Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.3

СХОДИМОСТЬ МЕР В МЕТРИКЕ КАНТОРОВИЧА И ПРИБЛИЖЕНИЕ ГАУССОВСКИХ МЕР

В. И. Богачев

Аннотация. Доказаны два результата о приближении борелевских мер в метрике Канторовича. Первый результат дает скорость сходимости в этой метрике нормированных поверхностных мер на n-мерных сферах к стандартной гауссовской мере на счетной степени прямых, ограниченной на произвольное непрерывно вложенное сепарабельное банахово пространство полной меры, а второй для произвольной слабо сходящейся последовательности вероятностных борелевских мер на сепарабельном пространстве Фреше дает достаточное условие сходимости в метрике Канторовича, порожденной нормой компактно вложенного сепарабельного банахова пространства.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.202

Ключевые слова: гауссовская мера, слабая сходимость мер, метрика Канторовича.

Посвящается памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

1. Введение

Хорошо известно, что нормированные поверхностные меры σ_n на сферах радиуса $\sqrt{n}$ в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемые как меры на счетной степени прямой $\mathbb{R}^\infty$, слабо сходятся к стандартной гауссовской мере γ на $\mathbb{R}^\infty$ — счетной степени стандартной гауссовской меры на прямой. Этот результат восходит к работам Бореля [1], Гато [2] и Леви [3], в 1960–70-х обсуждался в связи с развитием бесконечномерного интегрирования в работах [4–6], позже фигурировал в предельных теоремах для проекций (см., например, [7–10]), а в последнее время он снова привлек внимание в связи с изучением так называемого явления концентрации мер (см. [11–13]). Слабая сходимость мер на метрическом пространстве характеризуется сходимостью в метрике Канторовича — Рубинштейна, более сильной является сходимость в метрике Канторовича (определения напоминаются ниже). В этой работе показано, что меры σ_n сходятся к мере γ по метрике Канторовича, порожденной всяким непрерывно вложенным в $\mathbb{R}^\infty$ сепарабельным банаховым пространством E, для которого $\gamma(E) = 1$. При этом получена оценка скорости сходимости, в типичных случаях имеющая вид $Cn^{-1/2}$. Разумеется, для произвольной последовательности вероятностных мер, слабо сходящейся к гауссовской мере, сходимости по какой-либо метрике Канторовича может не быть просто ввиду отсутствия слабого первого момента данных мер. Однако второй результат работы утверждает, что если борелевские вероятностные меры μ_n на сепарабельном пространстве Фреше X слабо сходятся к

Работа поддержана грантом РНФ № 25-11-00007, выполняемым при МГУ им. М. В. Ломоносова.

борелевской мере μ_0, причем существует такое банахово пространство Y с нормой p_Y, непрерывно вложенное в X, что $\mu_n(Y) = 1$ при всех $n \geq 0$, замкнутые шары в Y борелевы в X и функция p_Y равномерно интегрируема относительно мер μ_n, то найдется сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, компактно вложенное в X, для которого $\mu_n(E) = 1$ при всех $n \geq 0$, причем меры μ_n сходятся к мере μ_0 на E по метрике Канторовича, порожденной нормой пространства E. Таким образом, в общем случае сходимость по метрике Канторовича всегда можно усилить и получить ее на компактно вложенном пространстве. Если Y компактно вложено в X, то можно найти содержащее Y пространство E с указанными свойствами. Аналогичное утверждение доказано и для знакопеременных мер.

2. Обозначения и терминология

Напомним (см. [14]), что борелевская вероятностная мера γ на локально выпуклом пространстве X с топологически сопряженным X^* называется *центрированной гауссовской*, если все функционалы из X^* являются центрированными гауссовскими случайными величинами относительно γ, т. е. для всякого такого функционала l либо $l = 0$ почти всюду, либо

$$\gamma(x\colon l(x) < c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_l}} \int\limits_{-\infty}^{c} e^{-t^2/(2\sigma_l)}\, dt, \quad \sigma_l = \int\limits_X l^2\, d\gamma.$$

Центрированная гауссовская мера γ называется *радоновской*, если для всякого борелевского множества $B \subset X$ и каждого $\varepsilon > 0$ есть такой компакт $K \subset B$, что $\gamma(B \backslash K) \leq \varepsilon$. На сепарабельном пространстве Фреше все борелевские меры радоновы.

Для центрированной радоновской гауссовской меры γ на пространстве X замыкание X^* в $L^2(\gamma)$ обозначается через X^*_γ.

Стандартная гауссовская мера на прямой задается плотностью $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ относительно меры Лебега. Счетная степень этой меры, заданная на счетной степени прямой $\mathbb{R}^\infty$, называется *стандартной гауссовской мерой на* $\mathbb{R}^\infty$. Она играет особую роль в теории гауссовских мер. В силу известной теоремы Цирельсона (см. [14]) всякая центрированная радоновская гауссовская мера γ на локально выпуклом пространстве X, не сосредоточенная на конечномерном подпространстве, линейно изоморфна стандартной гауссовской мере γ_∞ на $\mathbb{R}^\infty$ в следующем смысле: найдутся борелевские линейные подпространства $X_1 \subset \mathbb{R}^\infty$ и $X_2 \subset X$ с $\gamma_\infty(X_1) = \gamma(X_2) = 1$ и взаимно однозначное борелевское линейное отображение $J\colon X_1 \to X_2$ такие, что обратное отображение J^{-1} тоже борелево и образ γ_∞ при J равен γ, т. е. $\gamma(B) = \gamma_\infty(J^{-1}(B))$ для всех борелевских множеств $B \subset X$. В частности, это верно для всякой центрированной гауссовской меры на сепарабельном пространстве Фреше (например, на сепарабельном банаховом пространстве), не сосредоточенной на конечномерном подпространстве.

Из известной теоремы Ферника (см. [14, теорема 2.8.5]) следует, что

$$\int\limits_X p^k\, d\gamma < \infty$$

для всех $k > 0$, если p — γ-измеримая полунорма, определенная на линейном подпространстве γ-меры 1.

