлен $D^\alpha P_m$ является линейной однородной функцией, из (1.4) следует, что $D^\alpha P_m(\eta) = 0$ для $|\alpha| = m - 1$.

Поскольку для однородного (порядка m) многочлена $R(\xi)$ в силу леммы Эйлера для любого $r \in \mathbb{N}$, $0 < r \le m$

$$R_m(\xi) = \frac{(m-r)!}{m!} (\xi_1 D_1 + \dots + \xi_n D_n)^r R_m(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $|\beta| \le m-1$, с некоторой постоянной $c > 0$ имеем (напомним, что через P_m обозначается главная m-однородная часть исследуемого многочлена P)

$$D^\beta P_m(\eta) = \frac{1}{(m-|\beta|)!}|(\eta_1 D_1 + \dots + \eta_n D_n)^{m-|\beta|-1} D^\beta P_m(\eta)| \\ \le c \sum_{|\alpha|=m-1} |(D^\alpha P_m)(\eta)| = 0,$$

т. е. $\eta \in \Sigma_{n,m}(P_m)$, что доказывает левую часть (1.2). □

Замечание 1.2. Требование почти гипоэллиптичности в доказанной лемме существенно. В самом деле, для 2-однородного не почти гипоэллиптического многочлена $P(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 \notin \mathbb{I}_2$ будет $\Sigma_{2,2}(P) = \{0\}$, поэтому $\sigma_{2,2}(P) = 0$.

Далее будем пользоваться также следующими тремя утверждениями, в которых исследуемые многочлены могут и не быть почти гипоэллиптическими и которые, на наш взгляд, представляют определенный интерес.

Лемма 1.3. *Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — многочлен степени m, T — невырожденная $(n \times n)$-матрица, $\eta := T\xi$ и $Q(\eta) := P(T^{-1}\eta)$. Тогда*

1) $\operatorname{ord} Q = m$, *при этом если многочлены P и Q представлены в виде* (1.1), *то $Q_j(\eta) = P_j(T^{-1}\eta)$ $(j = 0, 1, \dots, m)$,*

2) *если P — однородный многочлен степени m, то таковым является и многочлен Q,*

3) $T^{-1} : \Sigma_{n,m}(P_m) \to \Sigma_{n,m}(Q_m)$.

Доказательство. Сначала докажем утверждение п. 2. Для любых $t > 0$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$Q(t\eta) = P(T^{-1}(t\eta)) = t^m P(T^{-1}\eta) = t^m Q(\eta),$$

что доказывает п. 2.

Для доказательства п. 1 представим многочлены P и Q в виде суммы однородных многочленов. По линейности преобразования T и по уже доказанной части леммы имеем $Q_j(\eta) = P_j(T^{-1}\eta) = P_j(\xi)$ $(j = 0, 1, \dots, m)$ и $\operatorname{ord} Q = \max_{0 \le j \le m} \{\operatorname{ord} Q_j\} = \operatorname{ord} P_m = m$, что доказывает п. 1.

Так как очевидно, что $T\tau \in \Sigma_n(Q_m)$ при $\tau \in \Sigma_n(P_m)$ и

$$\Sigma_{n,m}(P_m) = \bigcap_{|\alpha| \le m-1} \Sigma_n(D^\alpha P_m),$$

то $T^{-1}(\Sigma_{n,m}(P_m)) = \Sigma_{n,m}(Q_m)$, что доказывает п. 3. □

Лемма 1.4. *Пусть многочлен P неустойчив относительно линейного невырожденного преобразования $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $Q < P$. Тогда Q неустойчив относительно T.*

Доказательство. Ввиду неустойчивости P существует число $k \in \mathbb{N}$, $k \le n-1$, такое, что (при необходимости после перенумеровки переменных) $p(\eta) := P(T^{-1}\eta) = p(\eta_1, \dots, \eta_k)$. Так как $Q < P$, существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta = T\xi$

$$|q(\eta)| := |Q(T^{-1}\eta)| = |Q(\xi)| \le c[|P(\xi)| + 1] \\ = c[|P(T^{-1}\eta)| + 1] = c[|p(\eta_1, \dots, \eta_k)| + 1].$$

Это показывает, что многочлен q зависит только от переменных $\eta_1, \dots, \eta_k$, т. е. многочлен Q неустойчив относительно преобразования T. □

Лемма 1.5. *Многочлен $P \in \mathbb{I}_n$ устойчив относительно любого линейного обратимого отображения $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть, напротив, существует многочлен $P \in \mathbb{I}_n$, неустойчивый относительного некоторой невырожденной $(n\times n)$-матрицы $T = \left(t_i^j\right)_{i,j=1}^n$, и $\eta = T\xi$. Тогда $p(\eta) := P(T^{-1}\eta)$ является многочленом $k \le n-1$ переменных $\eta_1, \dots, \eta_k$.

Так как $k < n$, система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} t_i^j \xi_j = 0 \quad (i = 1, \dots, k) \tag{1.5}$$

имеет ненулевое решение $\tau \in \mathbb{R}^n$ и из однородности системы (1.5) следует, что $\xi^s = s\tau$ будет решением этой системы для любого $s \in \mathbb{N}$, при этом $P(\xi^s) = p(\eta^s) = \mathrm{const}$ $(s = 1, 2, \dots)$. Так как $|\xi^s| = s|\tau| \to \infty$ при $s \to \infty$, это противоречит условию $P \in \mathbb{I}_n$. $\square$

Лемма 1.6. *Пусть $R(\xi) = R(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — однородный многочлен степени $m \ge 1$. Для того чтобы существовала постоянная $c > 0$ такая, что справедливо неравенство*

$$|\xi| \le c \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha R(\xi)| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

необходимо и достаточно условие $\Sigma_{n,m}(R) = \{0\}$.

Доказательство. Если множество линейных однородных многочленов $\{D^\alpha R; |\alpha| = m-1\}$ не имеет общего ненулевого корня, то

$$r(\xi) := \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha R(\xi)|^2$$

является однородным многочленом второй степени, для которого с некоторой постоянной $c_1 > 0$ справедливо неравенство $|\xi|^2 \le c_1 r(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, откуда следует оценка (1.6).

Докажем обратное, пусть $0 \ne \tau \in \mathbb{R}^n$ — общий корень многочленов $\{D^\alpha R;$ $|\alpha| = m-1\}$. Тогда в силу леммы Эйлера с некоторой постоянной $c_2 > 0$ имеем для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $0 \le |\beta| \le m-1$

$$\begin{aligned} |(D^\beta R)(\eta)| &= \frac{1}{(m-|\beta|)!} |(\eta_1 D_1 + \dots + \eta_n D_n)^{m-|\beta|-1} D^\beta R(\eta)| \\ &\le c_2 \sum_{|\alpha|=m-1} |(D^\alpha R)(\eta)| = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\tau \in \Sigma_{n,m}(R)$. Это противоречит условию леммы и доказывает лемму. $\square$

Лемма 1.7. *Пусть $n \ge 2$, $1 \le k < n$, $\xi' := (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' := (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$, $\xi = (\xi', \xi'')$ и $P(\xi)$ — почти гипоэллиптический многочлен степени m, представленный в виде суммы однородных многочленов:*

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{1.1$'$}$$

при этом многочлен P_m *зависит только от переменных* ξ', *т. е.* $P_m(\xi) = P_m(\xi', 0'')$ *и* $\Sigma_{k,m}(P_m) = \{0\}$. *Тогда* $P \in \mathbb{I}_n$ *в том и только в том случае, когда* $P(0', \xi'') \in \mathbb{I}_{n-k}$.

Доказательство. В силу условия леммы многочлен P можно представить в виде

$$P(\xi) = P_m(\xi', 0'') + \sum_{\alpha' \in \mathbb{N}_0^k} (\xi')^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''), \tag{1.7}$$

где $|\alpha'| + \operatorname{ord} q_{\alpha'} \le m - 1 \ \forall \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ и $q_{0'}(\xi'') = P(0', \xi'')$.

