Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.53

О ВОССТАНОВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ХААРА, СХОДЯЩЕГОСЯ ПО ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ

Г. Г. Геворкян, В. А. Скворцов

Аннотация. Доказывается существование последовательности натуральных чисел, которая имеет плотность нуль и обладает свойством: если подпоследовательность частичных сумм ряда Хаара с номерами из этой последовательности всюду сходится к всюду конечной интегрируемой по Перрону функции, то данный ряд является рядом Фурье — Хаара своей суммы.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.203

Ключевые слова: ряд Хаара, интеграл Перрона, ряд Фурье.

1. Введение и постановка задачи

Напомним определение системы Хаара. Пусть $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \dots$, $1 \le \nu \le 2^\mu$. Обозначим

$$\Delta_k := \left(\frac{\nu-1}{2^\mu}, \frac{\nu}{2^\mu}\right), \quad \Delta_k^+ := \left(\frac{\nu-1}{2^\mu}, \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}\right), \quad \Delta_k^- := \left(\frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}, \frac{\nu}{2^\mu}\right).$$

Система Хаара определяется формулами $\chi_1(x) = 1$, $x \in [0,1]$, и

$$\chi_k(x) := \begin{cases} 2^{\frac{\mu}{2}}, & \text{когда} \quad x \in \Delta_k^+, \\ -2^{\frac{\mu}{2}}, & \text{когда} \quad x \in \Delta_k^-, \\ 0, & \text{когда} \quad x \notin \overline{\Delta}_k, \end{cases}$$

для $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \dots$, $1 \le \nu \le 2^\mu$. В точках разрыва значение функции $\chi_k(x)$ равно среднему арифметическому односторонних пределов функции в этих точках, а в точках 0 и 1 определяется по непрерывности изнутри интервала $[0,1]$. Отсюда следует, что частичные суммы $S_n(x)$ ряда Хаара $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ обладают свойством

$$S_n(x) = \frac{S_n(x+) + S_n(x-)}{2}, \quad \text{если } x \in (0,1), \tag{1}$$

Работа Г. Г. Геворкяна выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке министерства ОНКС Республики Армения (грант No 25RG-1A195). Работа В. А. Скворцова выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по Соглашению № 075-15-2025-345.

и

$$S_n(0) = S_n(0+), \quad S_n(1) = S_n(1-).$$

Для $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \ldots$, $1 \le \nu \le 2^\mu$ положим $t_k := \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}$. Эта точка является центром отрезка $\overline{\Delta}_k$, носителя функции χ_k. Если $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \ldots$, $1 \le \nu \le 2^\mu$, то будем говорить, что точки t_k, функции χ_k и числа k *взяты из μ-й пачки.*

Точками $\{t_k\}_{k=2}^n$ отрезок $[0,1]$ разбивается на n интервалов (два полуоткрытых, остальные открытые), на каждом из которых первые n функций системы Хаара принимают постоянные значения. Обозначим эти интервалы слева направо через Δ_i^n, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если имеем интервалы $\{\Delta_i^n\}_{i=1}^n$, то интервалы $\{\Delta_i^{n+1}\}_{i=1}^{n+1}$ получаются разделением первого слева самого длинного интервала Δ_i^n на два равных интервала.

Частичные суммы ряда Фурье — Хаара интегрируемой функции f определяются формулами (см., например, [1, гл. 3, § 1])

$$S_n(x) = \frac{1}{|\Delta_i^n|} \int\limits_{\Delta_i^n} f(t)\,dt, \quad \text{когда } x \in \Delta_i^n, \tag{2}$$

где $|\Delta|$ — длина отрезка Δ, а в точках разрыва — формулами (1).

Есть также другие способы определения функций системы Хаара, однако при других определениях теоремы единственности, доказанные в этой работе, и многие другие теоремы, доказанные ранее, могут перестать быть верными. Сам Хаар [2] систему определял так, как это сделано выше.