Борелевские меры μ_n на топологическом пространстве X слабо сходятся к борелевской вероятностной мере μ, если

$$\int\limits_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X f\,d\mu_n$$

для всякой ограниченной непрерывной функции f на X. В случае полного сепарабельного метрического пространства (X,d) такая сходимость на множестве борелевских вероятностных мер задается метрикой Канторовича — Рубинштейна

$$d_{KR}(\mu,\nu) = \sup\biggl\{\int\limits_X f\,d\mu - \int\limits_X f\,d\nu\colon f\in \mathrm{Lip}_1(d),\ |f|\le 1\biggr\},$$

где $\mathrm{Lip}_1(d)$ — множество 1-липшицевых функций на X, т. е. функций f, для которых $|f(x)-f(y)|\le d(x,y)$ при всех $x,y\in X$. Метрика Канторовича — Рубинштейна порождается нормой Канторовича — Рубинштейна на всем пространстве $\mathscr{M}(X)$ ограниченных знакопеременных борелевских мер, задаваемой формулой

$$\|\sigma\|_{KR} = \sup\biggl\{\int\limits_X f\,d\sigma\colon f\in \mathrm{Lip}_1(d),\ |f|\le 1\biggr\}.$$

Слабая сходимость последовательности знакопеременных мер влечет сходимость по норме Канторовича — Рубинштейна, но обратное неверно, если пространство X не дискретно.

На линейном подпространстве $\mathscr{M}_1(X)$ в $\mathscr{M}(X)$, состоящем из знакопеременных борелевских мер, относительно вариаций которых интегрируема функция $x\mapsto d(x,x_0)$ при каком-либо фиксированном $x_0\in X$ (тогда такие функции интегрируемы при всех x_0), определена норма Канторовича

$$\|\sigma\|_K = |\sigma(X)| + \sup\biggl\{\int\limits_X f\,d\sigma\colon f\in \mathrm{Lip}_1(d),\ f(x_0)=0\biggr\}.$$

На подмножестве $\mathscr{P}_1(X)\subset\mathscr{M}_1(X)$, состоящем из вероятностных мер, относительно которых интегрируема функция $x\mapsto d(x,x_0)$, метрика Канторовича d_K, порожденная нормой Канторовича, задается формулой

$$d_K(\mu,\nu) = \sup\biggl\{\int\limits_X f\,d\mu - \int\limits_X f\,d\nu\colon f\in \mathrm{Lip}_1(d),\ f(x_0)=0\biggr\}.$$

Конечно, эта метрика зависит от метрики d, поэтому нередко бывает удобно включить эту зависимость в обозначения и писать, скажем, $d_{K,d}(\mu,\nu)$. Если X — банахово пространство с нормой p_X, то порожденную этой нормой метрику Канторовича будем обозначать через d_{K,p_X}. В этом случае $\mathscr{P}_1(X)$ состоит из борелевских вероятностных мер с сильным первым моментом, т. е. мер, относительно которых интегрируема функция p_X.

Ясно, что $d_{KR}(\mu,\nu)\le d_K(\mu,\nu)$, причем для пространства X диаметра не более 1 имеет место равенство. Метрику d всегда можно заменить метрикой, задающей прежнюю топологию и оцениваемой 1, но это может быть нецелесообразно, так как при такой замене может быть потеряна полнота пространства, а в случае банахова пространства ограниченная метрика не будет задаваться нормой. Ниже речь идет как раз о банаховых пространствах.

Напомним, что слабо сходящаяся последовательность борелевских мер на полном сепарабельном метрическом пространстве X равномерно плотна, где семейство $\mathscr{P}$ неотрицательных борелевских мер на X называется *равномерно плотным*, если для всякого $\varepsilon > 0$ есть такой компакт K, что $\sup\limits_{\mu\in\mathscr{P}} \mu(X\backslash K) \le \varepsilon$.

В случае полного сепарабельного метрического пространства X известен (см. [15, теорема 2.7.4]) следующий критерий сходимости последовательности мер $\mu_n \in \mathscr{P}_1(X)$ к мере $\mu \in \mathscr{P}_1(X)$ по метрике Канторовича: $d_K(\mu_n, \mu) \to 0$ в точности тогда, когда меры μ_n сходятся к мере μ слабо и

$$\lim_{n\to\infty} \int_X d(x_0, x)\, \mu_n(dx) = \int_X d(x_0, x)\, \mu(dx). \tag{2.1}$$

Это равносильно также обычной слабой сходимости мер $(1+d(x_0,x))\cdot\mu_n$ к мере $(1+d(x_0,x))\cdot\mu$. Еще одно равносильное условие: слабая сходимость мер μ_n к μ и равномерная интегрируемость функции $d(x_0, x)$ относительно мер μ_n, т. е.

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \int\limits_{\{x:d(x,x_0)\ge R\}} d(x, x_0)\, \mu_n(dx) = 0.$$

В самом деле, если это условие выполнено, то интегралы от функции $g(x) = d(x, x_0)$ по мерам μ_n равномерно ограничены, поэтому она интегрируема и относительно μ. При этом есть сходимость интегралов от функций $\min(g, R)$ при всех R, что вместе с равномерной интегрируемостью дает (2.1). Обратно, пусть верно (2.1) и есть слабая сходимость. Для всякого $\varepsilon > 0$ есть такое R_1, что интеграл от $g - \min(g, R_1)$ по мере μ меньше ε. Взяв N так, что

$$\left|\int_X g\, d\mu - \int_X g\, d\mu_n\right| + \left|\int_X \min(g, R_1)\, d\mu - \int_X \min(g, R_1)\, d\mu_n\right| < \varepsilon$$

при $n > N$, получим, что для таких n при $R > R_1$ верна оценка

$$\int\limits_{\{g\ge R\}} g\, d\mu_n \le \int\limits_{\{g>R_1\}} g\, d\mu_n = \int_X [g - \min(g, R_1)]\, d\mu_n < 2\varepsilon.$$

Увеличив R_1, получим такую оценку и для оставшихся мер $\mu_1, \dots, \mu_N$.

На всем пространстве $\mathscr{M}_1(X)$ слабая сходимость не следует из сходимости по норме Канторовича. Например, если есть бесконечная последовательность точек x_n, сходящаяся к x_0, где $x_n \ne x_0$, то для мер $\mu_n = d(x_n, x_0)^{-1/2}(\delta_{x_n} - \delta_{x_0})$ имеем $\|\mu_n\|_K \to 0$, но слабой сходимости нет, так как нет даже ограниченности по вариации. Однако и на $\mathscr{M}_1(X)$ сходимость мер μ_n к μ по норме Канторовича вытекает из слабой сходимости вместе с равномерной интегрируемостью функции $d(x, x_0)$ относительно мер $|\mu_n|$. В самом деле, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $R > 0$, что интегралы от функции $d(x, x_0)$ по мерам $|\mu_n| + |\mu|$ по множеству $\{x\colon d(x, x_0) \ge R\}$ меньше ε. В силу слабой сходимости есть такое $N \ge 1$, что $\|\mu_n - \mu\|_{KR} \le \varepsilon/R$ при $n \ge N$. Тогда при таких n для всякой функции $f \in \mathrm{Lip}_1(d)$ с $f(x_0) = 0$, положив $f_R = \min(f, R)$, получаем

$$\left|\int_X f\, d\mu - \int_X f\, d\mu_n\right| \le \left|\int_X f_R\, d\mu - \int_X f_R\, d\mu_n\right| + 2\varepsilon \le R\|\mu_n - \mu\|_{KR} + 2\varepsilon \le 3\varepsilon.$$