Если $P \in \mathbb{I}_n$, то, очевидно, $P(0', \xi'') \in \mathbb{I}_{n-k}$. Покажем, что если $P(0', \xi'') \in \mathbb{I}_{n-k}$, то в условиях леммы $P \in \mathbb{I}_n$. Предположим обратное: пусть при $P(0', \xi'') \in \mathbb{I}_{n-k}$ существуют последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$, и число $c_1 > 0$, для которых

$$|P(\xi^s)| \le c_1 \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.8}$$

Отсюда в силу почти гипоэллиптичности P, условия $\Sigma_{k,m}(P_m) = \{0\}$ леммы и на основании леммы 1.6 с некоторой постоянной $c_2 > 0$ имеем

$$|(\xi')^s| \le c_2 \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.9}$$

Покажем, что в условиях леммы из (1.8), (1.9) следует существование постоянной $c_3 > 0$ такой, что для всех $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$, $1 \le |\alpha'| \le m - 1$,

$$|q_{\alpha'}((\xi'')^s)| \le c_3 \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.10}$$

Докажем оценку методом математической индукции по убыванию $|\alpha'|$. Для $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$, $|\alpha'| = m - 1$ оценка (1.10) непосредственно следует из представления (1.7), так как в этом случае $\operatorname{ord} q_{\alpha'} = 0$. Пусть оценка (1.10) верна для всех $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$, $2 \le r \le |\alpha'| \le m - 1$. Докажем ее для $\{\alpha'\} : |\alpha'| = r - 1$.

Из условия почти гипоэллиптичности P с некоторой постоянной $c_4 > 0$ для любого $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$, $|\alpha'| = r - 1$, имеем (см. представление (1.7))

$$|D^{\alpha'} P(\xi)| = \Big| D^{\alpha'} P_m(\xi', 0'') + \sum_{\beta' \ge \alpha', \beta' \ne \alpha'} \frac{\beta'!}{(\beta' - \alpha')!} (\xi')^{\beta' - \alpha'} q_{\beta'}(\xi'') \\ + (\alpha'!) q_{\alpha'}(\xi'') \Big| \le c_4 [|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда по предположению индукции и на основании (1.8), (1.9) имеем с некоторыми положительными постоянными c_5 и c_6 для всех $s = 1, 2, \dots$

$$|q_{\alpha'}((\xi'')^s)| \le c_5 [|P(\xi^s)| + |D^{\alpha'} P_m((\xi')^s, 0'')| \\ + \sum_{\beta' \ge \alpha', \beta' \ne \alpha'} \frac{\beta'!}{(\beta' - \alpha')!} |((\xi')^s)^{\beta' - \alpha'}| |q_{\beta'}((\xi'')^s)| + 1] \le c_6,$$

что по индукции доказывает оценку (1.10).

Из оценок (1.8)–(1.10) имеем с некоторой постоянной $c_7 > 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$

$$|q_{0'}((\xi'')^s)| = \Big| P(\xi^s) - P_m((\xi')^s, 0'') - \sum_{|\alpha'| \ge 1} ((\xi')^s)^{\alpha'} q_{\alpha'}((\xi'')^s) \Big| \le c_7.$$

Так как $P(0', \xi'') = q_{0'}(\xi'')$, полученное неравенство противоречит предположению $P(0', \xi'') \in \mathbb{I}_{n-k}$ и доказывает лемму. $\square$

Из доказанной леммы непосредственно получаем

Следствие 1.1. *Пусть выполняются все условия леммы* 1.7, *кроме условия* $P \in \mathbb{I}_n$. *Тогда* $P(0', \xi'') \notin \mathbb{I}_{n-k}$.

Будем пользоваться также следующим очевидным утверждением.

Лемма 1.8. *Пусть вектор* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *представлен в виде* $\xi = (\xi', \xi'')$, *где* $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$, $1 \le k < n$, *и многочлен* $P(\xi)$ *почти гипоэллиптичен. Тогда* $P(\xi', \xi'')$ *как многочлен от* ξ' *для любого фиксированного* ξ'' *почти гипоэллиптичен.*

Лемма 1.9. *Пусть почти гипоэллиптический многочлен* $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *по существу зависящий от всех переменных* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (*см. определение* 1.1), *устойчив относительно любого линейного невырожденного преобразования* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Тогда* $P \in \mathbb{I}_n$.

Доказательство будем вести по индукции по n. Пусть $n = 2$ и, напротив, существует почти гипоэллиптический многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$, устойчивый относительно любого линейного невырожденного преобразования, такой, что $P \notin \mathbb{I}_2$, т. е. существуют последовательность $\{\xi^s\} \subset R^2$ и число $c > 0$ такие, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$|P(\xi^s)| \le c \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{1.11}$$

Представим многочлен P в виде (1.1) и покажем, что P неустойчив относительно некоторого линейного обратимого отображения $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Применяя лемму 1.2, из (1.11) получаем, что $\sigma_{2,m}(P_m) = 1$, т. е. $\Sigma_{2,m}(P_m) \setminus \{0\} \ne \varnothing$. Так как $\Sigma_{2,m}(P_m)$ — линейное пространство, существует точка $\tau \in \Sigma_{2,m}(P_m)$, $|\tau| = 1$. Тогда либо $\tau = (1, 0)$, либо $\tau = (0, 1)$, либо $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1, \tau_2 \ne 0$. Так как случаи $\tau = (1, 0)$ и $\tau = (0, 1)$ рассматриваются аналогично, будем рассматривать только случаи 1) $\tau = (1, 0)$, 2) $\tau_1 \tau_2 \ne 0$. В случае 1 $P_m(\xi_1, \xi_2) = \gamma_{(0,m)} \xi_2^m$, где $\gamma_{(0,m)} \ne 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $\gamma_{(0,m)} = 1$. Тогда многочлен P можно представить в виде

$$P(\xi) = \xi_2^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_2^j q_j(\xi_1), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{1.12}$$

где $j + \operatorname{ord} q_j \le m - 1$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$.

Из условия $P \notin \mathbb{I}_2$ и следствия 1.1 имеем $q_0(\xi_1) = P(\xi_1, 0) \notin \mathbb{I}_1$. Так как q_0 — многочлен от одной переменной, отсюда получаем, что $\operatorname{ord} q_0 = 0$, т. е. $q_0(\xi_1) \equiv \mathrm{const} =: c_0$. Тогда для любого $j : 1 \le j \le m - 1$ в силу условия леммы имеем с некоторой постоянной $\kappa_1 > 0$

$$|q_j(\xi_1)| = \frac{1}{j!} \big| \big(D_2^j P\big)(\xi_1, 0) \big| \le \kappa_1 [|P(\xi_1, 0)| + 1] = \kappa_1 [|q_0(\xi_1) + 1|]$$
$$\le \kappa_1 (|c_0 + 1) \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R}^1.$$

Следовательно, $q_j(\xi_1) \equiv \mathrm{const} =: c_j$, $j = 1, \ldots, m-1$. Тогда из (1.12) следует равенство

$$P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \xi_2^j, \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Это противоречит условию леммы, так как P не зависит от переменной ξ_1.

Рассмотрим случай 2. В этом случае в силу леммы 1.2 многочлен P_m представляется в виде

$$P_m(\xi) = \gamma (\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^m, \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где $\gamma \neq 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $\gamma = 1$.

Совершим следующую замену переменных: $\eta_1 = \tau_2\xi_1 - \tau_1\xi_2$, $\eta_2 = \tau_1\xi_1 + \tau_2\xi_2$. Очевидно, матрица T этого преобразования невырожденная. Обозначив $Q(\eta) := P(T^{-1}\eta)$, получим

$$Q(\eta) = P(\tau_2\eta_1 + \tau_1\eta_2,\, -\tau_1\eta_1 + \tau_2\eta_2) = \eta_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} Q_j(\eta_1, \eta_2), \tag{1.13}$$

где Q_j — однородный многочлен степени $j : j = 0, 1, \ldots, m-1$.