Система Хаара является первым примером ортонормированной системы, обладающей свойством: ряд Фурье непрерывной функции по системе Хаара равномерно сходится к этой функции.

Исследования вопросов единственности рядов по системе Хаара были начаты в работах [3–5]. В этих работах было доказано, что если ряд по системе Хаара всюду сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю. Фабер [6] показал, что даже одноточечное множество $\{\frac{1}{2}\}$ не является множеством единственности для рядов Хаара, т. е. существует нетривиальный ряд по системе Хаара, который всюду вне этого множества сходится к нулю. Оказалось (см., например, [7]), что для рядов Хаара любое одноточечное множество не является множеством единственности. В работе [7] доказана также следующая

Теорема A (Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян). *Пусть ряд Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{3}$$

обладает свойствами:

(a) *ряд* (3) *сходится к некоторой интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$ всюду на отрезке* $[0,1]$, *кроме, быть может, некоторого счетного множества точек,*

(b) *для любой точки $x_0 \in [0,1]$*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0,$$

где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ суть все те номера n, для которых $\chi_n(x_0) \ne 0$.

Тогда ряд (3) *является рядом Фурье — Хаара функции* f.

Ф. Г. Арутюнян [8] обобщил теорему A, доказав, что в теореме A вместо интегрируемой по Лебегу функции можно рассмотреть функции, интегрируемые в широком смысле Данжуа.

Когда ряд (3) сходится во всех точках, условие (b) автоматически выполняется во всех точках. Вообще говоря, условие (b) нужно, чтобы допустить исключительное счетное множество. Условие (b) присутствует во многих теоремах единственности рядов Хаара.

В работе [9] В. А. Скворцов определил некоторое обобщение интеграла Данжуа (HD интеграл), восстанавливающее коэффициенты любого всюду сходящегося ряда Хаара по сумме этого ряда. В работах [10, 11] В. А. Скворцов рассмотрел ряды Хаара с коэффициентами, удовлетворяющими некоторому ослабленному варианту условия (b) теоремы A, сходящиеся всюду по некоторой подпоследовательности частичных сумм. Он показал также, что интеграл, восстанавливающий коэффициенты таких рядов, зависит от того, какая подпоследовательность частичных сумм сходится.

В работе [12] Г. Г. Геворкяна рассмотрены ряды Хаара с некоторой подпоследовательностью частичных сумм, всюду сходящейся к всюду конечной интегрируемой по Лебегу функции. Напомним определение рассмотренной там последовательности. Пусть m_i, $i \in \mathbb{N}$, — возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$I := \bigcup_{i=1}^{\infty} \{n \in \mathbb{N} : 2^{m_i} < n \leq 2^{m_i+1}\}. \tag{4}$$

В работе [12] (см. [12, теорема 2]) доказано, что если частичные суммы $S_j(x) = \sum\limits_{n=1}^{j} a_n \chi_n(x)$, $j \in I$, ряда Хаара (3) всюду на $[0, 1]$ сходятся к всюду конечной интегрируемой функции f, т. е.

$$\lim_{j \in I,\, j \to \infty} S_j(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

то ряд (3) является рядом Фурье — Хаара функции f. Отметим, что здесь не требуется выполнения условия (b) теоремы A.

Напомним, что *плотностью* (*нижней плотностью, верхней плотностью*) последовательности натуральных чисел n_i называется предел (нижний предел, верхний предел) отношения $\frac{\Lambda_n}{n}$, когда $n \to \infty$, где Λ_n — количество членов последовательности n_i, не превосходящих n. Последовательность I, определяемая формулой (4), имеет верхнюю плотность не меньше $1/2$ и может иметь нижнюю плотность 0.

В работе [13] Г. Г. Геворкян усилил результат работы [12], рассмотрев сходимость по подпоследовательности, имеющей плотность нуль.