Метрика Канторовича появилась в классической работе [16] и затем была изучена в статьях [17] и [18], где была введена также норма Канторовича — Рубинштейна. Основные результаты включены в книгу [19]. Отметим, что в значительной части зарубежной литературы используется исторически некорректное (а также и бессмысленное по содержанию) наименование “Wasserstein metric”, правда, и там некоторые авторы делают уточняющие пояснения (см., например, [12]). Интересно отметить, что сам Канторович (в предчувствии последующего переименования?) обозначил свою метрику буквой W. Для нее есть двойственная формула

$$d_K(\mu,\nu) = W(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int\limits_{X\times X} d(x,y)\,\pi(dx\,dy),$$

где $\Pi(\mu,\nu)$ — множество борелевских вероятностных мер на $X\times X$ с проекциями μ и ν на сомножители. Такое представление относится к задаче Канторовича оптимальной транспортировки (о задачах Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки см. [12, 15, 20]).

Нам понадобится также известная формула для моментов гауссовской меры. Пусть γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$ с плотностью $(2\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2/2}$ и $|x|$ — стандартная норма на $\mathbb{R}^n$. Тогда при $p > -n$ имеем

$$I_p = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^p\,\gamma_n(dx) = 2^{p/2}\frac{\Gamma\big((n+p)/2\big)}{\Gamma(n/2)}. \tag{2.2}$$

В частности, если $p = -2$ и $n > 2$, то $I_{-2} = (n-2)^{-1}$. Для этого запишем данный интеграл в сферических координатах, причем разделим его на 1 в виде интеграла от 1, также записанного в сферических координатах. После сокращения одинаковых сомножителей, возникающих из-за интегрирования по сфере, это дает

$$\int\limits_0^\infty r^p r^{n-1}e^{-r^2/2}\,dr \left(\int\limits_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2/2}\,dr\right)^{-1}.$$

После замены $r^2 = 2t$ получаем указанный ответ, причем для $p = -2$ используем формулу $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Будем говорить, что банахово пространство E *непрерывно вложено* в пространство Фреше X, если E является линейным подпространством в X и его замкнутый единичный шар ограничен в X. Если же этот шар компактен в X, то будем называть E *компактно вложенным* в X.

Отметим, что если банаховы пространства E_1 и E_2 непрерывно вложены в X и $E_1 \subset E_2$, то естественное вложение банаховых пространств $E_1 \to E_2$ непрерывно. Это вытекает из теоремы о замкнутом графике (см. [21] или [22]), поскольку график указанного вложения очевидным образом замкнут.

3. Основные результаты

Пусть γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^\infty$ (счетная степень стандартной гауссовской меры на прямой) и σ_n — нормированная поверхностная мера на сфере радиуса $\sqrt{n}$ в $\mathbb{R}^n$. Эту меру будем считать также и мерой на $\mathbb{R}^\infty$, вложив $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^\infty$ посредством естественного отображения

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots).$$

Мера σ_n — образ меры γ при отображении

$$x \mapsto \varphi_n(x) P_n x,$$

где

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^{-1/2}, \quad P_n x = (x_1, \ldots, x_n),$$

ибо этот образ — сферически инвариантная вероятностная мера на сфере в $\mathbb{R}^n$, а таковая единственна. В силу (2.2) при $n > 2$ и $p = -2$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \varphi_n^2 \, d\gamma = n \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2} \, d\gamma_n = \frac{n}{n-2}. \tag{3.1}$$

В основе обсуждаемых здесь результатов лежит тот простой факт, что в силу закона больших чисел $\bigl(x_1^2 + \cdots + x_n^2\bigr)/n \to 1$ при $n \to \infty$ для γ-почти всех x. В частности, из этого очевидна слабая сходимость мер σ_n к γ на $\mathbb{R}^\infty$, ибо такая сходимость равносильна сходимости интегралов от каждой ограниченной непрерывной функции f от конечного числа переменных (см. [23, следствие 2.4.8]), а в данном случае для функции f от переменных $x_1, \ldots, x_k$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\infty} f \, d\sigma_n = \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} f(\varphi_n(x) x_1, \ldots, \varphi_n(x) x_k) \, \gamma(dx),$$

где $\varphi_n(x) x_j \to x_j$ при $n \to \infty$ для всех j и γ-почти всех x, так что

$$f(\varphi_n(x) x_1, \ldots, \varphi_n(x) x_k) \to f(x_1, \ldots, x_k),$$

поэтому остается воспользоваться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Следующая теорема дает усиленную количественную характеристику сходимости мер σ_n к γ.

Теорема 3.1. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство с нормой p_E, непрерывно вложенное в $\mathbb{R}^\infty$, причем $\gamma(E) = 1$. Тогда меры σ_n сходятся к γ на E по метрике Канторовича d_{K,p_E}, порожденной нормой p_E, и при $n \geq 8$ выполнена оценка*

$$d_{K,p_E}(\gamma, \sigma_n) \leq 2\|p_E\|_{L^2(\gamma)} n^{-1/2} + \left(\frac{n}{n-2}\right)^{1/2} \|p_E \circ (I - P_n)\|_{L^2(\gamma)} \to 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Заметим, что в силу равенства $\gamma(E) = 1$ пространство E содержит все $\mathbb{R}^n$, ибо мера γ эквивалента своим сдвигам на векторы из $\mathbb{R}^n$. Поэтому $\sigma_n(E) = 1$ при всех n. Для всех $f \in \mathrm{Lip}_1(E)$ имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_E f \, d\gamma - \int\limits_E f \, d\sigma_n &= \int\limits_E [f(x) - f(\varphi_n(x) P_n x)] \, \gamma(dx) \\
&= \int\limits_E [f(x) - f(\varphi_n(x) x) + f(\varphi_n(x) x) - f(\varphi_n(x) P_n x)] \, \gamma(dx) \\
&\leq \int\limits_E |1 - \varphi_n(x)| p_E(x) \, \gamma(dx) + \int\limits_E \varphi_n(x) p_E(x - P_n x) \, \gamma(dx) \\
&\leq \|1 - \varphi_n\|_{L^2(\gamma)} \|p_E\|_{L^2(\gamma)} + \left(\frac{n}{n-2}\right)^{1/2} \|p_E \circ (I - P_n)\|_{L^2(\gamma)},
\end{aligned}$$

