Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 512.55

ГРУППА ВНЕШНИХ АВТОМОРФИЗМОВ МАТРИЧНЫХ КОЛЕЦ

А. Н. Абызов, Д. Т. Тапкин

Аннотация. Согласно теореме Айзека группа внешних автоморфизмов матричной алгебры $M_n(R)$, где R — факториальное кольцо, тривиальна для каждого $n \in \mathbb{N}$. В работе изучаются обобщения этой теоремы. Доказано, что группа внешних автоморфизмов алгебры матриц над произвольной HCF-областью тривиальна. Для алгебры формальных матриц $\mathbb{M}_n(R; s)$ над факториальным кольцом R найдена группа внешних автоморфизмов. В качестве следствия получен критерий изоморфизма алгебры $\mathbb{M}_n(R; s)$ и алгебры формальных матриц порядка n со значением в кольце R.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.201

Ключевые слова: факториальные кольца, группа внешних автоморфизмов, кольцо формальных матриц.

Введение

В работах Сколема [1] и Нётер [2] независимо была доказана теорема, согласно которой любой изоморфизм между двумя простыми подалгебрами конечномерной простой центральной алгебры A индуцируется внутренним автоморфизмом A. В частности, из теоремы Нётер — Сколема следует, что для каждого поля F всякий автоморфизм матричной алгебры $M_n(F)$ является внутренним. Автоморфизмы матричных алгебр над коммутативными кольцами изучались в работе [3]. В частности, в этой работе было показано, что для произвольного коммутативного кольца R и каждого $n \in \mathbb{N}$ группа $\mathrm{Out}(M_n(R))$ является периодической, у которой порядок каждого элемента делит n. В работе [4] было показано, что для произвольной области Безу R и произвольного $n \in \mathbb{N}$ все автоморфизмы R-алгебры $M_n(R)$ являются внутренними. Автоморфизмы колец формальных матриц и условия, при которых у колец формальных верхнетреугольных матриц и близких к ним колец все автоморфизмы являются внутренними, в последнее время были изучены в работах П. А. Крылова, Ц. Д. Норбосамбуева и А. А. Туганбаева (см. [5–7]).

В работе изучены некоторые обобщения результата из [3], согласно которому для каждого факториального кольца R все автоморфизмы R-алгебры $M_n(R)$ являются внутренними. В первом пункте показано, что для произвольной правой области Оре R, у которой каждый конечнопорожденный проективный правый идеал является свободным, всякий автоморфизм кольца $M_n(R)$ представим в виде композиции внутреннего автоморфизма $M_n(R)$ и автоморфизма $M_n(R)$,

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 25-11-00348) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

который индуцируется автоморфизмом кольца R. Следствием этого утверждения является тривиальность группы внешних автоморфизмов алгебры $M_n(R)$ для произвольной HCF-области R. Во втором пункте изучены кольца формальных матриц со значением в факториальном кольце. Получено описание группы внешних автоморфизмов для алгебры $\mathbb{M}_n(R;s)$ при $n \geq 3$. Изучено одно из обобщений данной алгебры, в котором все мультипликативные коэффициенты являются степенью одного элемента s. Для таких алгебр при некоторых ограничениях удалось описать группу внешних автоморфизмов. В качестве следствия получены теоремы об изоморфизмах.

Приведем предварительные факты из теории колец формальных матриц, необходимые в дальнейшем. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — кольца, M_{ij} — (R_i, R_j)-бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, для всех $1 \leq i,j \leq n$. Пусть также $\varphi_{ijk} : M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$ будут (R_i, R_k)-бимодульными гомоморфизмами с той оговоркой, что φ_{iij} и φ_{ijj} — канонические изоморфизмы для всех $1 \leq i,j \leq n$. Введем обозначение $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b)$ для $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$. Через K обозначим множество всех $n \times n$-матриц (m_{ij}) с элементами $m_{ij} \in M_{ij}$ для всех $1 \leq i,j \leq n$. Простая проверка показывает, что относительно обычных операций сложения и умножения K будет кольцом, если и только если $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kl}$, $c \in M_{lj}$, $1 \leq i,k,l,j \leq n$. Полученное кольцо K называется *кольцом формальных матриц* порядка n и обозначается через $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$. В частном случае, когда $n = 2$, эти кольца называют *кольцами контекста Мориты.*

Рассмотрим кольца формальных матриц порядка n со значением в некотором кольце R. Иными словами, рассмотрим кольца формальных матриц $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n, в которых $M_{ij} = R$ для всех $1 \leq i,j \leq n$. Нетрудно показать (см. к примеру [8]), что произведение в этих кольцах определяется некоторым набором $\eta = \{\eta_{ikj}\}$ центральных элементов кольца R:

$$\varphi_{ikj}(a \otimes b) = \varphi_{ikj}(1 \otimes 1)ab = ab\varphi_{ikj}(1 \otimes 1) := \eta_{ikj}\, ab, \quad \eta_{ikj} \in C(R).$$

Эти кольца формальных матриц обозначают через $K_n(R;\eta)$. Нетрудно видеть, что из свойства ассоциативности произведения получаем равенство $\eta_{ijk}\eta_{ikl} = \eta_{ijl}\eta_{jkl}$, верное для всех $1 \leq i,j,k,l \leq n$. В случае колец формальных матриц второго порядка произведение определяется элементом $s = \eta_{121} = \eta_{212}$. В статье [9] эти кольца формальных матриц были обозначены через $K_s(R)$. В работе [9] была изучена проблема изоморфизма для таких колец.

Теорема 1.1 [9, теорема 1.5]. *Пусть R — коммутативное кольцо, s и t — некоторые его элементы, причем хотя бы один из них не является делителем нуля. Кольца $K_s(R)$ и $K_t(R)$ изоморфны в точности тогда, когда существуют такой обратимый элемент $v \in R$ и такой автоморфизм α кольца R, что $t = v\alpha(s)$.*

Впоследствии в статьях [10–13, 8] этот результат был доказан при различных условиях на кольцо R, а также результат был перенесен на кольца формальных матриц больших размерностей. Так, в статье [8] был рассмотрен следующий класс колец формальных матриц. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и положим $\delta_{ijk} = 1 + \delta_{ik} - \delta_{ij} - \delta_{jk}$, где под δ понимается символ Кронекера. Для элемента $s \in C(R)$ зададим $\eta_{ijk} = s^{\delta_{ijk}}$, $1 \leq i,j,k \leq n$. Иными словами,

$$s_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = k, \\ s, & \text{если } i,j,k \text{ различны}, \\ s^2, & \text{если } i = k \neq j. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что мы получаем корректно определенное кольцо формальных матриц $K_n(R; s^{\delta_{ijk}})$, обозначаемое через $\mathbb{M}_n(R; s)$. При этом $\mathbb{M}_2(R; s) = K_{s^2}(R)$. Для данного класса колец была поставлена и решена проблема изоморфизма.