Так как матрица T обратима, по лемме 1.1 многочлен Q почти гипоэллиптичен, при этом, так как по предположению $P \notin \mathbb{I}_2$, имеем $Q \notin \mathbb{I}_2$.

Проводя аналогичные рассуждения, как и в случае 1, получим

$$Q(\eta) = \eta_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \eta_1^j, \quad \eta \in \mathbb{R}^2,$$

т. е. многочлен P неустойчив относительно линейного обратимого отображения $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы при $n = 2$.

Пусть утверждение леммы верно при $n \leq r - 1$ ($r \geq 3$), докажем его для $n = r$. Предполагая обратное, т. е. что существуют последовательность $\{\xi^s\}$: $|\xi^s| \to \infty$, $s \to \infty$, и число $c > 0$ такие, что выполняется соотношение (1.11).

Из (1.11) в силу леммы 1.2 имеем $1 \leq \sigma_{r,m}(P_m) =: l \leq r - 1$. Пусть $\tau^1, \ldots, \tau^l$ — базис в $\sigma_{r,m}(P_m)$ и $\tau^1, \ldots, \tau^l, \tau^{l+1}, \ldots \tau^r$ — базис в R^r. Обозначим $\Im := \left(\tau_i^j\right)_{i,j=1}^r$. Очевидно, $\Im$ — невырожденная матрица. Пусть $\eta := \Im^{-1}\xi$, $\xi \in R^r$. Тогда в силу леммы 1.1 многочлен $Q(\eta) := P(\Im\eta)$ почти гипоэллиптичен. Представим Q в виде (1.1) суммы однородных многочленов

$$Q(\eta) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(\eta), \quad \eta \in R^r.$$

Из определения матрицы $\Im$ следует, что $e^j := \Im^{-1}\tau^j$, $j = 1, \ldots, r$, является базисом в $\mathbb{R}^n$, при этом в силу определения матрицы $\Im$ имеем $e_i^j = \delta_i^j$ ($i, j = 1, \ldots, r$), где $\{\delta_i^j\}$ — символ Кронекера.

Так как $Q_m(\eta) = P_m(\Im\eta)$ (см. лемму 1.3), то $Q_m(e^j) = P_m(\Im e^j) = P_m(\tau^j) = 0$ при $j = 1, \ldots, l$. Покажем, что $Q_m(\eta) = Q_m(0, \ldots, 0, \eta_{l+1}, \ldots, \eta_r)$ для $\eta \in R^r$. Сначала покажем, что $Q_m(\eta) = Q_m(0, \eta_2, \ldots, \eta_r)$ для $\eta \in R^r$.

Представим многочлен Q_m в виде

$$Q_m(\eta) = \sum_{j=0}^{m} \eta_1^{m-j} q_{j,m}(\eta_2, \ldots, \eta_r), \quad \eta \in R^r, \tag{1.14}$$

где $q_{j,m}$ — однородный многочлен степени j ($j = 0, 1, \ldots, m$), и покажем по индукции, что $q_{j,m}(\eta_2, \ldots, \eta_r) \equiv 0$ ($j = 0, 1, \ldots, m-1$).

Так как $q_{0,m}$ — однородный многочлен степени 0, то

$$q_{0,m}(\eta_2, \ldots, \eta_r) \equiv \mathrm{const} =: c_0 = q_{0,m}(0, \ldots, 0) \quad \forall(\eta_2, \ldots, \eta_r) \in \mathbb{R}^{r-1}. \tag{1.15}$$

Из условия $\tau^1 \in \Sigma_{r,m}(P_m)$, применяя лемму 1.3, получим, что $e^1 \in \Sigma_{r,m}(Q_m)$. Отсюда, из представления (1.14), соотношения (1.15) и того факта, что однородный многочлен положительной степени в точке 0 принимает нулевое значение, имеем

$$0 = Q_m(e^1) = \sum_{j=0}^{m} 1^{m-j} q_{j,m}(0,\dots,0) = q_{0,m}(0,\dots,0) = c_0 = q_{0,m}(\eta_2,\dots,\eta_r),$$

т. е. $q_{0,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) \equiv 0$.

Пусть $q_{j,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) \equiv 0$ при $j \le k-1$ $(k \ge 1)$. Докажем, что

$$q_{k,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) \equiv 0.$$

По предположению индукции многочлен Q_m представляется в виде

$$Q_m(\eta) = \sum_{j=k}^{m} \eta_1^{m-j} q_{j,m}(\eta_2,\dots,\eta_r), \quad \eta \in \mathbb{R}^r. \tag{1.16}$$

Пусть

$$q_{k,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) = \sum_{\alpha_2+\dots+\alpha_r=k} \delta_{(\alpha_2,\dots,\alpha_r)} \eta_2^{\alpha_2} \dots \eta_r^{\alpha_r} \tag{1.17}$$

— однородный многочлен степени k. Так как $e^1 \in \Sigma_{r,m}(Q_m)$ и $k < m$, то, пользуясь соотношениями (1.16), (1.17), для любого $\beta = (\beta_2,\dots,\beta_r) \in \mathbb{N}_0^{r-1}$, $|\beta| = k$, имеем

$$0 = (D^\beta Q_m)(e^1) = \sum_{j=k}^{m} 1^{m-j} (D^\beta q_{j,m})(0,\dots,0) = (D^\beta q_{k,m})(0,\dots,0) = \beta! \delta_{(\beta_2,\dots,\beta_r)},$$

т. е. $\delta_{(\beta_2,\dots,\beta_r)} = 0$ для всех $(\beta_2,\dots,\beta_r) \in N_0^{r-1}$, $\beta_2 + \dots + \beta_r = k$, откуда и из (1.17) следует, что $q_{k,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) \equiv 0$. Тогда в силу индукции получим, что $Q_m(\eta) = q_{m,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) = Q_m(0,\eta_2,\dots,\eta_r)$ $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$.

Рассуждая аналогично и учитывая, что $e^j \in \Sigma_{r,m}(Q_m)$ $(j = 1,\dots,l)$, получим $Q_m(\eta) \equiv Q_m(0,\dots,0,\eta_{l+1},\dots,\eta_r)$.

Обозначим $\eta' := (\eta_1,\dots,\eta_l)$ и $\eta'' := (\eta_{l+1},\dots,\eta_r)$. Тогда многочлен Q в силу уже доказанного можно представить в виде

$$\begin{aligned} Q(\eta) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(\eta) = Q_m(0',\eta'') + \sum_{j=0}^{m-1} Q_j(\eta) \\ = Q_m(0',\eta'') + \sum_{\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}} (\eta'')^{\alpha''} q_{\alpha''}(\eta'), \end{aligned} \tag{1.18}$$

где $|\alpha''| + \operatorname{ord} q_{\alpha''} \le m-1$ для всех $\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}$ При этом в силу леммы 1.3 $\Sigma_{r-l,m}(Q_m) = \{0\}$, так как $\tau^1,\dots,\tau^l$ является базисом пространства $\Sigma_{r,m}(P_m)$. Применяя следствие 1.1, получим, что $q_{0''}(\eta') = Q(\eta',0'') \notin \mathbb{I}_l$. Учитывая, что многочлен одной переменной степени больше нуля принадлежит $\mathbb{I}_1$, отсюда получаем, что либо 1) $l = 1$, $q_0(\eta') = \mathrm{const} =: c_{0''}$, $\eta' \in \mathbb{R}^1$, либо 2) $2 \le l \le r-1$.