где использовано неравенство Коши — Буняковского и равенство (3.1). Далее, с учетом равенства

$$\int_0^\infty r^\alpha e^{-r^2/2}\,dr = 2^{(\alpha-1)/2}\Gamma((\alpha+1)/2)$$

после несложных преобразований находим

$$\begin{aligned}\|1-\varphi_n\|^2_{L^2(\gamma)} &= \int_{\mathbb{R}^n}(1-n^{1/2}|x|^{-1})^2\,\gamma_n(dx)\\ &= \int_0^\infty (1-n^{1/2}r^{-1})^2 r^{n-1}e^{-r^2/2}\,dr\left(\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2/2}\,dr\right)^{-1}\\ &= 1-\sqrt{2n}\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)}+\frac{n}{n-2}.\end{aligned}$$

С помощью формулы Стирлинга (см. [24, с. 792]) правую часть при $n \ge 8$ можно оценить через $4n^{-1}$, что в итоге дает объявленную оценку. В самом деле,

$$\Gamma(a) = (2\pi)^{1/2}\exp((a-1/2)\ln a - a + \theta(12a)^{-1}), \quad \theta \in (0,1).$$

Взяв $a = n/2$, получаем

$$\begin{aligned}\sqrt{2n}\,\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)} &= 2\sqrt{a}\frac{\Gamma(a-1/2)}{\Gamma(a)}\\ &= 2\exp(2^{-1}\ln a + (a-1)\ln(a-1/2) - a + 1/2 + \theta_1(12(a-1/2))^{-1}\\ &\qquad - (a-1/2)\ln a + a - \theta_2(12a)^{-1})\\ &\ge 2\exp(\ln a + (a-1)\ln(a-1/2) + 1/2 - (12a)^{-1} - a\ln a)\\ &= 2\exp(\ln(a/(a-1/2)) + a\ln((a-1/2)/a) + 1/2 - (12a)^{-1}).\end{aligned}$$

Так как $\ln(1+x) \ge x/2$ и $\ln(1-x) \ge -x-2x^2$ при $x \in [0,1/2]$, то правая часть не меньше $2\exp(2^{-1}(2a-1)^{-1} + a(-1/(2a) - 2(2a)^{-2}) + 1/2 - (12a)^{-1})$, что равно

$$2\exp(2^{-1}(n-1)^{-1} - n^{-1} - (6n)^{-1}) \ge 2\exp(-2(3n)^{-1}) \ge 2(1-2(3n)^{-1}).$$

Таким образом, при $n \ge 8$ получаем

$$\|1-\varphi_n\|^2_{L^2(\gamma)} \le \frac{2}{n-2} + \frac{4}{3n} \le \frac{4}{n}.$$

Для завершения доказательства остается пояснить, почему

$$\lim_{n\to\infty}\|p_E\circ(I-P_n)\|_{L^2(\gamma)} = 0.$$

На самом деле $\|p_E\circ(I-P_n)\|_{L^r(\gamma)} \to 0$ при всех $r \in [1,+\infty)$, ибо $p_E(x-P_nx) \to 0$ для γ-почти всех $x \in E$ (см. [14, теорема 3.5.1]), причем

$$\|p_E\circ(I-P_n)\|_{L^q(\gamma)} \le \|p_E\|_{L^q(\gamma)} \quad \forall\, q \in [1,\infty).$$

Последнее вытекает из такого факта (см. [14, следствие 3.3.7]): если ν — еще одна центрированная гауссовская мера на X, для которой

$$\int_X l^2\,d\nu \le \int_X l^2\,d\gamma$$

для всякого непрерывного линейного функционала l, то для всякой борелевской полунормы p, заданной на линейном подпространстве γ-меры 1, при $q>0$ верно неравенство

$$\int_X p^q\,d\nu \le \int_X p^q\,d\gamma.$$

В данном случае это условие выполнено для образа ν меры γ при отображении $I-P_n$, так как здесь $l(x)=\sum_{i=1}^N c_i x_i$, поэтому интеграл от l^2 по мере ν равен $\sum_{i=1}^{\max(N,n)} c_i^2$, а интеграл от l^2 по мере γ равен $\sum_{i=1}^N c_i^2$. $\square$

Отметим, что $1-\sqrt{2n}\Gamma((n-1)/2)/\Gamma(n/2)+n/(n-2)\sim 1/(2n)$ в силу разложения Стирлинга, поэтому при больших n множитель 2 в правой части (3.2) можно заменить на 1 или даже на $1/\sqrt{2}+\varepsilon$ с $\varepsilon>0$ при $n\ge N(\varepsilon)$.

Пример 3.2. Пусть E — весовое гильбертово пространство последовательностей (x_n) с $p_E(x)^2=\sum_{n=1}^\infty n^{-2}x_n^2<\infty$. Тогда при $n\ge 8$ имеем

$$d_{K,p_E}(\gamma,\sigma_n)\le (2\pi/\sqrt{6}+\sqrt{n/(n-2)})n^{-1/2}<4n^{-1/2},$$

так как

$$p_{_E}(x-P_n x)^2=\sum_{k=n+1}^\infty k^{-2}x_k^2,$$

поэтому справедлива оценка

$$\|p_E\circ(I-P_n)\|^2_{L^2(\gamma)}=\sum_{k=n+1}^\infty k^{-2}\le n^{-1}.$$

Кроме того,

$$\|p_E\|^2_{L^2(\gamma)}=\sum_{n=1}^\infty n^{-2}=\pi^2/6.$$

Анализ доказательства полученной теоремы показывает, что она имеет следующий абстрактный аналог.

Напомним, что пространство Камерона — Мартина H центрированной гауссовской меры γ на сепарабельном пространстве Фреше X с сопряженным X^* состоит из векторов $h\in X$ с конечной нормой

$$|h|_H=\sup\{l(h)\colon l\in X^*,\ \|l\|_{L^2(\gamma)}\le 1\}.$$

Известно (см. [14]), что H с этой нормой оказывается сепарабельным гильбертовым пространством. Скалярное произведение в нем задается следующим образом. Пусть X^*_γ — замыкание X^* в $L^2(\gamma)$. Тогда X^*_γ — сепарабельное гильбертово пространство, для всякого $h\in H$ имеется единственный элемент $\widehat{h}\in X^*_\gamma$, для которого $l(h)=(l,\widehat{h})_{L^2(\gamma)}$ при всех $l\in X^*$. Отображение $h\mapsto\widehat{h}$ — изометрия, а скалярное произведение в H задается формулой

$$(h_1,h_2)_H=(\widehat{h_1},\widehat{h_2})_{L^2(\gamma)}.$$

Для стандартной гауссовской меры γ на $\mathbb{R}^\infty$ пространство Камерона — Мартина есть обычное l^2. Если $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H, то также возникают проекторы $P_n x=\sum_{i=1}^n \widehat{e}_i(x)e_i$, причем для всякого сепарабельного банахова пространства (E, p_E), непрерывно вложенного в X и имеющего γ-меру 1, верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} p_E(x - P_n x) = 0$ для γ-почти всех $x \in E$. Как и выше, вводятся функции

$$\varphi_n(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{e}_i(x)^2/n\right)^{-1/2},$$

а также вероятностные меры σ_n на сферах радиуса $n^{1/2}$ в n-мерных подпространствах H_n, порожденных $e_1, \ldots, e_n$: мера σ_n есть образ γ при отображении $x \mapsto \varphi_n(x) P_n x$. Теорема 3.1 остается в силе в этой более общей ситуации с тем же доказательством.