Теорема 1.2 [8, теорема 18]. *Пусть R — коммутативное кольцо такое, что $Z(R) \subseteq J(R)$, $s, t \in R$ и $n \geq 3$. Тогда кольца $\mathbb{M}_n(R; s)$ и $\mathbb{M}_n(R; t)$ изоморфны в точности тогда, когда существуют такой обратимый элемент $v \in R$ и такой автоморфизм α кольца R, что $t = v\alpha(s)$.*

Как дальнейшее обобщение конструкции в [10] был введен класс колец формальных матриц $M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$. А именно, фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и возьмем $\beta_1, \ldots, \beta_n \in C(R)$. Для всех $1 \leq i, j, k \leq n$ положим

$$\eta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = k, \\ \beta_j, & \text{если } i, j, k \text{ различны}, \\ \beta_i\beta_j, & \text{если } i = k \neq j. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что мы получаем корректно определенное кольцо формальных матриц $K_n(R; \eta_{ijk})$, обозначаемое через $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$. В этих обозначениях $\mathbb{M}_n(R; s) = \mathbb{M}_{s,\ldots,s}(R)$. Однако для данного класса колец проблема изоморфизма была решена лишь в частных случаях. При этом группа внешних автоморфизмов была описана только для алгебр $K_s(R)$ над факториальными кольцами.

Теорема 1.3 [14, теорема 6]. *Пусть кольцо R факториально и $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Тогда*

$$\mathrm{Out}_R(K_s(R)) \cong (S_2)^k$$

для некоторого натурального числа k. В частности, группа $\mathrm{Out}_R(K_s(R))$ является абелевой.

1. Автоморфизмы матричных алгебр над HCF-областями

Пусть M — правый R-модуль. Множество всех элементов m из M, у которых аннулятор $\mathrm{ann}(m) = \{r \in R \mid mr = 0\}$ существен в R_R, образует подмодуль M и обозначается через $\mathrm{Sing}(M)$. Кольцо R называется *несингулярным справа*, если $\mathrm{Sing}(R_R) = 0$.

Модуль M называется *однородным,* если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Модуль M называется *модулем конечной равномерной размерности,* если для M существует такое $n \in \mathbb{N}$, что M является существенным расширением прямой суммы n ненулевых однородных модулей. При этом число n определено однозначно и называется *размерностью Голди* модуля M. Размерность Голди модуля M обозначается через $\mathrm{Gdim}(M)$

Лемма 2.1. *Пусть R — несингулярное справа кольцо, у которого всякий конечнопорожденный проективный правый идеал является свободным, и P — ненулевой конечнопорожденный проективный однородный правый R-модуль. Тогда $P \cong R_R$.*

Доказательство. Поскольку модуль P проективен и конечнопорожден, то он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} e_iR$, где $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис модуля F. Так как $P \neq 0$, то для некоторого $1 \leq k \leq n$ ограничение канонической проекции $\pi_k : \bigoplus_{i=1}^n e_iR \to e_kR$ на P является ненулевым гомоморфизмом. Покажем, что $\pi_k|_P$ — мономорфизм. Пусть $N = \bigoplus_{i \neq k} e_iR$. Предположим, что $\mathrm{Ker}(\pi_k|_P) = P \cap N \neq 0$. В силу однородности модуля P подмодуль $P \cap N$ существен в P. Тогда $P/P \cap N$ — сингулярный модуль. Поскольку $P/P \cap N \cong \pi_k(P)$, то $\mathrm{Sing}(\pi_k(P)) = \pi_k(P) \neq 0$. Так как $\mathrm{Sing}(R_R) = 0$, то $\mathrm{Sing}(F) = 0$. Из полученного противоречия следует равенство $P \cap N = 0$. Таким образом, $P \cong \pi_k(P)$ и, следовательно, модуль P изоморфен некоторому подмодулю модуля R_R. Поскольку по условию всякий конечнопорожденный проективный идеал кольца R является свободным, то модуль P свободен. Так как по условию модуль P неразложим, то $P \cong R_R$. $\square$

Пусть M — произвольный правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Через M^* будем обозначать левый R-модуль $\mathrm{Hom}_R(M, R_R)$. Если $f \in M^*, m \in M$, то через $[m, f]$ обозначим эндоморфизм модуля M, при котором $[m, f](n) = mf(n)$ для каждого $n \in M$. Если τ — автоморфизм кольца R, то эндоморфизм аддитивной группы модуля M называется *τ-линейным*, если равенство $f(mr) = f(m)\tau(r)$ имеет место для каждых $m \in M$ и $r \in R$.

Теорема 2.2. *Пусть R — правое кольцо Оре, у которого всякий конечнопорожденный проективный правый идеал является свободным, и M — конечнопорожденный свободный правый R-модуль. Тогда для всякого автоморфизма φ кольца $\mathrm{End}_R(M)$ существуют автоморфизм τ кольца R и τ-линейный автоморфизм f модуля M такие, что равенство*

$$\varphi(\alpha) = f\alpha f^{-1}$$

верно для каждого эндоморфизма α модуля M. В частности, если кольцо R коммутативно и φ R-линейно, то f принадлежит $\mathrm{End}_R(M)$.