Так как Q почти гипоэллиптичен, то в случае 1 с некоторой постоянной $\kappa_2 > 0$ при всех $\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-1}$ имеем

$$\begin{aligned} |q_{\alpha''}(\eta')| = \frac{1}{\alpha''!} |(D^{\alpha''} Q)(\eta',0'')| \le \kappa_2 [|Q(\eta',0'')| + 1] \\ = \kappa_2 [|q_{0''}(\eta')| + 1] = \kappa_2 [|c_{0''}| + 1] \quad \forall \eta' \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что $q_{\alpha''}(\eta') \equiv \mathrm{const} =: c_{\alpha''}$ для всех $\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-1}$. Тогда из (1.18) получаем, что

$$Q(\eta) = Q_m(\eta'') + \sum_{\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-1}} c_{\alpha''}(\eta'')^{\alpha''} = Q(0', \eta'') \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^r,$$

т. е. многочлен P неустойчив относительно некоторого линейного обратимого отображения.

Рассмотрим случай 2 ($l \geq 2$). Так как многочлен P почти гипоэллиптичен, в силу леммы 1.8 многочлен $q_{0''}(\eta')$ также почти гипоэллиптичен. Более того, так как $\Sigma_{r-l,m}(Q_m) = \{0\}$ и $Q \notin \mathbb{I}_r$, то ввиду следствия 1.1 $q_{0''} \notin \mathbb{I}_l$.

С другой стороны, так как $l < r$, то в силу индукции по n существуют число $l_1 \in \mathbb{N} : l_1 \leq l - 1$ и линейное обратимое отображение $V : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ такие, что многочлен $q_{0''}(V^{-1}z')$ зависит только от переменных $z_1, \dots, z_{l_1}$, т. е. при $\eta' \in \mathbb{R}^l$ и $z' = V\eta'$

$$q_{0''}(\eta') = q_{0''}(V^{-1}z') =: q_{0''}^V(z_1, \dots, z_{l_1}).$$

Следовательно, многочлен $q_{0''}$ неустойчив относительно линейного обратимого отображения $V : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$.

В силу почти гипоэллиптичности многочлена Q существует постоянная $\kappa_3 > 0$ такая, что для всех $\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}$

$$|q_{\alpha''}(\eta')| = \frac{1}{\alpha''!}|(D^{\alpha''}Q)(\eta', 0'')| \leq \kappa_3[|Q(\eta', 0'')| + 1] = \kappa_3[|q_{0''}(\eta')| + 1] \quad \forall \eta' \in \mathbb{R}^l.$$

Отсюда, применяя лемму 1.4, получим, что многочлены $\{q_{\alpha''}(\eta') : \alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}\}$ неустойчивы относительно линейного обратимого отображения $V : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$. Поэтому

$$q_{\alpha''}(\eta') = q_{\alpha''}(V^{-1}z') =: q_{\alpha''}^V(z_1, \dots, z_{l_1}) \quad \forall \alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l},\ \eta' \in \mathbb{R}^l,\ z' = V\eta'.$$

Имея это в виду, из (1.18) получаем

$$Q(\eta) = Q_m(0', \eta'') + \sum_{\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}} (\eta'')^{\alpha''} q_{\alpha''}(V^{-1}z') = Q_m(0', \eta'')$$
$$+ \sum_{\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}} (\eta'')^{\alpha''} q_{\alpha''}^V(z_1, \dots, z_{l_1}), \quad \eta = (\eta', \eta'') \in R^r,\ \eta' \in R^l,\ z' = V\eta'.$$

Отсюда следует, что многочлен Q и тем самым многочлен P неустойчивы. Полученное противоречие доказывает лемму 1.9. $\square$

Определение 1.3. Прямую, проходящую через начало координат, назовем *центральной прямой.* Центральную прямую $L \subset \mathbb{R}^n$ назовем *элементарной* для многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, если $P(\xi) = \mathrm{const}\ \forall \xi \in L$.

Теорема 1.1. *Для почти гипоэллиптического многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $P \in \mathbb{I}_n$;

(2) *P устойчив относительно любого линейного обратимого преобразования $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;*

(3) *P не имеет элементарной центральной прямой.*

Доказательство. Эквивалентность пп. (1), (2) непосредственно следует из лемм 1.5 и 1.9.

Если P принадлежит $\mathbb{I}_n$, то, очевидно, для него не существует центральной прямой, являющейся элементарной для P, т. е. из (1) следует (3).

Покажем, что из (3) следует (1). Предполагая противное и проводя аналогичные рассуждения, как при доказательстве леммы 1.9, получим существование линейного обратимого преобразования $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, относительно которого P неустойчив, т. е. многочлен $Q(\eta) := P(T^{-1}\eta)$ зависит только от переменных $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$. Следовательно, $Q(0, \dots, 0, \eta_n) = Q(0, \dots, 0, 0)$. Так как $L := \{T^{-1}(0, \dots, 0, \eta_n)\eta_n \in R^1\}$ является центральной прямой и $P(\xi) = Q(0, \dots, 0)$ $\forall \xi \in L$, то L является элементарной для P. Это противоречит нашему предположению и доказывает, что из (3) следует (1). Теорема 1.1 доказана. $\square$

2. Почти гипоэллиптичность невырожденных дифференциальных операторов (многочленов)

Определение 2.1 (см. [4] или [5]). Пусть $\mathscr{A} = \{\nu^1, \dots, \nu^N\}$ — конечный набор точек из $\mathbb{N}_0^n$. Наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки (мультииндексы) множества $\mathscr{A}$, обозначим через $\Re(\mathscr{A})$ и назовем *многогранником Ньютона множества* $\mathscr{A}$.

Многогранник $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ назовем *полным* (см. [4] или [13]), если $\Re$ имеет вершину в начале координат $\mathbb{R}^{n,+}$ и отличную от начала координат вершину на каждой оси координат. k-Мерные грани многогранника $\Re$ обозначим через $\Re_i^k$ $(i = 1, \dots, M_k',\ k = 0, 1, \dots, n-1)$. Грани многогранника Ньютона будем по определению считать замкнутыми множествами.

Единичный вектор λ называется *внешней нормалью* (или $\Re$-нормалью) грани Γ многогранника $\Re$, если 1) $(\lambda, \alpha) = (\lambda, \beta)$ для произвольных α и β из Γ, 2) $(\lambda, \alpha) > (\lambda, \beta)$ для произвольных $\alpha \in \Gamma$ и $\beta \in \Re \setminus \Gamma$.

Другими словами, $\Re$-нормаль k-мерной грани Γ многогранника $\Re$ $(0 \le k \le n-1)$ это единичная внешняя нормаль гиперплоскости, опорной к многограннику $\Re$, содержащей грань Γ и не содержащей какую-либо грань $\Re$, размерности больше чем k.

Таким образом, данный вектор λ может служить внешней нормалью одной и только одной грани многогранника $\Re$.

Обозначим через $\Lambda_i^k = \Lambda(\Re_i^k)$ множество внешних нормалей грани $\Re_i^k$ $(i = 1, \dots, M_k',\ k = 0, 1, \dots, n-1)$. Отметим, что множество Λ_i^k состоит из одного вектора (когда $k = n-1$) или является открытым множеством (когда $0 \le k < n-1$). Очевидно, что для каждого вектора $\lambda \in \Lambda_i^k$ $(1 \le i \le M_k',\ 0 \le k \le n-1)$ существует число $d_{i,k} = d_{i,k}(\lambda) \ge 0$ такое, что $(\lambda, \alpha) = d_{i,k}$ для всех $\alpha \in \Re_i^k$ и $(\lambda, \alpha) < d_{i,k}$ для любого $\alpha \in \Re \setminus \Re_i^k$. Более того, $\Re$-нормаль $(n-1)$-мерной (и только $(n-1)$-мерной) грани $\Re_i^{n-1}$ многогранника $\Re$ и число $d_{i,n-1}(\lambda)$ $(1 \le i \le M_{n-1}')$ определяются однозначно.

Для многогранника $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ обозначим через $\Re^0$ множество его вершин, через $\Lambda^{n-1}(\Re)$ — множество (внешних относительно $\Re$) единичных нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней и через $\partial\Re$ обозначим множество точек $\{\nu \in \Re\}$, для которых существует вектор $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$ такой, что $(\lambda, \nu) = d_\Re(\lambda)$, где $d_\Re(\lambda) := \max\limits_{\nu \in \Re}(\lambda, \nu)$.