В работах [7, 8] получены оценки по вариации для конечномерных проекций на $\mathbb{R}^k$ при некоторых соотношениях между k и n (например, в случае $k = o(n)$). Разумеется, обычной сходимости по вариации σ_n к γ нет ввиду взаимной сингулярности всех мер σ_n и γ.

Теперь рассмотрим более общую ситуацию, когда произвольные борелевские вероятностные меры на произвольном сепарабельном пространстве Фреше (полном метризуемом локально выпуклом пространстве) слабо сходятся к борелевской мере.

Сначала установим вспомогательный результат в духе известного критерия равномерной интегрируемости Валле-Пуссена (см. [25, теорема 4.5.9]).

Лемма 3.3. *Пусть $(X, \mathscr{A})$ — измеримое пространство, $\mathscr{P}$ — некоторое семейство вероятностных мер на нем и функция $f \geq 0$ измерима относительно $\mathscr{A}$ и равномерно интегрируема относительно мер из $\mathscr{P}$, т. е.*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\mu\in\mathscr{P}} \int\limits_{\{f\geq R\}} f\, d\mu = 0.$$

Тогда найдутся такие неотрицательные строго возрастающие выпуклые функции Φ и Ψ на $[0, +\infty)$, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\Psi(t)}{t} = +\infty, \tag{3.3}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\Psi^{-1}(t)}{\Phi^{-1}(t)} = +\infty, \tag{3.4}$$

причем функции $\Phi \circ f$ и $\Psi \circ f$ равномерно интегрируемы относительно мер из $\mathscr{P}$.

Доказательство. В силу условия найдутся возрастающие к бесконечности числа N_k, для которых

$$\sup_{\mu\in\mathscr{P}} \int\limits_{\{f\geq N_k\}} f\, d\mu \leq 8^{-k}. \tag{3.5}$$

Ниже эти числа будут увеличены с некоторыми дополнительными ограничениями. Положим $\varphi(t) = \psi(t) = 1$ при $t < N_1$, $\varphi(t) = 4^k$ и $\psi(t) = 2^k$ при $N_k < t < N_{k+1}$,

$$\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(s)\, ds, \quad \Psi(t) = \int\limits_0^t \psi(s)\, ds.$$

Укажем дополнительные ограничения на числа N_k, с учетом которых они выбираются индуктивно путем увеличения исходных чисел (так что (3.5) остается в силе):

$$N_{k+1} > \Phi(N_k) + \Psi(N_k) + 4^k N_k. \tag{3.6}$$

Функции Φ и Ψ выпуклы, строго возрастают и удовлетворяют (3.3). Выполнено также первое условие в (3.4). Проверим второе. Предположим, что при некотором $c > 0$ имеется последовательность точек $y_i \to \infty$, для которых $\Phi^{-1}(y_i) \geq c\Psi^{-1}(y_i)$. Рассмотрим одну из таких точек y. Пусть $y = \Phi(x) = \Psi(z)$, где $x \in (N_k, N_{k+1}]$. Заметим, что $z > x$. Возможны два случая: $z < N_{k+1}$ и $z \in [N_{k+1}, N_{k+2}]$. Случай $z > N_{k+2}$ невозможен при больших k ввиду (3.6), так как $\Phi(x) = \Psi(z) > z > N_{k+2}$, но $\Phi(x) \leq \Phi(N_{k+1}) < N_{k+2}$. В первом случае на отрезке $[N_k, N_{k+1}]$ функции Φ и Ψ имеют вид

$$\Phi(t) = \Phi(N_k) + 4^k(t - N_k) \quad \text{и} \quad \Psi(t) = \Psi(N_k) + 2^k(t - N_k)$$

соответственно. Поэтому

$$\Phi(N_k) + 4^k(x - N_k) = \Psi(N_k) + 2^k(z - N_k). \tag{3.7}$$

Пусть $x = \alpha N_k$ и $z = q\alpha N_k$. Ясно, что $\alpha > 1$, $q > 1$. Заметим, что

$$(4^{k-1} - 1)N_k \leq \Phi(N_k) \leq 4^{k-1}N_k,$$

ибо $\varphi(t) \leq 4^{k-1}$ при $t \leq N_k$ и

$$\Phi(N_k) \geq 4^{k-1}(N_k - N_{k-1}) \geq 4^{k-1}(1 - 4^{1-k})N_k = (4^{k-1} - 1)N_k.$$

Кроме того, $\Psi(N_k) < \Phi(N_k)/2$ при больших k, откуда $\Phi(N_k) - \Psi(N_k) > \Phi(N_k)/2$. Значит, из приведенной выше двусторонней оценки получаем

$$\Phi(N_k) - \Psi(N_k) = \beta 4^k N_k, \quad \text{где } 1/9 \leq \beta \leq 1/4.$$

Таким образом, из (3.7) после деления на $4^k N_k$ находим

$$2^{-k}(q\alpha - 1) = \beta + \alpha - 1 \geq 1/9.$$

В силу нашего предположения $q \leq c^{-1}$. Поэтому предыдущее равенство не может выполняться при больших k. В самом деле, при $\alpha \leq 2$ левая часть становится меньше $1/9$ при больших k. При $\alpha > 2$ имеем

$$\alpha(1 - 2^{-k}q) = 1 - \beta - 2^{-k} \leq 1,$$

откуда $1 - 2^{-k}q \leq 1/2$, что невозможно при больших k виду оценки $q \leq c^{-1}$.