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис модуля M и $\{e^i\}_{i=1}^n$ — дуальный к нему базис модуля M^*. Для каждого i через π_i обозначим $\varphi([e_i, e^i])$. Поскольку для каждого i эндоморфизм $[e_i, e^i]$ является естественной проекцией модуля M на его прямое слагаемое e_iR относительно разложения $M = \bigoplus_{i=1}^n e_iR$ и $[e_1, e^1] + \ldots + [e_n, e^n] = 1$, то $\{\pi_i\}_{i=1}^n$ — семейство ненулевых ортогональных идемпотентов кольца $\mathrm{End}_R(M)$ и $\pi_1 + \ldots + \pi_n = 1$. Так как размерность Голди модуля M равна n, то для каждого i модуль $\pi_i(M)$ является однородным и, следовательно, согласно лемме 2.1 $\pi_i(M) = f_iR$ для некоторого $f_i \in M$.

Для каждых $i \neq 1$ и $r \in R$ выполнены равенства

$$[e_i, e^i][e_1r, e^1] = [e_1r, e^1][e_i, e^i] = 0$$

и, следовательно,

$$\pi_i\varphi([e_1r, e^1]) = \varphi([e_1r, e^1])\pi_i = 0.$$

Тогда для каждого $r \in R$ однозначно определен элемент $\tau(r)$, для которого выполнены равенства

$$\varphi([e_1r, e^1])(f_1) = f_1\tau(r) \quad \text{и} \quad \varphi([e_1r, e^1]) = [f_1\tau(r), f^1].$$

Заметим, что если кольцо R коммутативно и φ — автоморфизм R-алгебры $\mathrm{End}_R(M)$, то τ является тождественным автоморфизмом кольца R. Покажем, что $\tau : R \to R$ является гомоморфизмом колец. Пусть r_1, r_2 — произвольный элементы из кольца R. Имеют место равенства

$$f_1\tau(r_1 + r_2) = \varphi([e_1(r_1 + r_2), e^1])(f_1) = \varphi([e_1r_1, e^1] + [e_1r_2, e^1])(f_1)$$
$$= (\varphi([e_1r_1, e^1]) + \varphi([e_1r_2, e^1]))(f_1) = \varphi([e_1r_1, e^1])(f_1) + \varphi([e_1r_2, e^1])(f_1)$$
$$= f_1(\tau(r_1) + \tau(r_2)), f_1\tau(r_1r_2) = \varphi([e_1r_1r_2, e^1])(f_1) = \varphi([e_1r_1, e^1][e_1r_2, e^1])(f_1)$$
$$= \varphi([e_1r_1, e^1])\varphi([e_1r_2, e^1])(f_1) = \varphi([e_1r_1, e^1])(f_1)\tau(r_2) = f_1\tau(r_1)\tau(r_2).$$

Покажем, что $\tau : R \to R$ является автоморфизмом кольца R. Для каждого $r \in R$ однозначно определен элемент $\tau'(r)$, для которого выполнены равенства $\varphi^{-1}([f_1r, f^1])(e_1) = e_1\tau'(r)$ и $\varphi^{-1}([f_1r, f^1]) = [e_1\tau'(r), e^1]$. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, можно показать, что τ' является гомоморфизмом колец. Для произвольного $r \in R$ имеют место равенства

$$e_1r = [e_1r, e^1](e_1) = \varphi^{-1}\varphi([e_1r, e^1])(e_1) = \varphi^{-1}([f_1\tau(r), f^1])(e_1) = e_1\tau'\tau(r).$$

Аналогично доказывается равенство $\tau\tau'(r) = r$.

Рассмотрим отображение $f_0 : M \to M$, действующее согласно правилу $m \mapsto \varphi([m, e^1])(f_1)$. Ясно, что отображение f_0 аддитивно. Пусть $m \in M$. Тогда

$$f_0(mr) = \varphi([mr, e^1])(f_1) = \varphi([m, e^1][e_1r, e^1])(f_1) = \varphi([m, e^1])\varphi([e_1r, e^1])(f_1)$$
$$= \varphi([m, e^1])(f_1\tau(r)) = \varphi([m, e^1])(f_1)\tau(r) = f_0(m)\tau(r).$$

для произвольного $r \in R$. Таким образом, f_0 является τ-полулинейным эндоморфизмом.

Для произвольного эндоморфизма $\alpha \in \mathrm{End}_R(M)$ и каждого $m \in M$ имеют место равенства

$$f_0\alpha(m) = \varphi([\alpha(m), e^1])(f_1) = \varphi(\alpha[m, e^1])(f_1) = \varphi(\alpha)\varphi([m, e^1])(f_1) = \varphi(\alpha)f_0(m).$$

Таким образом, $f_0\alpha = \varphi(\alpha)f_0$. Покажем, что f_0 является τ-полулинейным автоморфизмом. Пусть m — произвольный элемент из модуля M. Так как $f_0(e_1) = f_1$ и φ — автоморфизм кольца $\mathrm{End}_R(M)$, то для некоторого $g \in \mathrm{End}_R(M)$ имеет место равенство $\varphi(g)f_0(e_1) = m$. Следовательно, $f_0g(e_1) = \varphi(g)f_0(e_1) = m$. Таким образом, f_0 — τ-полулинейный эпиморфизм. Так как M — свободный правый R модуль, то с помощью стандартных рассуждений можно показать, что $M = M_0 \oplus \mathrm{Ker}(f_0)$, где $M \cong M_0$. Так как $\mathrm{Gdim}(M) = \mathrm{Gdim}(M_0) + \mathrm{Gdim}(\mathrm{Ker}(f_0))$, то $\mathrm{Gdim}(\mathrm{Ker}(f_0)) = 0$ и, следовательно, $\mathrm{Ker}(f_0) = 0$. Таким образом, f_0 — τ-полулинейный автоморфизм. Тогда для произвольного эндоморфизма $\alpha \in \mathrm{End}_R(M)$ из равенства $f_0\alpha = \varphi(\alpha)f_0$ следует, что $\varphi(\alpha) = f_0\alpha f_0^{-1}$. $\square$

Коммутативная область целостности R называется HCF-областью, если каждая пара ненулевых элементов из R обладает наибольшим общим делителем. Несложно заметить, что в произвольной HCF-области R всякое конечное семейство ненулевых элементов обладает наибольшим общим делителем и для каждых элементов $a, b, c \in R \setminus \{0\}$, где a и b взаимно просты, из условия $a \mid bc$ следует, что $a \mid c$. Класс HCF-областей является расширением факториальных колец и областей Безу. HCF-области изучались в ряде работ, в частности, в [15, 16]. Согласно [3, 4], если R либо факториальное кольцо, либо область Безу, то для каждого натурального числа n каждый автоморфизм алгебры $M_n(R)$ внутренний. Следующее утверждение является обобщением этих фактов.