В настоящей работе получено дальнейшее обобщение упомянутых выше результатов для случая сходимости к функции, интегрируемой в узком смысле Данжуа, или, что эквивалентно, в смысле интеграла Перрона (P-интеграла). Для последовательности n_i, $i \in \mathbb{N}$, плотности нуль, построенной в [13], мы докажем, что если подпоследовательность частичных сумм

$$S_{n_i}(x) = \sum_{k=1}^{n_i} a_k \chi_k(x) \tag{5}$$

ряда Хаара всюду сходится к всюду конечной интегрируемой по Перрону функции f, то этот ряд является рядом Фурье — Хаара функции f.

2. Построение последовательности n_i и вспомогательные леммы

Последовательность n_i определим следующим образом. Пусть μ_q, $q \in \mathbb{N}$, — возрастающая последовательность натуральных чисел с условием

$$\mu_q > \mu_{q-1} + 1. \tag{6}$$

Для $p = 1, 2, \dots, 2^q - 1$ рассмотрим числа

$$2^{\mu_q} + p2^{\mu_q - q} - 1, \quad 2^{\mu_q} + p2^{\mu_q - q}, \quad 2^{\mu_q} + p2^{\mu_q - q} + 1. \tag{7}$$

Рассмотрим также числа

$$2^{\mu_q} + 1 \quad \text{и} \quad 2^{\mu_q + 1}. \tag{8}$$

В последовательность чисел n_i включим числа из (7) и (8), написанные в возрастающем порядке. Оценим плотность этой последовательности. Отметим, что количество чисел n_i из (7) и (8), удовлетворяющих неравенству $2^{\mu_q} < n_i \le 2^{\mu_q+1}$, равно $3 \cdot 2^q - 1$. С учетом всех предыдущих пачек количество чисел n_i, удовлетворяющих неравенству $n_i \le 2^{\mu_q+1}$, не превосходит $3 \cdot 2^{q+1} - q < 2^{q+3}$. Далее, для произвольного n возьмем i, для которого $2^{\mu_q} \le n_i \le n < n_{i+1}$. Тогда

$$\frac{i}{n} \le \frac{i}{n_i} \le \frac{2^{q+3}}{2^{\mu_q}} = 2^{q+3-\mu_q}. \tag{9}$$

Из (9) следует, в частности, что если $\mu_q = 2q$, то плотность последовательности, определяемой (7) и (8), равна нулю. Ясно, что можно выбрать μ_q так, чтобы отношение i/n_i стремилось к нулю с наперед заданной скоростью.

Через I обозначим множество $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$. Заметим, что если $n_i = 2^{\mu_q} + p2^{\mu_q - q} \in I$, то число $p/2^q$ является правым концом носителя функции χ_{n_i} и левым концом носителя функции χ_{n_i+1}.

Далее будем считать, что n_i взяты из (7) или (8).

Теорема 1. *Пусть частичные суммы*

$$S_{n_i}(x) := \sum_{n=1}^{n_i} a_n \chi_n(x), \quad n_i \in I, \tag{10}$$

всюду сходятся к всюду конечной P-интегрируемой функции $\phi(x)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

является рядом Фурье — Хаара функции $\phi(x)$.

В частном случае, когда ϕ интегрируема по Лебегу, теорема 1 доказана в работе [13].

Доказательство этой теоремы будет опираться на несколько лемм.

Лемма 1. *Если f — непрерывная функция, то*

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1/2} \int_0^1 \chi_k(t)\, df(t) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \ldots$, $1 \le \nu \le 2^\mu$, и $t_k = \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}$. Обозначим также $a_k = \frac{\nu-1}{2^\mu}$ и $b_k = \frac{\nu}{2^\mu}$. Тогда

$$\left|\int_0^1 \chi_k(t)df(t)\right| = |2^{\mu/2}(2f(t_k) - f(a_k) - f(b_k))|$$

$$= |2^{\mu/2}((f(b_k) - f(a_k)) - 2(f(b_k) - f(t_k)))| \le 3 \cdot 2^{\mu/2}\omega(f, 2^{-\mu-1}), \quad (12)$$

где $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности функции f. В силу непрерывности функции f из (12) следует (11). Лемма доказана.