Перейдем к случаю $z \in [N_{k+1}, N_{k+2}]$. Здесь

$$y = \Phi(x) = \Phi(N_k) + 4^k(x - N_k) = \Psi(z) = \Psi(N_k) + 2^k(N_{k+1} - N_k) + 2^{k+1}(z - N_{k+1}).$$

Значит,

$$\Phi(N_k) - 4^k N_k - \Psi(N_k) + 2^k N_k = -2^k N_{k+1} + 2^{k+1}z - 4^k x. \tag{3.8}$$

При больших k имеем $4^k c > 2^{k+1}$. Так как $x \geq cz$, то правая часть (3.8) меньше $-2^k N_{k+1}$. Это приводит к противоречию, ибо левая часть по модулю меньше N_{k+1} в силу (3.6).

Наконец, равномерная интегрируемость функции Φ следует из того, что на $[N_k, N_{k+1}]$ выполнена оценка $\Phi(t) \leq 4^k t$, так как

$$\Phi(t) = \Phi(N_k) + 4^k(t - N_k) \leq 4^{k-1}N_k + 4^k(t - N_k) \leq 4^k t$$

для всех $\mu \in \mathscr{P}$. Следовательно,

$$\int_{\{N_k \le f < N_{k+1}\}} \Phi(f)\, d\mu \le 4^k \int_{\{N_k \le f < N_{k+1}\}} f\, d\mu \le 2^{-k}.$$

Значит,

$$\int_{\{\Phi(f) \ge \Phi(N_k)\}} \Phi(f)\, d\mu \le 2^{1-k}.$$

Меньшая функция Ψ тоже равномерно интегрируема. $\square$

Отметим, что второе условие в (3.4) не вытекает из первого. Например, если $\Phi(t) = e^{2t}$ и $\Psi(t) = e^t$, то $\Phi^{-1}(t) = \Psi^{-1}(t)/2$.

Теорема 3.4. *Пусть X — сепарабельное пространство Фреше и семейство $\mathscr{P}$ борелевских вероятностных мер равномерно плотно на X. Предположим, что существует такое непрерывно вложенное в X банахово пространство Y с нормой p_Y, что замкнутый единичный шар U_Y из Y является борелевским в X, $\mu(Y) = 1$ при всех $\mu \in \mathscr{P}$ и функция p_Y равномерно интегрируема относительно мер из $\mathscr{P}$. Тогда найдется такое компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство E с нормой p_E, что $\mu(E) = 1$ для всех $\mu \in \mathscr{P}$, норма p_E тоже равномерно интегрируема относительно мер из $\mathscr{P}$, причем семейство $\mathscr{P}$ равномерно плотно и на пространстве (E, p_E).*

Доказательство. Можно считать, что шар U_Y замкнут в X, перейдя к его замыканию U в X, которое служит замкнутым единичным шаром в банаховом пространстве E_U, равном линейной оболочке U и наделенном нормой p_U, являющейся функционалом Минковского замкнутого ограниченного множества U (см. [21, § 8.6.5]). Ясно, что E_U также непрерывно вложено в X и $Y \subset E_U$, причем $p_U \le p_Y$ на Y, значит, E_U удовлетворяет тем же условиям, что и Y. Это обеспечивает возможность перехода к случаю замкнутого в X шара U_Y. Применим к функции p_Y доказанную выше лемму и возьмем указанные там функции Φ и Ψ. В силу равномерной плотности данных мер в каждом замкнутом множестве $Y_k = \{p_Y \le \Phi^{-1}(k)\}$ есть такой компакт S_k, что

$$\sup_{\mu \in \mathscr{P}} \mu(Y_k \backslash S_k) \le 2^{-k}.$$

Положим $\delta_k = \Phi^{-1}(k)/\Psi^{-1}(k)$. Тогда $\delta_k \to 0$. Заметим, что множество

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \delta_k (\Phi^{-1}(k))^{-1} S_k$$

имеет компактное замыкание в X. В самом деле, если дана бесконечная последовательность $\{a_n\} \subset A$, то либо некоторая ее подпоследовательность лежит в каком-то из компактов $\delta_k(\Phi^{-1}(k))^{-1} S_k$, либо $a_n \to 0$ в Y, а тогда и в X, так как

$$p_Y(\delta_k(\Phi^{-1}(k))^{-1} a) = \delta_k(\Phi^{-1}(k))^{-1} p_Y(a) \le \delta_k(\Phi^{-1}(k))^{-1} \Phi^{-1}(k) = \delta_k$$

при $a \in S_k$. Пусть W — замкнутая абсолютно выпуклая оболочка A и E_W — ассоциированное с W банахово пространство, т. е. линейная оболочка W, наделенная нормой p_W, равной функционалу Минковского множества W, которое становится замкнутым единичным шаром в E_W. Поскольку $A \subset U_Y$, то $W \subset U_Y$, поэтому вложение $E_W \to Y$ непрерывно. Множество E_W является борелевским в X, причем $\mu(E_W)=1$ для всех $\mu\in\mathscr{P}$. Это следует из того, что $S_k\subset E_W$ при всех k, причем в силу неравенства Чебышёва

$$\mu(X\backslash Y_k)\le(\Phi^{-1}(k))^{-1}\int\limits_X p_Y\,d\mu$$

для всех $\mu\in\mathscr{P}$, где интегралы в правой части равномерно ограничены по $\mu\in\mathscr{P}$ некоторым числом C в силу равномерной интегрируемости p_Y, откуда $\mu(X\backslash S_k)\le 2^{-k}+C(\Phi^{-1}(k))^{-1}\to 0$.

Покажем, что

$$\sup_{\mu\in\mathscr{P}}\int\limits_{E_W}\Psi(p_W)\,d\mu<\infty.$$

Для этого оценим

$$\mu(\Psi(p_W)>k)=\mu(p_W>\Psi^{-1}(k))=\mu(p_W>\delta_k^{-1}\Phi^{-1}(k)),$$

где $\mu\in\mathscr{P}$. Множество $\bigl\{p_W\le\delta_k^{-1}\Phi^{-1}(k)\bigr\}$ содержит S_k, поскольку множество $W=\{p_W\le 1\}$ содержит $\delta_k(\Phi^{-1}(k))^{-1}S_k$. Поэтому

$$\mu\bigl(p_W>\delta_k^{-1}\Phi^{-1}(k)\bigr)\le\mu(X\backslash S_k)\le\mu(X\backslash Y_k)+2^{-k},$$

что дает оценку

$$\mu(\Psi(p_W)>k)\le\mu(p_Y>\Phi^{-1}(k))+2^{-k}=\mu(\Phi(p_Y)>k)+2^{-k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int\limits_X\Psi(p_W)\,d\mu=\int\limits_0^\infty\mu(\Psi(p_W)>t)\,dt&\le\sum_{k=0}^\infty\mu(\Psi(p_W)>k)\\&\le\sum_{k=0}^\infty\mu(\Phi(p_Y)>k)+2\le 3+\int\limits_X\Phi(p_Y)\,d\mu.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sup_{\mu\in\mathscr{P}}\int\limits_{E_W}\Psi(p_W)\,d\mu\le 3+\sup_{\mu\in\mathscr{P}}\int\limits_X\Phi(p_Y)\,d\mu<\infty.$$