Следствие 2.3. *Пусть R — HCF-область. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякий автоморфизм алгебры $M_n(R)$ является внутренним.*

Доказательство. Пусть R — HCF-область. Согласно предыдущей теореме достаточно показать, что всякий конечнопорожденный проективный идеал кольца R является циклическим. Пусть $I = a_1R + \ldots + a_kR$ — ненулевой проективный идеал кольца R. Через a_0 обозначим наибольший общий делитель элементов $a_1, \ldots, a_k$. Ясно, что $I \subseteq a_0R$. Так как всякий конечнопорожденный ненулевой проективный идеал области целостности обратим, то для некоторого конечнопорожденного R-подмодуля I' кольца частных $Q(R)$ области R имеет место равенство $II' = R$. Тогда $1_R = a_1b_1 + \ldots + a_kb_k$, где $b_1, \ldots, b_k \in I'$.

Для каждого i имеет место равенство $b_i = \frac{c_i}{d_i}$, где c_i, d_i — взаимно простые элементы из R. Так как $\frac{a_jc_i}{d_i} \in R$ для каждых i, j, то $d_i \mid a_jc_i$ и, следовательно, $d_i \mid a_j$. Тогда $d_i \mid a_0$ для каждого i. Поскольку $a_0 = a_1(b_1a_0) + \ldots + a_k(b_ka_0) \in I$, получаем равенство $I = a_0R$. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и в коммутативной области целостности R каждый конечнопорожденный проективный идеал является главным. Пусть также в алгебре $M_n(R)$ дано разложение единицы $1 = e_1 + \cdots + e_n$ в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов. Тогда идемпотенты $e_1, \ldots, e_n$ одновременно диагонализируемы в $M_n(R)$.*

Доказательство. Пусть F — свободный модуль над кольцом R и $f_1, \ldots, f_n$ — базис F. Рассмотрим эндоморфизмы $E_1, \ldots, E_n$ модуля F, у которых матрицы относительно выбранного базиса равны соответственно $e_1, \ldots, e_n$. Так как R_R — однородный модуль, то размерность Голди модуля F равна n. Поскольку $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} E_i(F)$ и $E_i(F) \neq 0$ для каждого $1 \leq i \leq n$, то $E_i(F)$ — однородный модуль для каждого $1 \leq i \leq n$. Тогда из леммы 2.1 следует, что F обладает таким базисом $f'_1, \ldots, f'_n$, что $E_i(f'_j) = 0$, $E_i(f'_i) = f'_i$ для каждых $1 \leq i, j \leq n$. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и R — коммутативная область целостности, в которой каждый конечнопорожденный проективный идеал является главным. Если в алгебре $K_n(R; \eta)$ дано разложение единицы $1 = e_1 + \cdots + e_n$ в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов и $\eta \subseteq R \setminus \{0\}$, то найдутся ненулевые матрицы $A_{ij} \in K_n(R; \eta)$ такие, что $e_iK_n(R; \eta)e_j = A_{ij}R$ для каждых $1 \leq i, j \leq n$.*

Доказательство. Так как $\eta \subseteq R \setminus \{0\}$, то $K_n(Q(R); \eta) \cong M_n((Q(R))$, где $Q(R)$ — поле частных кольца R. Тогда из предыдущей теоремы следует, что $e_iK_n((Q(R); \eta)e_j \neq 0$ для каждых $1 \leq i, j \leq n$ и, следовательно, $e_iK_n(R; \eta)e_j \neq 0$. Так как размерность Голди модуля $K_n(R; \eta)_R$ равна n^2 и

$$K_n(R; \eta)_R = \bigoplus_{1 \leq i, j \leq n} e_iK_n(R; \eta)e_j,$$

то для каждых $1 \leq i, j \leq n$ R-модуль $e_iK_n(R; \eta)e_j$ однороден и тем самым согласно лемме 2.1 для некоторой матрицы $A_{ij} \in K_n(R; \eta)$ имеет место равенство $e_iK_n(R; \eta)e_j = A_{ij}R$. $\square$

2. Автоморфизмы и группа внешних автоморфизмов алгебр формальных матриц над факториальными кольцами

Пусть кольцо R коммутативно. Исследуем группу внешних автоморфизмов алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1, \ldots, \beta_n}(R)$. Если элементы $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R$ обратимы, то согласно [10, предложение 3.3] кольцо формальных матриц $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ изоморфно обыкновенному матричному кольцу того же порядка. Таким образом, существен только случай, когда хотя бы один из элементов $\beta_1,\dots,\beta_n \in R$ необратим.

В случае $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$ в статье [6] было получено полное описание группы автоморфизмов алгебры $\mathbb{M}_n(R;0)$. В частности, имеет место следующая

Теорема 3.1 [6, следствие 15.1]. *Пусть R — неразложимое коммутативное кольцо и $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\mathrm{Out}(\mathbb{M}_n(R;0)) = \widetilde{G} \rtimes P,$$

где $\widetilde{G} \cong (U(R))^{(n-1)^2}$, $P \cong S_n$.

Далее, если не указано обратное, в качестве кольца R будем рассматривать факториальное кольцо. Пусть даны натуральное число $n \in \mathbb{N}$, факториальное кольцо R и $s \in R$. Определим отображение $\Phi : \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R) \to M_n(R)$ как $\Phi([a_{ij}]) = [\eta_{1ij}a_{ij}]$, где $\eta = \{\eta_{ijk}\}$ – соответствующая система множителей. Нетрудно видеть, что Φ является гомоморфизмом алгебр, причем если $\beta_1,\dots,\beta_n \neq 0$, то этот гомоморфизм инъективный. Отметим, что образ всей алгебры под действием Φ принимает вид

$$\Phi(\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)) = \begin{pmatrix} R & R & R & \cdots & R \\ \beta_1\beta_2 R & R & \beta_2 R & \cdots & \beta_2 R \\ \beta_1\beta_3 R & \beta_3 R & R & \cdots & \beta_3 R \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1\beta_n R & \beta_n R & \beta_n R & \cdots & R \end{pmatrix}.$$

Обозначим матричные единицы алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ через E_{ij}. Также рассмотрим двусторонний идеал I, порожденный всеми матричными единицами E_{ij}, где $i \neq j$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$I = \langle E_{ij} \mid i \neq j \rangle = \begin{pmatrix} \beta_1\widehat{\beta}_1(R) & R & \cdots & R \\ R & \beta_2\widehat{\beta}_2(R) & \cdots & R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R & R & \cdots & \beta_n\widehat{\beta}_n(R) \end{pmatrix},$$

где $\widehat{\beta}_k(R) = \sum\limits_{i=1, i\neq k}^{n} \beta_i R$.