Ниже мы будем часто использовать запись $\Phi(\Delta)$ в случае, когда некоторая функция Φ принимает постоянное значение на интервале Δ.

Из леммы 1 и определения системы Хаара, в частности, следует, что если f — непрерывная функция и

$$b_n = \int_0^1 \chi_n(t)df(t),$$

то

$$\lim_{n_i\to\infty} n_i^{-1}\left|\sum_{n=1}^{n_i} b_n\chi_n(0)\right| = \lim_{n_i\to\infty} n_i^{-1}\left|\sum_{n=1}^{n_i} b_n\chi_n(\Delta_1^{n_i})\right| = 0$$

$$= \lim_{n_i\to\infty} n_i^{-1}\left|\sum_{n=1}^{n_i} b_n\chi_n(1)\right| = \lim_{n_i\to\infty} n_i^{-1}\left|\sum_{n=1}^{n_i} b_n\chi_n(\Delta_{n_i}^{n_i})\right|. \quad (13)$$

Напомним определение интеграла Перрона. Непрерывная функция $M(x)$ ($m(x)$) называется *мажорантной* (*минорантной*) *функцией* для функции f на конечном интервале (a,b), если $M(a) = 0$ ($m(a) = 0$) и числа Дини функции $M(x)$ ($m(x)$) не меньше (не больше) $f(x)$, если $f(x) > -\infty$ ($f(x) < +\infty$), и больше $-\infty$ (меньше $+\infty$), если $f(x) = -\infty$ ($f(x) = +\infty$).

Функция называется *интегрирумой на конечном интервале* (a,b) *по Перрону*, если существуют последовательности мажорантных функций $M_n(x)$ и минорантных функций $m_n(x)$, для которых

$$\sup_n m_n(b) = \inf_n M_n(b). \quad (14)$$

Общее значение в (14) называется (*определенным*) P-*интегралом* функции f на интервале (a,b). Более подробно об интеграле Перрона см. [14]. Далее в работе, говоря об интеграле, всегда будем иметь в виду интеграл Перрона.

Пусть m является минорантной функцией для функции ϕ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\chi_n(x)$ является ее рядом Фурье — Хаара — Стильтеса, т. е.

$$b_n = \int_0^1 \chi_n(t)\,dm(t).$$

Пользуясь аналогом формулы (2) для рядов Фурье — Стильтеса, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k\chi_k(x) = \frac{1}{|\Delta_i^n|}\int_{\Delta_i^n} dm(t), \quad \text{когда } x \in \Delta_i^n. \quad (15)$$

Обозначим $c_k := b_k - a_k$ и рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(x)$. Частичные суммы этого ряда обозначим через $\widetilde{S}_n(x)$.

Лемма 2. *Если для некоторых n и i выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_k(\Delta_i^n) = C > 0, \tag{16}$$

то для любого $\varepsilon \in (0, C)$ найдутся $n_1 \in I$ и i_1 такие, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} c_k\chi_k(\Delta_{i_1}^{n_1}) > C - \varepsilon \tag{17}$$

на интервале

$$\Delta_{i_1}^{n_1} \subset \Delta_i^n, \tag{18}$$

который не имеет общего правого конца с Δ_i^n.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда правый конец интервала Δ_i^n меньше единицы. Допустим, что лемма неверна. Это означает, что если $\Delta_j^{n_i}$, $n_i \in I$, удовлетворяет (18) и не имеет общего правого конца с Δ_i^n, то

$$\sum_{k=1}^{n_i} c_k\chi_k(\Delta_j^{n_i}) \le C - \varepsilon. \tag{19}$$

Через β обозначим правый конец интервала Δ_i^n. Для $n' > n$, $n' \in I$, через $\Delta_\beta^{n'}$ обозначим тот интервал из интервалов $\Delta_i^{n'}$, правый конец которого равен β. В силу того, что

$$\int\limits_{\Delta_i^n} \widetilde{S}_{n'}(t)\,dt = \int\limits_{\Delta_i^n} \widetilde{S}_n(t)\,dt = C\bigl|\Delta_i^n\bigr|,$$