Грань $\Re_i^k$ $(1 \le i \le M_k';\ 0 \le k \le n-1)$ многогранника $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется *главной* (см. [4]), если среди ее внешних нормалей существует нормаль, хотя бы одна координата которой положительна. Главная грань $\Re_i^k$ называется *правильной* (вполне правильной) если среди ее внешних нормалей существует нормаль с неотрицательными (положительными) координатами.

Полный многогранник $\Re$ назовем *правильным* (*вполне правильным*), если все его главные грани являются правильными (вполне правильными).

Пусть

$$P(D) = P(D_1, \ldots, D_n) = \sum_\beta \gamma_\beta D^\beta$$

— линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и

$$P(\xi) = \sum_\beta \gamma_\beta \xi^\beta$$

— его символ (характеристический многочлен), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) := \{\beta \in \mathbb{N}_0^n; \gamma_\beta \neq 0\}$. Многогранник Ньютона множества точек $\{(P) \cup (0)\}$ называют *многогранником Ньютона оператора* $P(D)$ (*многочлена* $P(\xi)$) и обозначают через $\Re(P)$.

Многочлен $R(\xi)$ назовем *обобщенно однородным*, если существуют вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и число $d = d(R, \lambda)$ такие, что

$$R(t^\lambda \xi) = R(t^{\lambda_1}\xi_1, \ldots, t^{\lambda_n}\xi_n) = t^d R(\xi)$$

для всех $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. В тех случаях, когда необходимо указать вектор λ и число d, такой многочлен назовем λ-*однородным* λ-*степени* d. Для обобщенно однородного (λ-однородного) многочлена $R(\xi)$ введем следующие обозначения:

$$\Sigma(R) := \{\eta \in \mathbb{R}^{n,0}, R(\eta) = 0\},$$

$$\Sigma(\lambda, R) := \{\eta \in \mathbb{R}^{n,0}, |\lambda, \eta| = 1, R(\eta) = 0\}, \quad \lambda > 0.$$

Многочлен

$$P^{i,k}(\xi) := \sum_{\alpha \in \Re_i^k(P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \quad (1 \leq i \leq M_k';\ 0 \leq k \leq n-1)$$

назовем *подмногочленом многочлена* $P(\xi)$, *отвечающим грани* $\Re_i^k(P)$ *многогранника* $\Re(P)$. В работе [4] доказано, что подмногочлен $P^{i,k}(\xi)$ является λ-однородным λ-степени $d_{i,k}(\lambda)$ для любого вектора $\lambda \in \Lambda_i^k$.

Очевидно, что для любого вектора $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$ существуют натуральное число $M = M(\lambda, \Re_i^k)$ и числа $d_j = d(\lambda, \Re_i^k)$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$ $(d_0 > d_1 > \cdots > d_M)$ такие, что многочлен P можно представить в виде суммы λ-однородных многочленов:

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^M P_j(\xi) = \sum_{j=0}^M P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^M \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \tag{2.0}$$

Определение 2.2 (см. [4]). Грань $\Re_i^k = \Re_i^k(P)$ $(1 \leq i \leq M_k';\ 0 \leq k \leq n-1)$ многогранника $\Re(P)$ называется *невырожденной*, если $\Sigma(P^{i,k}) = \varnothing$. Многочлен P называется *невырожденным*, если невырожденны все главные грани его многогранника Ньютона $\Re(P)$.

В. П. Михайловым доказано (см. [4]), что если многочлен $P(\xi)$ с полным многогранником Ньютона $\Re(P)$ невырожденный, то существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\sum_{\alpha \in \Re^0(P)} |\xi^\alpha| \leq c[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Докажем, что справедливо в определенном смысле обратное утверждение.

Лемма 2.1. *Если многочлен $P(\xi)$ с полным многогранником Ньютона $\Re(P)$ удовлетворяет соотношению* (2.1), *то P невырожденный.*

Доказательство. Пусть, напротив, некоторая главная грань $\Re_i^k$ ($1 \le i \le M'_k$; $0 < k \le n-1$) многогранника $\Re(P)$ вырожденная, т. е. существует точка $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ такая, что $P^{i,k}(\eta) = 0$. Докажем, что многочлен P не может удовлетворять соотношению (2.1) ни при какой постоянной c.

Пусть $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$,

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in (\Re_i^k)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

— подмногочлен многочлена P, отвечающий этой грани, $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ и $(\lambda, \alpha) = d_0$ — уравнение $(n-1)$-мерной опорной к $\Re(P)$ гиперплоскости, проходящей через грань $\Re_i^k$. При этом $(\lambda, \alpha) = d_0 = d_\Re(\lambda) > 0$, так как многогранник $\Re(P)$ полный.

Пользуясь представлением многочлена P в виде (2.0) по вектору λ, из условия $P^{i,k}(\eta) = 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$ при $\xi^s = s^\lambda \eta$ имеем

$$P(\xi^s) = P(s^\lambda \eta) = P^{i,k}(s^\lambda \eta) + \sum_{j=1}^{M} P_j(s^\lambda \eta)$$

$$= s^{d_0} P^{i,k}(\eta) + \sum_{j=1}^{M} s^{d_j} P_j(\eta) = \sum_{j=1}^{M} s^{d_j} P_j(\eta),$$

при этом $|(\xi^s)^\alpha| = s^{d_0} \left|\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}\right|$.

Так как $\left|\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}\right| \ne 0$ для точек $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ и $d_j < d_0$ для всех $j = 1, \dots, M$, то из этих двух соотношений получаем, что $|P(\xi^s)| = o(s^{d_0})$ при $s \to \infty$, в то время как $|(\xi^s)^\alpha|/s^{d_0} = \left|\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}\right| > 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$. Это показывает, что оценка (2.1) не имеет места. $\square$

Исходя из теоремы В. П. Михайлова и леммы 2.1, далее многочлен P назовем *невырожденным* также в том случае, когда для него справедливо соотношение (2.1).

Теорема 2.1. *Характеристический многогранник $\Re = \Re(P)$ гипоэллиптического* (*почти гипоэллиптического*) *многочлена $P(\xi)$ вполне правильный* (*правильный*).

Доказательство. Предположим противное, что многогранник $\Re(P)$ гипоэллиптического (почти гипоэллиптического) многочлена может не быть вполне правильным (правильным). Это означает, что существует вектор $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$ с хотя бы одной неположительной координатой (с хотя бы одной отрицательной координатой). Ради определенности в обоих случаях предположим, что это первая координата. Итак, пусть $\lambda_1 \le 0$ ($\lambda_1 < 0$).

Представим по вектору λ многочлен P в виде (2.0), и пусть точка $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ такая, что $D_1 P_0(\eta) \ne 0$. Существование такой точки следует из того, что $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$.

Рассмотрим поведение многочленов P и $D_1 P$ на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ ($s = 1, 2, \dots$). С некоторыми положительными постоянными c_1, c_2 для всех $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$|P(\xi^s)| \le \sum_{j=0}^{M(\lambda)} |P_j(\xi^s)| = \sum_{j=0}^{M(\lambda)} s^{d_j} |P_j(\eta)| \le c_1 s^{d_0}, \tag{2.2}$$

$$|D_1P(\xi^s)| \geq |D_1P_0(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{M(\lambda)} |D_1P_j(\xi^s)| = s^{d_0-\lambda_1}|D_1P_0(\eta)|$$

$$- \sum_{j=1}^{M(\lambda)} s^{d_j-\lambda_1}|D_1P_j(\eta)| \geq s^{d_0-\lambda_1}|D_1P_0(\eta)| - c_2 s^{d_1-\lambda_1}. \quad (2.3)$$

Так как $d_0 \geq 0$ (напомним, что $0 \in \Re^0(P)$), то при $\lambda_1 \leq 0$ в силу выбора точки η из оценок (2.2), (2.3) при $s \to \infty$ имеем $|D_1P(\xi^s)|/|P(\xi^s)| \not\to 0$. Это значит, что многочлен P не является гипоэллиптическим, что противоречит условию теоремы.