Согласно [10, лемма 5.5] для произвольного $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R))$ выполняется $\alpha(I) = I$. Соответственно имеет смысл рассмотреть, как устроены автоморфизмы по модулю идеала I. Так как матричные единицы E_{ii} являются идемпотентными матрицами, в первую очередь нас интересуют идемпотенты алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$.

Лемма 3.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, кольцо R факториально и $\beta_1,\dots,\beta_n \in R$. Пусть также $e, f \in \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ — такие идемпотенты, что для некоторой обратимой матрицы $u \in \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ выполняется $ueu^{-1} = f$. Тогда $e - f \in I$.*

Доказательство. Условие $ueu^{-1} = f$ должно выполняться также и в коммутативной фактор-алгебре $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)/I \cong \prod\limits_{i=1}^{n}(R/\beta_i\widehat{\beta}_i(R))$. $\square$

По аналогии с классическим результатом Адзумайя [17, теорема 3] нашей целью будет получить обратный к лемме 3.2 результат, но уже при определенных ограничениях на идемпотенты. Для этого потребуется предварительная лемма, аналогичная хорошо известному результату теории алгебр инцидентности.

Лемма 3.3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, кольцо R факториально и $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R\backslash\{0\}$. Если для автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ выполняется $\alpha(E_{ii}) = E_{ii}$ при всех $1 \leq i \leq n$, то автоморфизм α внутренний.*

Доказательство. Пусть $1 \leq i, j \leq n$. Так как $E_{ii}\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)E_{jj} = E_{ij}R$, то $\alpha(E_{ij}) = g_{ij}E_{ij}$, причем $g_{ij} \in U(R)$. Пусть $\eta = \{\eta_{ijk}\}$ — соответствующая система множителей. Тогда для любой тройки индексов i, j, k

$$g_{ik}\eta_{ijk}E_{ik} = \alpha(\eta_{ijk}E_{ik}) = \alpha(E_{ij}E_{jk}) = \alpha(E_{ij})\alpha(E_{jk}) = g_{ij}g_{jk}\eta_{ijk}E_{ik}.$$

Так как все β_i не являются делителями нуля, то $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$.

Положим $h_i = g_{1i}^{-1}$, $1 \leq i \leq n$. Фиксируем произвольные $1 \leq i, j \leq n$. В силу равенства $g_{1i}g_{ij} = g_{1j}$ получаем $g_{ij} = g_{1i}^{-1}g_{1j} = h_i^{-1}h_j$. Наконец, нетрудно видеть, что отображение α есть сопряжение на матрицу $\mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n)$ — диагональную матрицу с элементами $h_1, \ldots, h_n$ на главной диагонали. $\square$

Эти результаты позволяют получить желаемое обращение леммы 3.2.

Предложение 3.4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, кольцо R факториально и $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R\backslash\{0\}$. Пусть также $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$. Если для каждого $1 \leq i \leq n$ выполняется $\alpha(E_{ii}) - E_{ii} \in I$, то автоморфизм α внутренний.*

Доказательство. В $M_n(R)$ имеет место разложение единицы

$$1 = \Phi(\alpha(E_{11})) + \Phi(\alpha(E_{22})) + \ldots + \Phi(\alpha(E_{nn})).$$

В силу теоремы 2.4 найдется обратимая матрица $U \in M_n(R)$ такая, что

$$U^{-1}\Phi(\alpha(E_{ii}))U = E_{ii},$$

или, иными словами, $\Phi(\alpha(E_{ii})) = UE_{ii}U^{-1}$ для всех $1 \leq i \leq n$. Покажем, что $U \in \Phi(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$.

Положим $U = (u_{ij})$, $U^{-1} = V = (v_{ij})$. Так как $\Phi(\alpha(E_{11})) = UE_{11}V = (u_{i1}v_{1j})$ и $\alpha(E_{11}) \in E_{11} + I$, то $u_{11}v_{11} \in 1 + \beta_1\widehat{\beta}_1(R) \subseteq 1 + \beta_1 R$. Таким образом, НОД$(v_{11}, \beta_1) = 1$. Из строения образа $\Phi(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ непосредственно получаем, что $u_{i1}v_{11} \in \beta_1\beta_i R$ для всех $2 \leq i \leq n$. Следовательно, $u_{i1} \in \beta_1 R$ для всех $2 \leq i \leq n$.

Фиксируем какое-нибудь значение $2 \leq k \leq n$. Так как $\Phi(\alpha(E_{kk})) = UE_{kk}V = (u_{ik}v_{kj})$ и $\alpha(E_{kk}) \in E_{kk} + I$, то $u_{kk}v_{kk} \in 1 + \beta_k R$ и НОД$(u_{kk}, \beta_k) = 1$. Из строения образа $\Phi(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ непосредственно получаем, что $u_{kk}v_{kj} \in \beta_k R$ для всех $1 \leq j \leq n$, $j \neq k$. Следовательно, $v_{kj} \in \beta_k R$ для всех $j \neq k$. Так как матрицы U, V взаимно обратны, то $U = \det(V)^{-1}(V_{ij})^T$, где под V_{ij} понимается алгебраическое дополнение к элементу v_{ij} матрицы V. Как показано выше, все элементы строки k матрицы V, кроме v_{kk}, лежат в $\beta_k R$. Отсюда алгебраические дополнения V_{ik}, $i \neq k$, также лежат в $\beta_k R$. Таким образом, $u_{ki} \in \beta_k R$ для всех i, отличных от k. В частности, $u_{k1} \in \beta_1 R \cap \beta_k R$.