справедливо равенство

$$\bigl|\Delta_\beta^{n'}\bigr|\widetilde{S}_{n'}\bigl(\Delta_\beta^{n'}\bigr) = \int\limits_{\Delta_\beta^{n'}} \widetilde{S}_{n'}(t)\,dt = C\bigl|\Delta_i^n\bigr| - \int\limits_{\Delta_i^n\setminus\Delta_\beta^{n'}} \widetilde{S}_{n'}(t)\,dt. \tag{20}$$

Отсюда получаем

$$\widetilde{S}_{n'}\bigl(\Delta_\beta^{n'}\bigr) > C\frac{|\Delta_i^n|}{|\Delta_\beta^{n'}|} - (C-\varepsilon)\biggl(\frac{|\Delta_i^n|}{|\Delta_\beta^{n'}|} - 1\biggr). \tag{21}$$

Следовательно,

$$\widetilde{S}_{n'}\bigl(\Delta_\beta^{n'}\bigr) > \varepsilon\frac{\bigl|\Delta_i^n\bigr|}{\bigl|\Delta_\beta^{n'}\bigr|}. \tag{22}$$

Из того, что β меньше 1 и имеет вид $\beta = \frac{p}{2^q}$ для некоторых $q \in \mathbb{N}$ и $p \in \{1, 2, \dots, 2^q - 1\}$, и из (7) следует, что при достаточно больших q выполняется

$$|S_{m_{p,q}}(\beta) - S_{m_{p,q}+1}(\beta)| < \frac{1}{2}, \tag{23}$$

где (см. (7))

$$m_{p,q} = 2^{\mu_q} + p2^{\mu_q - q} - 1 \quad \text{и} \quad m_{p,q}, m_{p,q}+1 \in I. \tag{24}$$

Пусть p и q фиксированы и удовлетворяют (23) и (24). Для этих p и q обозначим для сокращения записи

$$\kappa := m_{p,q}. \tag{25}$$

Из (23)–(25) получим, что при достаточно больших q выполняется

$$|a_{\kappa+1}\chi_{\kappa+1}(\beta)| < \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Нетрудно заметить, что β является правым концом носителя функции $\chi_{\kappa+1}$. Поэтому из определения функций системы Хаара и (26) следует, что

$$\|a_{\kappa+1}\chi_{\kappa+1}\|_\infty < 1. \tag{27}$$

С другой стороны, из леммы 1 имеем

$$b_{\kappa+1}\chi_{\kappa+1}\big(\Delta_\beta^{n'}\big) = o(\kappa) = o\big(\big|\Delta_\beta^{n'}\big|^{-1}\big), \quad \text{когда } \kappa \to \infty. \tag{28}$$

Из (28) и (27) следует, что для любого $\gamma > 0$ выполняется

$$\big|c_{\kappa+1}\chi_{\kappa+1}\big(\Delta_\beta^{n'}\big)\big| = 2|c_{\kappa+1}\chi_{\kappa+1}(\beta)| < \gamma\big|\Delta_\beta^{n'}\big|^{-1}. \tag{29}$$

при достаточно больших $n' \in I$.

Из (29) и (22) при достаточно больших $n' = \kappa + 1$ получим

$$\widetilde{S}_{\kappa+1}(\Delta_{\kappa+1}^{+}) > \varepsilon\frac{\big|\Delta_i^n\big|}{\big|\Delta_\beta^{\kappa+1}\big|} - \frac{\gamma}{\big|\Delta_\beta^{\kappa+1}\big|} = \frac{\varepsilon\big|\Delta_i^n\big| - \gamma}{\big|\Delta_\beta^{\kappa+1}\big|} > C - \varepsilon. \tag{30}$$

В случае $\beta < 1$ лемма доказана.