Известно (см. [26, теорема 2.5.10]), что найдется банахово пространство X_1, компактно вложенное в X, для которого $E_W\subset X_1$, причем тождественное вложение компактно. По теореме Дэвиса — Фигеля — Джонсона — Пелчинского (см. [27] или [21, теорема 8.6.25]) существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство (E,p_E), содержащее E_W и компактно вложенное в X_1, для которого тождественное вложение $E_W\subset E$ тоже компактно. Норма p_E равномерно интегрируема относительно мер из $\mathscr{P}$, так как $p_E\le Cp_W$ с некоторой константой C. Борелевские множества из (E,p_E) борелевы в X, поэтому борелевские меры на X имеют сужения на E. Ясно, что $\mu(E)=1$ для всех $\mu\in\mathscr{P}$. Равномерная плотность мер из $\mathscr{P}$ на E следует из неравенства Чебышёва

$$\mu(p_W>k)\le k^{-1}\int\limits_{E_W}p_W\,d\mu$$

с учетом равномерной ограниченности интегралов от p_W по мерам из $\mathscr{P}$ (вытекающей из равномерной интегрируемости p_W) и компактности всех множеств $\{p_W \le k\}$ в пространстве E. $\square$

Отметим, что если Y сепарабельно, то шар U_Y автоматически оказывается борелевским множеством в X (см. [25, теорема 6.8.6]). Если шар U_Y замкнут в X (что автоматически имеет место, если Y рефлексивно), то построенное пространство E содержится в Y. Конечно, вместо борелевости U_Y достаточно измеримости относительно мер μ_n.

Следствие 3.5. *Пусть X — сепарабельное пространство Фреше и последовательность вероятностных борелевских мер μ_n слабо сходится к борелевской вероятностной мере μ_0. Предположим, что существует такое непрерывно вложенное в X банахово пространство Y с нормой p_Y, что замкнутый единичный шар U_Y из Y замкнут в X, $\mu_n(Y) = 1$ при всех $n \ge 0$ и функция p_Y равномерно интегрируема относительно мер μ_n. Тогда найдется такое компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, что $E \subset Y$, $\mu_n(E) = 1$ при всех $n \ge 0$ и $\|\mu_0 - \mu_n\|_{K,p_E} \to 0$.*

Доказательство. Слабо сходящаяся последовательность борелевских мер на сепарабельном пространстве Фреше равномерно плотна по теореме Прохорова, поэтому применима предыдущая теорема. Пусть (E, p_E) — банахово пространство, построенное в этой теореме. Так как меры μ_n равномерно плотны и на (E, p_E), то они слабо сходятся к μ_0 также на (E, p_E). В самом деле, в силу их равномерной плотности всякая подпоследовательность в $\{\mu_n\}$ содержит еще одну подпоследовательность, которая слабо сходится на E. Тогда она сходится именно к μ_0 ввиду слабой сходимости к μ_0 на X. С учетом равномерной интегрируемости p_E это дает сходимость $\|\mu_0 - \mu_n\|_{K,p_E} \to 0$. $\square$

Приведем еще одно утверждение, в котором строится подпространство E, большее подпространства Y. Конечно, такое большее подпространство может не быть компактно вложенным, если Y было лишь непрерывно вложено. Поэтому в этом утверждении вложение Y предполагается компактным.

Предложение 3.6. *Пусть X — сепарабельное пространство Фреше и последовательность борелевских вероятностных мер μ_n слабо сходится к борелевской мере μ_0. Предположим, что существует такое компактно вложенное в X банахово пространство Y с нормой p_Y, что $\mu_n(Y) = 1$ при всех $n \ge 0$ и функция p_Y равномерно интегрируема относительно мер μ_n. Тогда найдется такое компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, что $Y \subset E$ и $\|\mu_0 - \mu_n\|_{K,p_E} \to 0$. Более того, в качестве E можно взять любое компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство, в которое Y компактно вложено.*

Доказательство. Пусть E — компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство с нормой p_E, в которое Y компактно вложено. Известно, что такие пространства существуют (см. [21, теорема 8.6.25]). При этом можно считать, что $p_E \le p_Y$ на Y. Последовательность мер μ_n равномерно плотна на E, ибо $\sup_n \mu_n(p_Y \ge R) \to 0$ при $R \to \infty$ и множества $\{p_Y \le R\}$ компактны в E. По теореме Прохорова всякая подпоследовательность в $\{\mu_n\}$ имеет дальнейшую подпоследовательность, слабо сходящуюся на E. В силу слабой сходимости на X к μ_0 получаем, что и на E вся последовательность слабо сходится к μ_0. Чтобы получить соотношение $\|\mu_0-\mu_n\|_{K,p_E}\to 0$, остается доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E p_E\,d\mu_n=\int\limits_E p_E\,d\mu_0.$$

Это равенство верно в силу [23, теорема 4.3.15], так как функция p_E непрерывна на E и равномерно интегрируема относительно мер μ_n ввиду оценки $p_E\le p_Y$ на Y. $\square$

Замечание 3.7. Из доказательств и сказанного в п. 2 ясно, что теорема 3.4, следствие 3.5 и предложение 3.6 остаются в силе и для знакопеременных мер, если условие равномерной интегрируемости p_Y выполнено для вариаций рассматриваемых мер, в следствии 3.5 и предложении 3.6 вместо $\mu_n(Y)=1$ требуется $|\mu_n|(X\backslash Y)=0$, в теореме 3.4 семейство $\mathscr{P}$ ограничено и вариации мер из $\mathscr{P}$ равномерно плотны, а условие $\mu(E)=1$ для всех $\mu\in\mathscr{P}$ заменено условием $|\mu|(X\backslash E)=0$ при всех $\mu\in\mathscr{P}$.