Покажем, что на самом деле $u_{k1} \in \beta_1\beta_k R$ для всех $2 \leq k \leq n$. Пусть $p \in R$ — простой элемент кольца, который делит хотя бы один из элементов $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Положим $\beta_i = p^{r_i}\gamma_i$ для всех $1 \leq i \leq n$, где $r_i \in \mathbb{Z}_+$ и $p \nmid \gamma_i$. Для всех $2 \leq k \leq n$ имеем $u_{k1}v_{11} \in \beta_1\beta_k R = p^{r_1+r_k}\gamma_1\gamma_k R$. Выделим два случая.

1. $r_1 > 0$. Так как НОД$(v_{11}, \beta_1) = 1$, то и НОД$(v_{11}, p) = 1$. Отсюда $u_{k1} \in p^{r_1+r_k}R$.

2. $r_1 = 0$. В этом случае $u_{k1} \in \beta_k R = p^{r_k}R = p^{r_1+r_k}R$.

Поэтому $p^{r_1+r_k} \mid u_{k1}$. В силу произвольности выбора p получаем $u_{k1} \in \beta_1\beta_k R$. Таким образом, $U \in \Phi(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$. Следовательно, существует матрица $W \in \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ такая, что $\Phi(W) = U$. В силу [5, теорема 11.1] матрица W обратима.

Через $C_{W_{-1}}$ обозначим автоморфизм $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$, являющийся сопряжением на W^{-1}. В силу равенства $\alpha(E_{ii}) = WE_{ii}W^{-1}$ заключаем, что автоморфизм $C_{W^{-1}}\alpha$ удовлетворяет лемме 3.3, а значит, является внутренним, что и влечет заключение предложения. $\square$

Полученные результаты позволяют установить ограничение на группу внешних автоморфизмов алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$.

Замечание 3.5. Существенную роль в изучении группы внешних автоморфизмов алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ играет группа автоморфизмов фактор-алгебры

$$\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)/I \cong \prod_{i=1}^{n}(R/\beta_i\widehat{\beta}_i(R)).$$

В указанном прямом произведении могут встречаться нулевые кольца. Для краткости записи мы предполагаем, что группа автоморфизмов любого нулевого кольца одноэлементна и состоит только из тождественного отображения. В частности, если A — ненулевая R-алгебра, то $\mathrm{Aut}_R((R/R)^n \times A) \cong \mathrm{Aut}_R(A)$ для любого натурального n.

Теорема 3.6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, кольцо R факториально и $\beta_1,\ldots,\beta_n \in R\backslash\{0\}$. Тогда $\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ изоморфно вкладывается в группу*

$$\mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)/I).$$

Доказательство. Пусть $M = \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$. Зададим отображение Θ : $\mathrm{Out}_R(M) \to \mathrm{Aut}_R(M/I)$ следующим образом. Смежному классу $\mathrm{Inn}_R(M)\cdot\alpha$ сопоставим автоморфизм $\overline{\alpha}$ такой, что $\overline{\alpha}(A+I) = \alpha(A)+I$ для всех $A \in M$. Покажем, что это отображение корректно и имеет тождественное ядро.

Пусть α и β — два автоморфизма алгебры M, которые лежат в одном смежном классе относительно $\mathrm{Inn}_R(M)$: существует обратимая матрица U такая, что $\alpha(A) = U\beta(A)U^{-1}$ для всех $A \in M$. Так как равенство $\alpha(A) = U\beta(A)U^{-1}$ должно выполняться и для образов в коммутативной фактор-алгебре $M/I \cong \prod\limits_{i=1}^{n}(R/\beta_i\widehat{\beta}_i(R))$, то $\alpha(A) - \beta(A) \in I$ для всех $A \in M$. Таким образом, отображение Θ корректно определено.

Пусть теперь α и β — два автоморфизма алгебры M такие, что $\alpha(A) - \beta(A) \in I$ для всех $A \in M$. В частности, это условие должно соблюдаться для матрицы $A = E_{ii}$. Следовательно, для всех i имеет место включение $\beta^{-1}\alpha(E_{ii}) - E_{ii} \in I$. По предложению 3.4 автоморфизм $\beta^{-1}\alpha$ внутренний. Отсюда автоморфизмы α и β лежат в одном смежном классе относительно $\mathrm{Inn}_R(M)$.

Более того, очевидно, что отображение Θ является гомоморфизмом. Таким образом, группа внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}_R(M)$ изоморфно вкладывается в группу автоморфизмов алгебры M/I. $\square$

Следствие 3.7. *Пусть дано натуральное число $n > 2$, кольцо R факториально и $\beta_1,\ldots,\beta_n \in R\backslash\{0\}$. Если идеалы $\beta_1R,\ldots,\beta_nR$ попарно комаксимальны, то все R-автоморфизмы алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ внутренние.*

Доказательство. В силу попарной комаксимальности идеалов имеем $\widehat{\beta}_1(R) = \cdots = \widehat{\beta}_n(R) = R$. Поэтому

$$\mathrm{Aut}_R\left(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)/I\right) \cong \mathrm{Aut}_R\left(\prod_{i=1}^{n}(R/\beta_i\widehat{\beta}_i(R))\right) = \mathrm{Aut}_R\left(\prod_{i=1}^{n}(R/\beta_i R)\right) \cong \{e\},$$

так как $\beta_1, \ldots, \beta_n$ попарно взаимно просты. $\square$

В случае $n = 2$ кольца формальных матриц над кольцом R это в точности кольца $K_s(R)$. В [14] было получено описание группы внешних автоморфизмов колец $K_s(R)$. В частности, в [14, лемма 5] показано, что для нетривиальных идемпотентов $e \in K_s(R)$ специального вида существует R-автоморфизм, который отображает E_{11} в e. Следующая лемма усиливает данный результат, снимая ограничения на нетривиальный идемпотент e.