Если же $\lambda_1 < 0$ в случае почти гипоэллиптического многочлена, то из соотношений (2.2), (2.3) при $s \to \infty$ получим $|D_1P(\xi^s)|/[|P(\xi^s)| + 1] \to \infty$, что противоречит почти гипоэллиптичности многочлена P.

Теорема 2.1 доказана. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ — n-мерный многогранник с вершинами $\alpha^1, \ldots, \alpha^N$ и $\alpha \in \Re$, т. е.*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \alpha^j, \text{ где } \sigma_j \in [0,1] \ (j = 1, \ldots, N), \quad \sum_{j=1}^{N} \sigma_j = 1.$$

Тогда для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|\xi^\alpha| \leq h(\xi) := |\xi^{\alpha^1}| + \cdots + |\xi^{\alpha^N}|.$$

Более того, если $\alpha \in \Re \setminus \partial\Re$, то $|\xi^\alpha|/h(\xi) \to 0$ при $h(\xi) \to \infty$.

Доказательство. По неравенству Юнга имеем

$$|\xi^\alpha| = |\xi^{\sum_{j=1}^{N} \sigma_j \alpha^j}| = |\xi^{\alpha^1}|^{\sigma_1} \ldots |\xi^{\alpha^N}|^{\sigma_N} \leq \sum_{j=1}^{N} \sigma_j |\xi^{\alpha^j}| \leq \sum_{j=1}^{N} |\xi^{\alpha^j}|.$$

Для доказательства второй части леммы заметим, что если α — внутренняя точка $\Re$, то для некоторого $t > 1$ точка $t\alpha$ также является внутренней точкой $\Re$, следовательно, $|\xi^{t\alpha}| = |\xi^\alpha|^t \leq ch(\xi)$, т. е. $|\xi^\alpha| \leq c^{1/t}h(\xi)^{1/t}$. Поэтому

$$|\xi^\alpha|/h(\xi) \leq c^{1/t}h(\xi)^{(1/t)-1} \to 0 \text{ при } h(\xi) \to \infty. \quad \square$$

Как дополнение к доказанной лемме докажем еще одно утверждение, которым также будем пользоваться.

Теорема 2.2. *Невырожденный оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$)*

(1) *является гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда многогранник $\Re(P)$ вполне правильный,*

(2) *является почти гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда многогранник $\Re(P)$ правильный.*

Доказательство. Часть теоремы, относящаяся к необходимости, следует из теоремы 2.1. Докажем достаточность в п. (1).

Пусть P — невырожденный многочлен, $\Re = \Re(P)$ — вполне правильный многогранник. Докажем, что P гипоэллиптичен. Для этого достаточно доказать, что для любого мультииндекса $0 \neq \nu \in \mathbb{N}_0^n$

$$|D^\nu P(\xi)|/|P(\xi)| \to 0 \quad (2.4)$$

при $|\xi| \to \infty$.

Так как многогранник $\Re(P)$ вполне правильный, то из простых геометрических соображений следует, что $(D^\nu P) \subset \Re(P) \setminus \partial\Re(P)$ для любого ненулевого мультииндекса $\nu \in \mathbb{N}_0^n$.

С другой стороны, по лемме 2.2 для любого $\beta \in \Re(P) \setminus \partial\Re(P)$

$$|\xi^\beta| / \sum_{\alpha \in \Re^0} |\xi|^\alpha \to 0 \tag{2.5}$$

при $\sum\limits_{\alpha\in\Re^0} |\xi|^\alpha \to \infty$, поэтому соотношение (2.4) следует из (2.1) и (2.5).

Теперь докажем достаточность в п. (2). Так как $(D^\nu P) \subset \Re(P)$ для любого $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ в силу правильности многогранника $\Re(P)$, то по лемме 2.2 имеем с некоторой постоянной $c > 0$

$$|D^\nu P(\xi)| \le c \sum_{\alpha\in\Re^0} |\xi^\alpha| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда в силу условия теоремы из оценки (2.1) получаем почти гипоэллиптичность P. $\square$

В завершение настоящего пункта докажем еще несколько свойств почти гипоэллиптических многочленов. Сначала в качестве дополнения теоремы 2.2 докажем

Предложение 2.1. *Многогранник Ньютона $\Re(P)$ почти гипоэллиптического многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, по существу зависящего от всех переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, является полным.*

Доказательство. Пусть, напротив, почти гипоэллиптический многочлен $P(\xi)$ указанного типа не имеет вершины, например, на оси координат $0\xi_1$. Докажем, что такой многочлен не может быть почти гипоэллиптическим. Из этого предположения и в силу условий нашего предложения имеем, что если $\alpha_1^0 \ne 0$ для вершины α^0 многогранника $\Re(P)$, то $(\alpha_2^0)^2 + \dots + (\alpha_n^0)^2 \ne 0$. Обозначим $F := \{\beta \in (P),\ \beta_j = \alpha_j^0\ (j = 2, \dots, n)\}$. Так как $\alpha^0 \in F$, в силу вышесказанного $m_1 := \max\{\beta_1, \beta \in F\} > 0$. Следовательно, $(m_1, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0) \in (P)$ и поэтому

$$B := \gamma_{(m_1, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0)} \alpha_2^0!, \dots, \alpha_n^0! \ne 0. \tag{2.6}$$

Рассмотрим поведение многочленов P и $D_2^{\alpha_2^0} \dots D_n^{\alpha_n^0} P$ на последовательности $\xi^s := \{(s, 0, \dots, 0)\}$. Так как $\Re(P)$ не имеет вершины на оси $0\xi_1$, отличной от начала координат, то

$$P(\xi^s) = P(0, \dots, 0) \quad (s = 1, 2, \dots,). \tag{2.7}$$

Для $D_2^{\alpha_2^0} \dots D_n^{\alpha_n^0} P$ в силу (2.6) и определений множества F и числа m_1 при $s \to \infty$ имеем

$$\left|\left(D_2^{\alpha_2^0} \dots D_n^{\alpha_n^0}\right) P(\xi^s)\right| = \left|\sum_{\beta\in F} \gamma_\beta \prod_{j=2}^n (\alpha_j^0!) s^{\beta_1}\right| = |B| s^{m_1} [1 + o(1)]. \tag{2.8}$$

Так как $m_1 > 0$, соотношения (2.6)–(2.8) вместе доказывают, что многочлен P не является почти гипоэллиптическим. Предложение 2.1 доказано. $\square$

Предложение 2.2. *Пусть $\Re$ — многогранник Ньютона конечного набора точек из $\mathbb{R}^{n,+}$ и $\alpha \in \Re^0$, $\alpha_1 \neq 0$. Если $\alpha^1 := (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \notin \Re$, то существует вектор $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$, для которого $\lambda_1 < 0$.*

Доказательство. Так как

$$\Re = \{\nu \in \mathbb{R}^{n,+},\ (\lambda, \nu) \leq d_{\Re}(\lambda)\ \forall \lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)\},$$

из условия $\alpha^1 \notin \Re$ следует, что

$$(\lambda^0, \alpha^1) = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j^0 \alpha_j > d_{\Re}(\lambda^0)$$

для некоторого $\lambda^0 \in \Lambda^{n-1}(\Re)$. Из условия $\alpha \in \Re^0 (\subset \Re)$ имеем

$$\lambda_1^0 \alpha_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j^0 \alpha_j = (\lambda^0, \alpha) \leq d_{\Re}(\lambda^0).$$

Следовательно, $\lambda_1^0 < 0$, так как $\alpha_1 > 0$.