Если $\beta = 1$ и лемма неверна, то, как показано выше, выполняются (22) и (13) с $n_i = \kappa = 2^{\mu_q+1}$. Сопоставляя (22) и (13), получаем

$$\lim_{n_i\to\infty,\, n_i\in I}\sum_{n=1}^{n_i} c_n\chi_n(1) = +\infty, \tag{31}$$

что противоречит условию теоремы. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 3. *Если для некоторых n и i выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_k\big(\Delta_i^n\big) = C > 0,$$

то для любого $\varepsilon \in (0, C)$ найдутся $n_1 \in I$ и i_1 такие, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} c_k\chi_k\big(\Delta_{i_1}^{n_1}\big) > C - \varepsilon, \quad \Delta_{i_1}^{n_1} \subset \Delta_i^n$$

и $\Delta_{i_1}^{n_1}$ не имеет общего левого конца с Δ_i^n.

Из лемм 2, 3 следует

Лемма 4. *Если для некоторых n и i выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_k\big(\Delta_i^n\big) = C > 0,$$

то для любого $\varepsilon \in (0, C)$ найдутся $n_1 \in I$ и i_1 такие, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} c_k\chi_k\big(\Delta_{i_1}^{n_1}\big) > C - \varepsilon, \quad \Delta_{i_1}^{n_1} \subset \Delta_i^n$$

и $\Delta_{i_1}^{n_1}$ не имеет общих концов с Δ_i^n.

Лемма 5. *Если для некоторых n и i выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_k(\Delta_i^n) = C > 0, \tag{32}$$

то найдутся такие подпоследовательность $n_{i_j} \in I$ и двоично иррациональная точка z, что

$$\limsup_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{n_{i_j}} b_k \chi_k(z) > \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{n_i} a_k \chi_k(z) = \phi(z). \tag{33}$$

Доказательство. Последовательно применяя лемму 4 с $\varepsilon = \frac{C}{2^{j+1}}$, получим последовательность натуральных чисел $n_{i_j} \in I$ и последовательность вложенных интервалов $\Delta_{\nu_j}^{n_{i_j}}$ без общих концов, для которых выполняются

$$\sum_{k=1}^{n_{i_j}} c_k \chi_k\bigl(\Delta_{\nu_j}^{n_{i_j}}\bigr) = C - \sum_{l=1}^{j} \frac{C}{2^{l+1}} > \frac{C}{2}. \tag{34}$$

Поскольку интервалы $\Delta_{\nu_j}^{n_{i_j}}$ не имеют общих концов, то их пересечение состоит из одной двоично-иррациональной точки z и в этой точке выполняется (33). Лемма доказана.

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1. Лемма 5 позволяет доказать, что для миноранты m функции ϕ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Delta_i^n} S_n\bigl(\Delta_i^n\bigr)\, dt \ge \int\limits_{\Delta_i^n} dm(t) \text{ для любых } n \text{ и } i. \tag{35}$$

В самом деле, предположим противное. Тогда применение леммы 5 приводит нас к противоречию с условием теоремы.

Аналогично можно доказать, что если M — мажорантная функция функции ϕ, то для любых n и i выполняется

$$\int\limits_{\Delta_i^n} S_n\bigl(\Delta_i^n\bigr)\, dt \le \int\limits_{\Delta_i^n} dM(t). \tag{36}$$