Лемма 3.8. *Пусть кольцо R факториально, $0 \neq s \in R$ и $e \in K_s(R)$ — нетривиальный идемпотент. Тогда существует автоморфизм α алгебры $K_s(R)$ такой, что $\alpha(E_{11}) = e$.*

Доказательство. Положим $e_1 = e$, $e_2 = 1 - e$. В силу леммы 2.5 существуют ненулевые элементы A_{ij} такие, что $e_i K_s(R) e_j = A_{ij}R$ при $1 \leq i, j \leq 2$, где $A_{11} = e_1$, $A_{22} = e_2$. Тогда для некоторых $t_{121}, t_{212} \in R$ имеем соотношения $A_{12}A_{21} = t_{121}A_{11}$, $A_{21}A_{12} = t_{212}A_{22}$. В силу ассоциативности произведения в $K_s(R)$

$$t_{121}A_{12} = (A_{12}A_{21})A_{12} = A_{12}(A_{21}A_{12}) = t_{212}A_{12}.$$

Положим $t = t_{121} = t_{212}$. Тогда

$$K_s(R) = \bigoplus e_i K_s(R) e_j = \bigoplus A_{ij}R \cong K_t(R),$$

причем указанный изоморфизм является изоморфизмом R-алгебр. Пусть $\Psi : K_s(R) \to K_t(R)$ — соответствующий изоморфизм и $\Psi(A_{ij}) = E_{ij}$. В силу [9, теорема 1] $t = vs$ для некоторого обратимого $v \in R$. Согласно [9, лемма 3] существует изоморфизм $\Phi : K_s(R) \to K_t(R)$ такой, что $\Phi(E_{11}) = E_{11}$. Следовательно, отображение $\Psi^{-1}\Phi$ является R-автоморфизмом кольца $K_s(R)$ и $\Psi^{-1}\Phi(E_{11}) = A_{11}$. $\square$

Также нам потребуется вспомогательное утверждение про факториальные кольца, доказательство которого мы приводим для полноты картины.

Лемма 3.9 [14, лемма 4]. *Пусть кольцо R факториально, $s \in R$ и $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Тогда существуют $k \in \mathbb{N}$ и необратимые элементы $s_1, \ldots, s_k \in R$ такие, что*

(1) $s = s_1 s_2 \cdots s_k$;

(2) *кольцо R/s_iR неразложимо для всех i;*

(3) *идеалы s_iR и s_jR попарно комаксимальны для всех $i \neq j$.*

Доказательство. Если кольцо R/sR неразложимо, то утверждение тривиально. В противном случае пусть $s = up_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$ — разложение s на попарно не ассоциированные простые множители. Неразложимость кольца R/sR равносильна отсутствию в R/sR нетривиальных идемпотентов. Предположим, что элемент $t + sR \in R/sR$ является нетривиальным идемпотентом, где $t \in R$. Тогда $t(t-1) \in sR$. Так как элементы t и $t-1$ не могут иметь общих необратимых множителей, то элементу t соответствует разбиение множества $\{1, \ldots, m\} = I \sqcup J$

такое, что

$$t = \Big(\prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i}\Big) t_1 = s_1 t_1, \quad 1 - t = \Big(\prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j}\Big) t_2 = s_2 t_2, \quad t_1, t_2 \in R.$$

В частности, идеалы $s_1 R$ и $s_2 R$ комаксимальны в R. Более того, s_1 и s_2 отличны от s и необратимы в силу нетривиальности идемпотента $t + sR$. По китайской теореме об остатках $R/sR \cong R/s_1 R \times R/s_2 R$.

Повторим данные рассуждения для колец $R/s_1 R$ и $R/s_2 R$. Остается заметить, что процесс разбиения s на множители когда-либо должен завершиться, так как ему соответствует дробление множества $\{1, \ldots, m\}$ в дизъюнктное объединение непустых множеств. $\square$

Пусть s — ненулевой необратимый элемент факториального кольца R и $M = \mathbb{M}_{\beta_1, \ldots, \beta_n}(R)$, где каждый элемент β_i представляет из себя целую неотрицательную степень элемента s. Введем на множестве $\{1, \ldots, n\}$ отношение эквивалентности: $i \sim j \Leftrightarrow \beta_i = \beta_j$. Класс эквивалентности элемента $a \in \{1, \ldots, n\}$ будем обозначать через $[a]$. Через $B_{[a]}$ обозначим множество матриц из M со следующим свойством: если компонента (i, j) матрицы отлична от нуля, то $i, j \in [a]$. Если элементы $\beta_1, \ldots, \beta_n$ упорядочены с учетом отношения эквивалентности, то данное отношение индуцирует блочный вид на M.

Пусть α — R-автоморфизм алгебры M. Будем говорить, что α *согласован с блочной структурой алгебры* M, если для каждого $1 \leq j \leq n$ выполняется $\alpha(E_{jj}) \in B_{[j]} + I$.

Предложение 3.10. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$ и фактор-кольцо R/sR неразложимо. Пусть также $M = \mathbb{M}_{\beta_1, \ldots, \beta_n}(R)$, где каждый элемент β_i представляет из себя целую неотрицательную степень элемента s. Тогда любой R-автоморфизм алгебры M согласован с блочной структурой алгебры M.*

Доказательство. Фиксируем произвольный R-автоморфизм α алгебры M. Не нарушая общности, можно считать что показатели степени s в последовательности $\beta_1, \ldots, \beta_n$ расположены по возрастанию. А именно, пусть $\beta_k = s^{\gamma_k}$ и $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \ldots \leq \gamma_n$. Сгруппируем показатели по совпадающим значениям:

$$q_1 := \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n_1}, \quad q_2 := \gamma_{n_1+1} = \gamma_{n_1+2} = \ldots = \gamma_{n_1+n_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$q_m := \gamma_{(n_1+\ldots+n_{m-1})+1} = \gamma_{(n_1+\ldots+n_{m-1})+2} = \ldots = \gamma_{(n_1+\ldots+n_{m-1})+n_m},$$

где $\sum\limits_{j=1}^{m} n_j = n$ и $q_1 < q_2 < \ldots < q_m$. В частности, $[1] = \{1, \ldots, n_1\}$, $\beta_1 \widehat{\beta}_1 R = \beta_1 \beta_2 R$ и $\beta_i \widehat{\beta}_i R = \beta_i \beta_1 R$ для всех $2 \leq i \leq n$.