Отметим, что качественное утверждение первой теоремы (без оценки скорости сходимости) вытекает из второй теоремы или из предложения, если уже известна слабая сходимость мер σ_n к γ (которая, однако, в первой теореме получается попутно, а не предполагается заранее известной). В самом деле, пусть (E,p_E) — сепарабельное банахово пространство, непрерывно вложенное в $\mathbb{R}^\infty$ и имеющее γ-меру 1. Борелевские множества из E борелевы в $\mathbb{R}^\infty$ (см. [25, теорема 6.8.6]), поэтому сужение γ на E дает гауссовскую меру на E. Известно, что существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство E_0, компактно вложенное в E и имеющее γ-меру 1 (см. [25, теорема 7.12.4]; для этого гауссовость не нужна). Поэтому можно считать E компактно вложенным в $\mathbb{R}^\infty$. Отметим, что в $\mathbb{R}^\infty$ ограниченные множества имеют компактные замыкания, так что единичный шар из E лежит в компакте (он не обязан быть замкнутым в $\mathbb{R}^\infty$, примером служит пространство c_0). Как уже отмечалось выше, $\sigma_n(E)=1$ для всех n. Чтобы установить равномерную интегрируемость функции p_E относительно мер μ_n, достаточно получить оценку

$$\sup_{n\ge 3}\int\limits_E p_E^{3/2}\,d\sigma_n\le 3\|p_E\|_{L^4(\gamma)}<\infty.$$

Такая оценка вытекает из неравенства Гёльдера с показателями 4/3 и 4 применительно к интегралу

$$\int\limits_E p_E^{3/2}\,d\sigma_n=\int\limits_E \varphi_n^{3/2}p_E\circ P_n\,d\gamma\le\biggl(\int\limits_E\varphi_n^2\,d\gamma\biggr)^{3/4}\biggl(\int\limits_E(p_E\circ P_n)^4\,d\gamma\biggr)^{1/4}$$
$$\le 3\biggl(\int\limits_E(p_E\circ P_n)^4\,d\gamma\biggr)^{1/4}\le 3\biggl(\int\limits_E p_E^4\,d\gamma\biggr)^{1/4},$$

где мы использовали равенство (3.1) и упомянутый выше факт, что для всякой борелевской полунормы p, заданной на линейном подпространстве γ-меры 1, при $k>0$ верно неравенство

$$\int\limits_X p(P_nx)^k\,\gamma(dx)\le\int\limits_X p(x)^k\,\gamma(dx),$$

поскольку

$$\int_X l(P_n x)^2\,\gamma(dx) \le \int_X l(x)^2\,\gamma(dx)$$

для всякого непрерывного линейного функционала l. В самом деле, в данном случае это условие также выполнено, так как $l(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$, поэтому интеграл от l^2 равен $\sum_{i=1}^{N} c_i^2$, а интеграл от $(l \circ P_n)^2$ равен $\sum_{i=1}^{\min(N,n)} c_i^2$.

В последнее время изучаются более общие псевдометрики Канторовича на пространствах мер на неметризуемых вполне регулярных пространствах (см., например, [28–30]). Для таких псевдометрик возможно получение аналогов результатов этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Borel E.* Introduction géométrique à quelques théories physiques. Paris: Gauthier-Villars, 1914.

2. *Gâteaux R.* Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel // Bull. Soc. Math. France. 1919. V. 47. P. 48–67.

3. *Lévy P.* Leçons d'analyse fonctionnelle. Paris: Gauthier-Villars, 1922.

4. *Hida T., Nomoto H.* Gaussian measure on the projective limit space of spheres // Proc. Japan Acad. 1964. V. 40. P. 301–304.

5. *Umemura Y., Kôno N.* Infinite dimensional Laplacian and spherical harmonics // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A. 1965/66. V. 1. P. 163–186.

6. *Mckean H.* Geometry of differential space // Ann. Prob. 1973. V. 1. P. 197–206.

7. *Diaconis P., Freedman D.* A dozen de Finetti-style results in search of a theory // Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. et Statist. 1987. V. 23, suppl. N 2. P. 397–423.

8. *Stam A. J.* Limit theorems for uniform distributions on spheres in high-dimensional Euclidean spaces // J. Appl. Probab. 1982. V. 19, N 1. P. 221–228.

9. *Chatterjee S., Meckes E.* Multivariate normal approximation using exchangeable pairs // ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 2008. V. 4. P. 257–283.

10. *Peterson A., Sengupta A. N.* The Gaussian limit for high-dimensional spherical means // J. Funct. Anal. 2019. V. 276, N 3. P. 815–866.

11. *Ledoux M.* The concentration of measure phenomenon. Rhode Island, Providence: Am. Math. Soc., 2001.

12. *Villani C.* Optimal transport, old and new. New York: Springer, 2009.

13. *Зорич В. А.* Многомерная геометрия, функции очень многих переменных и вероятность // Теория вероятностей и ее применения. 2014. Т. 59, № 3. С. 436–451.

14. *Bogachev V. I.* Gaussian measures. Rhode Island, Providence: Am. Math. Soc., 1998.

15. *Богачев В. И., Колесников А. В., Шапошников С. В.* Задачи Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки.. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2023.

16. *Канторович Л. В.* О перемещении масс // Докл. АН СССР. 1942. Т. 37, № 7-8. С. 227–229.

17. *Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш.* Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1058–1061.

18. *Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш.* Об одном пространстве вполне аддитивных функций множества // Вестн. ЛГУ. 1958. № 7, вып. 2. С. 52–59.

19. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

20. *Богачев В. И., Колесников А. В.* Задача Монжа — Канторовича: достижения, связи и перспективы // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, № 5. С. 3–110.

21. *Богачев В. И., Смолянов О. Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2020.

22. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. 5-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006.

23. *Bogachev V. I.* Weak convergence of measures. Rhode Island, Providence: Am. Math. Soc., 2018.
24. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. 7-е изд. М.: Наука, 1970.
25. *Bogachev V. I.* Measure theory. V. 1, 2. New York: Springer, 2007.
26. *Bogachev V. I., Smolyanov O. G.* Topological vector spaces. Cham: Springer, 2017.
27. *Davis W.J., Figiel T., Johnson W.B., Pełczyński A.* Factoring weakly compact operators // J. Funct. Anal. 1974. V. 17. P. 311–327.
28. *Afonin K. A., Bogachev V. I.* Kantorovich type topologies on spaces of measures and convergence of barycenters // Commun. Pure Appl. Anal. 2023. V. 22, N 2. P. 597–612.
29. *Афонин К. А.* Двойственность в задаче Канторовича с фиксированным барицентром и барицентры функционалов // Функцион. анализ и его прил. 2024. Т. 58, № 2. С. 5–22.
30. *Арсенович М., Богачев В. И., Крстич М.* Интегрирование функций со значениями в пространствах мер // Тр. МИАН. 2025. Т. 331.

Поступила в редакцию 20 декабря 2025 г.
После доработки 20 декабря 2025 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Богачев Владимир Игоревич (ORCID 0000-0001-5249-2965)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119991;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
факультет математики,
ул. Усачева, 6, Москва 119048;
Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет,
ул. Новокузнецкая, 23б, Москва 115184
vibogach@mail.ru