Теперь пусть $\Delta_{i_0}^{n_0} = (\alpha, \beta)$ — любой из интервалов $\Delta_j^{n_i}$. Пусть $m_k(x)$ — последовательность минорантных, а $M_k(x)$ — последовательность мажорантных функций для функции $\phi(x)$ на $[0,1]$ с условием

$$\lim_{k\to\infty} (M_k(1) - m_k(1)) = 0. \tag{37}$$

Учитывая, что разность $M_k(x) - m_k(x)$ — неубывающая функция для всех k, из (37) получим

$$\lim_{k\to\infty} (M_k(x) - m_k(x)) = 0 \quad \text{равномерно на } [0,1], \tag{38}$$

причем

$$\lim_{k\to\infty} m_k(x) = \lim_{k\to\infty} M_k(x) = \int\limits_0^x \phi(t)\, dt. \tag{39}$$

Кроме того, как мы доказали,

$$\int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} S_{n_0}\big(\Delta_{i_0}^{n_0}\big) \geq \int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} dm_k(x) = m_k(\beta) - m_k(\alpha) \quad \text{для всех } k \tag{40}$$

и

$$\int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} S_{n_0}(\Delta_{i_0}^{n_0}) \leq \int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} dM_k(x) = M_k(\beta) - M_k(\alpha) \quad \text{для всех } k. \tag{41}$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} S_{n_0}(t)\,dt = \int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} \phi(t)\,dt. \tag{42}$$

Поскольку коэффициенты любого ортогонального ряда могут быть представлены как коэффициенты Фурье его частичной суммы, то при любом $k \leq n$

$$a_k = \int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} S_{n_0}(t)\chi_k(t)\,dt.$$

Отсюда с учетом постоянства функции χ_k на интервалах, на которых выполнено (42), получаем, что a_k является также коэффициентом Фурье функции ϕ. Теорема доказана.

Замечание. Фактически мы доказали, что если последовательность μ_q удовлетворяет (6), то для последовательности n_i, определяемой (7) и (8), верна теорема 1. Учитывая это, для любой последовательности $h_m \uparrow \infty$ можно найти последовательность n_i, для которой верна теорема 1 и выполняется $\operatorname{card}\{i : n_i \leq m\} \leq h_m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Теория ортогональных рядов. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
2. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen // Funktionensysteme. Math. Ann. 1910. V. 69. P. 331–371.
3. *Арутюнян Ф. Г.* О рядах по системе Хаара // Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т. 38, № 3. С. 129–134.
4. *Петровская М. Б.* О нуль рядах по системе Хаара и множествах единственности // Изв. АН. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 4. С. 773–798.
5. *Скворцов В. А.* Теорема типа Кантора для системы Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. 1964. Т. 5, № 4. С. 3–6.
6. *Faber G.* Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Deutsch. Math. Ver. 1910. V. 19. P. 104–112.
7. *О единственности рядов по системам Хаара и Уолша* // Изв. АН. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 6. С. 1391–1408.
8. *Арутюнян Ф. Г.* Восстановление коэффициентов рядов по системам Хаара и Уолша, сходящихся к функциям, интегрируемым по Данжуа // Изв. АН. Сер. мат. 1966. Т. 30, № 2. С. 325–344.
9. *Скворцов В. А.* Вычисление коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара // Мат. сб. 1968. Т. 75, № 3. С. 349–360.
10. *Скворцов В. А.* О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183, № 4. С. 784–786.
11. *Скворцов В. А.* О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 6. С. 707–714.
12. *Геворкян Г. Г.* О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям к интегрируемым функциям // Изв. НАН Армении. Сер. мат. 2025. Т. 60, № 1. С. 3–9.

13. *Геворкян Г. Г. О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм* // Мат. заметки. 2025. Т. 118, № 3. С. 407–416.
14. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Факториал Пресс, 2004.

Поступила в редакцию 10 мая 2025 г.
После доработки 30 октября 2025 г.
Принята к публикации 6 ноября 2025 г.

Геворкян Гегам Григорьевич
Ереванский государственный университет,
ул. Алека Манукяна 1, 0025 Ереван, Армения
ggg@ysu.am

Скворцов Валентин Анатольевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119991;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
vaskvor2000@yahoo.com