Предложение 2.3. *Пусть $\Re = \Re(P)$ — многогранник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена*

$$P(\xi) = \sum_{\beta \in (P)} \gamma_\beta \xi^\beta,$$

по существу зависящего от всех переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Re^0(P)$. Тогда для любого $j : 1 \leq j \leq n$

$$\alpha^j := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, 0, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n) \in \Re.$$

Доказательство. Предположим обратное, что $\alpha^{j_0} \notin \Re$ для некоторого $j_0 : 1 \leq j_0 \leq n$. За счет перенумеровки индексов можно считать, что $j_0 = 1$, т. е. $\alpha^1 = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \notin \Re$. Так как из $\alpha_1 = 0$ следует, что $\alpha^1 = \alpha \in \Re^0(P) \subset \Re(P)$, отсюда имеем $\alpha_1 > 0$. Тогда из условия $\alpha^1 \notin \Re$ и в силу предложения 2.2 существует вектор $\lambda^0 \in \Lambda^{n-1}(\Re)$, для которого $(\lambda^0, \alpha^1) > d_{\Re(P)}(\lambda^0)$ и $\lambda_1^0 < 0$.

Пусть Γ — $(n-1)$-мерная грань $\Re(P)$ с внешней нормалью λ^0. Представим многочлен P по вектору λ^0 в виде суммы λ^0-однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\lambda^0)} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\lambda^0)} \Big[\sum_{\beta \in (P), (\lambda^0, \beta) = d_j(\lambda^0)} \gamma_\beta \xi^\beta \Big], \tag{2.9}$$

где $d_0(\lambda^0) > \cdots > d_M(\lambda^0)$, $d_0(\lambda^0) = d_{\Re(P)}(\lambda^0)$ и

$$P_0(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\lambda^0)} \Big[\sum_{\beta \in (P), (\lambda^0, \beta) = d_0(\lambda^0)} \gamma_\beta \xi^\beta \Big] =: P_\Gamma(\xi).$$

Так как (см. предложение 2.1) многогранник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена полный, то $d_0(\lambda^0) > 0$. Рассмотрим поведение многочленов P и $D_1^{\alpha_1} P$ на последовательности $\xi^s := s^{\lambda^0} \eta$ $(s = 1, 2, \ldots)$, где точка $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ выбрана так, чтобы

$$B(\eta) := \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_1 \geq \alpha_1} \gamma_\beta \frac{\beta_1!}{(\beta_1 - \alpha_1)!} \eta_1^{\alpha_1 - \beta_1} \eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n} \neq 0. \tag{2.10}$$

Существование такой точки η следует из определений мультииндекса α и грани Γ, так как тогда $\alpha \in (P) \cap \Gamma$, следовательно, $\gamma_\alpha \neq 0$. Пользуясь представлением (2.9) многочлена P, с некоторой постоянной $c_1 > 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$|P(\xi^s)| \leq \sum_{j=0}^{M(\lambda^0)} |P_j(\xi^s)| = \sum_{j=0}^{M(\lambda^0)} s^{d_j(\lambda^0)} |P_j(\eta)| \leq c_1 s^{d_0(\lambda^0)}. \tag{2.11}$$

Для многочлена $D_1^{\alpha_1} P$, пользуясь представлением (2.7) и условием (2.10), при $s \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \big|(D_1^{\alpha_1} P)(\xi^s)| &\geq \big|(D_1^{\alpha_1} P_0)(\xi^s)\big| - \sum_{j=1}^{M(\lambda^0)} \big|(D_1^{\alpha_1} P_j)(\xi^s)\big| = |B(\xi^s)| \\ &- \sum_{j=1}^{M(\lambda^0)} \big|(D_1^{\alpha_1} P_j)(\xi^s)\big| = |B(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{M(\lambda^0)} s^{d_j(\lambda^0) - \lambda_1^0 \alpha_1} \big|(D_1^{\alpha_1} P_j)(\eta)\big| \\ &= s^{d_0(\lambda^0) - \lambda_1^0 \alpha_1} |B(\eta)| - c_2 s^{d_1(\lambda^0) - \lambda_1^0 \alpha_1} s^{d_0(\lambda^0) - \lambda_1^0 \alpha_1} |B(\eta)| [1 + o(1)]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Так как $\lambda_1 < 0$, $d_0(\lambda^0) > 0$ и $d_1(\lambda^0) < d_0(\lambda^0)$, то полученные оценки (2.11), (2.12) противоречат почти гипоэллиптичности многочлена P и доказывают предложение. $\square$

Для $\alpha \in N_0^n$ обозначим $\sqcap(\alpha) = \{\nu \in \mathbb{R}^{n,+}, \nu \leq \alpha\}$. Из предложения 2.3 непосредственно вытекает

Следствие 2.1. *Пусть $\Re(P)$ — многогранник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена $P(\xi)$, по существу зависящего от всех переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда*

(a) *$\sqcap(\alpha) \subset \Re(P)$ для любого $\alpha \in \Re^0(P)$;*

(b) *$\lambda \geq 0$ для любого $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re(P))$;*

(c) *если Γ — некоординатная грань $\Re(P)$, то $\lambda \geq 0$, $d_{\Re(P)}(\lambda) > 0$ $\forall \lambda \in \Lambda(\Gamma)$.*

Теорема 2.3. *Если все вполне правильные и главные координатные грани многогранника Ньютона $\Re(P)$ почти гипоэллиптического многочлена P, по существу зависящего от всех переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, невырожденны, то P невырожденный.*

Доказательство. Предположим обратное, что многочлен P вырожденный. Тогда по условиям теоремы вырожденная грань может быть некоординатной и не вполне правильной главной гранью $\Re(P)$.

Через Γ обозначим одну из таких граней минимальной размерности, т. е. множество $\Sigma(P_\Gamma)$ непусто. Так как Γ — некоординатная главная грань $\Re(P)$, то в силу следствия 2.1 существуют вектор $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и номер $k \in N$ $(k < n)$ такие, что (за счет перенумеровки индексов) $\lambda_j = 0$ $(j = 1, \dots, k)$ и $\lambda_j > 0$ $(j = k+1, \dots, n)$. Сначала рассмотрим случай, когда $k = 1$, т. е. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_j > 0$ $(j = 2, \dots, n)$.

Так как Γ — некоординатная грань, то $m_1 := \max\{\beta_1, \beta \in (P) \cap \Gamma\} > 0$.

Обозначим $\Gamma_1 := \{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_1 = m_1\}$ и покажем, что в условиях теоремы $\Gamma_1 \neq \Gamma$. Пусть, напротив, $\Gamma_1 = \Gamma$. Тогда $\lambda \in \Lambda(\Gamma_1)$. Так как $\lambda_1 = 0$, то

$$(\lambda, \beta) = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \beta_j = d_{\Re(P)}(\lambda)$$

при всех $\beta \in (P) \cap \Gamma_1$. В силу конечности множества $(P) \setminus \Gamma$ из условия $\lambda \in \Lambda(\Gamma_1)$ имеем

$$\rho(\lambda) := \max_{\beta \in (P) \setminus \Gamma} (\lambda, \beta) < d_{\Re(P)}(\lambda).$$

Отсюда получаем, что $t_0 := [d_{\Re(P)}(\lambda) - \rho(\lambda)]/[2 \max\{\beta_1, \beta \in (P)\}] > 0$.

Рассмотрим вектор $\mu(t_0) := (t_0, \lambda_2, \dots, \lambda_n) > 0$. Так как $\Gamma = \Gamma_1$, то для любого $\beta \in (P) \cap \Gamma$

$$(\mu(t_0), \beta) = t_0 m_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \beta_j = t_0 m_1 + d_{\Re(P)}(\lambda).$$

С другой стороны, в силу определения числа t_0 для любого $\beta \in (P) \setminus \Gamma$ имеем

$$(\mu(t_0), \beta)) = t_0 m_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \beta_j \le t_0 \beta_1 + \rho(\lambda) \le t_0 \max_{\beta \in (P)} \beta_1 + \rho(\lambda) <$$
$$< 2t_0 \max_{\beta \in (P)} \beta_1 + \rho(\lambda) = d_{\Re(P)}(\lambda) < d_{\Re(P)}(\lambda) + t_0 m_1.$$

Отсюда следует, что $\lambda(t_0) := \mu(t_0)/|\mu(t_0)| \in \Lambda(\Gamma)$. Так как $\mu(t_0) > 0$, то грань является вполне правильной, что противоречит выбору грани Γ и доказывает, что $\Gamma_1 \subset \Gamma$, но $\Gamma_1 \ne \Gamma$. Отсюда в силу условий теоремы и выбора грани Γ (минимальной размерности) следует, что грань Γ_1 невырожденная. Следовательно,

$$0 \ne P_{\Gamma_1}(\eta) = \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_1 = m_1} \gamma_\beta \eta^\beta = \eta_1^{m_1} \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma_1} \gamma_\beta \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n} =: \eta_1^{m_1} B(\eta). \quad (2.13)$$

Рассмотрим поведение многочленов P и $D_1^{m_1} P$ на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ $(s = 1, 2, \dots)$. Поступая, как при доказательстве предложения 2.3 (см. представление (2.9)), и учитывая, что $\eta \in \Sigma(P_\Gamma) = \Sigma(P_0)$, имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$|P(\xi^s)| \le \sum_{j=0}^{M(\lambda)} |P_j(\xi^s)| = \sum_{j=0}^{M(\lambda)} s^{d_j(\lambda)} |P_j(\eta)| \le c_1 s^{d_1(\lambda)}.$$

Учитывая, что $B(\eta) \ne 0$, $\lambda_1 = 0$, в силу определения множества Γ_1 для многочлена $D_1^{m_1} P$ имеем при $s \to \infty$

$$\left|D_1^{m_1} P(\xi^s)\right| \ge \left|D_1^{m_1} P_0(\xi^s)\right| - \sum_{j=1}^{M(\lambda)} \left|D_1^{m_1} P_j(\xi^s)\right|$$
$$= \left|D_1^{m_1} P_0(\xi^s)\right| - \sum_{j=1}^{M(\lambda)} s^{d_j(\lambda)} \left|D_1^{m_1} P_j(\eta)\right|$$
$$= \left|D_1^{m_1} P_{\Gamma_1}(\xi^s)\right| - \sum_{j=1}^{M(\lambda)} s^{d_j(\lambda)} \left|D_1^{m_1} P_j(\eta)\right|$$
$$= s^{d_0(\lambda)} (m_1!) |B(\eta)| - \sum_{j=1}^{M(\lambda)} s^{d_j(\lambda)} \left|D_1^{m_1} P_j(\eta)\right| = s^{d_0(\lambda)} (m_1!) |B(\eta)| [1 + o(1)].$$

Так как $d_0(\lambda) > 0$ (см. следствие 2.1), полученные соотношения противоречат почти гипоэллиптичности многочлена P.

Пусть $k = 2$, $m_1 := \max\{\beta_1, \beta \in (P) \cap \Gamma\}$ и $\Gamma_1 := \{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_1 = m_1\}$.

Рассмотрим следующие возможные случаи: (а) $\Gamma_1 = \Gamma$, (б) $\Gamma_1 \subset \Gamma$.

В случае (а) обозначим

$$m_2 := \max\{\beta_2, \beta \in (P) \cap \Gamma_1\} = \max\{\beta_2, \beta \in (P) \cap \Gamma\}.$$

Аналогично тому, как это сделано в случае $k = 1$, можно доказать, что если

$$\Gamma = \Gamma_2 := \{\beta \in (P) \cap \Gamma_1, \beta_2 = m_2\} = \{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_2 = m_2\},$$

то грань Γ является вполне правильной, что противоречит выбору этой грани. Если $\Gamma_2 \subset \Gamma = \Gamma_1$, то из определения грани Γ (минимальность) в силу условия теоремы получаем, что грань Γ_2 невырожденная. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 \neq P_{\Gamma_2}(\eta) &= \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_2 = m_2} \gamma_\beta \eta^\beta = \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma_1, \beta_2 = m_2} \gamma_\beta \eta^\beta \\ &= \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma_2} \gamma_\beta \eta^\beta = \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma_2} \gamma_\beta \eta_3^{\beta_3} \dots \eta_n^{\beta_n} =: \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} B(\eta). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Проводя аналогичные рассуждения, как при $k = 1$ и $\Gamma_1 \subset \Gamma$ на последовательности $\xi^s := s^\lambda \eta$ $(s = 1, 2, \dots)$, в силу (2.14) получим, что многочлен P не является почти гипоэллиптическим.

Рассмотрим случай (б) $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Из определения грани Γ (минимальность) в силу условий теоремы получаем, что грань Γ_1 невырожденная. Проводя аналогичные рассуждения, как при $k = 1$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$, $\Gamma_1 \neq \Gamma$, ввиду (2.14) опять получаем, что многочлен P не является почти гипоэллиптическим. Так как при $2 < k < n$ противоречие с условием теоремы получается аналогичным образом, то этого повторять не будем. Теорема 2.3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1986. Т. 2.
2. *Ghazaryan H. G., Margaryan V. N.* On infinite differentiability of solutions of nonhomogeneous almost hypoelliptic equations // Euras. Math. J. 2010. V. 1, N 1. P. 54–72.
3. *Khovanskii A. G.* Newton polyhedra (algebra and geometry) // Am. Math. Soc. Transl. 1992. V. 153, N 2. P. 1–15.
4. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов // Тр. МИАН. 1967. Т. 91. С. 59–81.
5. *Gindikin S. G., Volevich L. R.* The method of Newton's polyhedron in the theory of PDE. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992.
6. *Демиденко Г. В.* Изоморфные свойства одного класса дифференциальных операторов и их приложения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1036–1956.
7. *Демиденко Г. В.* Об одном классе матричных дифференциальных операторов // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 103–118.
8. *Демиденко Г. В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдопараболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
9. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* О робастной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. математики. 2025. Т. 18, № 4. С. 18–29.
10. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* О бесконечном возрастании одного класса многочленов // Изв. НАН Армении. Математика. 2020. Т. 55, № 4. С. 47–64.
11. *Маргарян В. Н., Казарян Г. Г.* Оценки снизу многочленов многих переменных // Изв. НАН Армении. Математика. 2017. Т. 52, № 5. С. 52–67.

12. *Казарян Г. Г.* Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность // Тр. МИАН. 1979. Т. 150. С. 143–159.
13. *Казарян Г. Г.* О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности // Изв. НАН Армении. Математика. 2011. Т. 46, № 6. С. 11–30.
14. *Ghazaryan H. G., Margaryan V. N.* On the comparison of powers of differential operators (polynomials) // Boll. Unione Mat. Ital. 2023. V. 16, N 4. P. 703–740.
15. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Об одном классе вырождающихся гипоэллиптических многочленов // Тр. Моск. мат. о-ва. В печати.
16. *Казарян Г. Г.* Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы // Тр. МИАН. 1976. Т. 140. С. 130–161.
17. *Казарян Г. Г.* Об одном семействе гипоэллиптических полиномов // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1974. Т. 9, № 3. С. 189–211.
18. *Казарян Г. Г.* Об оценках производных многочленов многих переменных // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1999. Т. 34, № 3. С. 46–55.
19. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Критерии гипоэллиптичности в терминах мощности и силы операторов // Тр. МИАН. 1979. Т. 150. С. 128–142.

Поступила в редакцию 20 декабря 2025 г.
После доработки 29 декабря 2025 г.
Принята к публикации 30 декабря 2025 г.

Казарян Гайк Гегамович
Математический институт НАН РА,
пр. Маршала Баграмяна, 24/5, Ереван 0019, Армения
`haikghazaryan@mail.ru`

Маргарян Вачаган Николаевич
Российско-Армянский университет,
ул. Овсепа Емина, 123, Ереван 0051, Армения
`vachagan.margaryan@yahoo.com`