Рассмотрим фактор-кольцо

$$M/I \cong R/(\beta_1 \beta_2 R) \times \left(\prod_{i=2}^{n} R/(\beta_i \beta_1 R)\right).$$

Определим целое неотрицательное число k следующим образом. Если $n_1 > 1$ и β_1 обратим, то $k = n_1$. Иначе $k = 0$. Нетрудно видеть, что для каждого $1 \leq i \leq k$ имеет место включение $E_{ii} \in I$. Так как $\alpha(I) = I$, то $\alpha(E_{ii}) \in E_{ii} + I$ для каждого $1 \leq i \leq k$. В силу неразложимости кольца R/sR неразложимо и кольцо $R/(\beta_i\beta_1 R)$ для всех $i > k$. Поэтому кольцо M/I содержит только единственный набор из $n-k$ попарно ортогональных идемпотентов. Следовательно, для некоторой перестановки $\pi \in S_n$ выполняется $\alpha(E_{ii}) \in E_{\pi(i)\pi(i)} + I$ для всех $1 \le i \le n$. Выделим два случая.

Если $n_1 > 1$, то

$$M/I \cong \left(\prod_{j=1}^{n_1} R/(s^{q_1+q_1}R)\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n_2} R/(s^{q_2+q_1}R)\right) \times \cdots \times \left(\prod_{j=1}^{n_m} R/(s^{q_m+q_1}R)\right).$$

Для любых различных $1 \le a < b \le m$ имеем $\mathrm{Hom}_R(R/(s^{q_a+q_1}R), R/(s^{q_b+q_1}R)) = \varnothing$. Поэтому автоморфизм α согласован с блочной структурой алгебры M.

Пусть теперь $n_1 = 1$. Тогда среди элементов $\beta_1, \dots, \beta_n$ обратимым может быть только β_1,

$$M/I \cong R/(s^{q_1+q_2}R) \times \left(\prod_{j=1}^{n_2} R/(s^{q_2+q_1}R)\right) \times \cdots \times \left(\prod_{j=1}^{n_k} R/(s^{q_k+q_1}R)\right).$$

Отсюда для каждого $1 \le j \le n$ выполняется импликация: если $j \notin [1], [2]$, то $\alpha(E_{jj}) \in B_{[j]} + I$. Если $\pi(1) = 1$, то и для $j \in [1], [2]$ выполняется $\alpha(E_{jj}) \in B_{[j]} + I$. Предположим теперь, что $\pi(1) \ne 1$. Положим $\alpha(E_{ii}) = E_{\pi(i)\pi(i)} + I_{\pi(i)\pi(i)}$, где $I_{\pi(i)\pi(i)} \in I$ для всех $1 \le i \le n$. Пусть также $b = \pi^{-1}(1)$. Так как перестановка π нетождественная и $n \ge 3$, то, очевидно, найдется число $1 \le a \le n$ такое, что $a \ne b$ и $\gamma_a + \gamma_b > \gamma_{\pi(a)} + \gamma_{\pi(b)}$. Фиксируем значение a.

Так как для любых различных $1 \le i, j \le n$ имеем $E_{ij}R = E_{ii}ME_{jj}$, то

$$\alpha(E_{ij})R = (E_{\pi(i)\pi(i)} + I_{\pi(i)\pi(i)})M(E_{\pi(j)\pi(j)} + I_{\pi(j)\pi(j)}).$$

В частности,

$$\begin{aligned}\alpha(E_{ab})R \ni (E_{\pi(a)\pi(a)} &+ I_{\pi(a)\pi(a)})E_{\pi(a)\pi(b)}(E_{\pi(b)\pi(b)} + I_{\pi(b)\pi(b)}) \\ &= E_{\pi(a)1} + E_{\pi(a)1}I_{11} + I_{\pi(a)\pi(a)}E_{\pi(a)1} + I_{\pi(a)\pi(a)}E_{\pi(a)1}I_{11}. \quad (*)\end{aligned}$$

Все элементы на главных диагоналях матриц $I_{\pi(a)\pi(a)}$ и I_{11} лежат в sR. Поэтому $I_{\pi(a)\pi(a)}E_{\pi(a)1}, I_{\pi(a)\pi(a)}E_{\pi(a)1}I_{11} \in sM$. Если $\beta_1 \notin U(R)$, то и $E_{\pi(a)1}I_{11} \in sM$. В общем случае в матрице $E_{\pi(a)1}I_{11}$ в sR лежат элемент на позиции $(\pi(a), 1)$, а также все элементы строк с номерами, отличными от $\pi(a)$ (так как это нулевые строки). Отсюда следует, что правая часть $(*)$ отлична от нуля и не лежит в sM. С другой стороны, эта сумма должна иметь вид $\alpha(E_{ab})r$ для некоторого $r \in R$. Так как $\alpha(E_{ab})r \notin sM$ и элемент в позиции $(\pi(a), 1)$ матрицы $\alpha(E_{ab})r$ не имеет общих необратимых делителей с s, то существует $u_{\pi(a)1} \in R$ такой, что

$$\alpha(E_{ab}) = u_{\pi(a)1}E_{\pi(a)1} + I_{\pi(a)1},$$

где $I_{\pi(a)1} \in I$. Более того, в матрице $I_{\pi(a)1}$ не лежать в sR могут только элементы на позициях $(\pi(a), 2), \dots, (\pi(a), n)$. Также $u_{\pi(a)1}$ не имеет общих с s необратимых делителей.

Аналогично

$$\alpha(E_{ba}) = u_{1\pi(a)}E_{1\pi(a)} + I_{1\pi(a)},$$

где $I_{1\pi(a)} \in I$ и в матрице $I_{1\pi(a)}$ не лежать в sR могут только элементы на позициях $(2, \pi(a)), \dots, (n, \pi(a))$. Элемент $u_{1\pi(a)}$ не имеет общих с s необратимых делителей.

В алгебре M выполняется тождество $E_{ab}E_{ba} = s^{\gamma_a+\gamma_b}E_{aa}$. Отсюда

$$\begin{aligned} s^{\gamma_a+\gamma_b}(E_{\pi(a)\pi(a)} + I_{\pi(a)\pi(a)}) &= \alpha(s^{\gamma_a+\gamma_b}E_{aa}) = \alpha(E_{ab}E_{ba}) \\ &= (u_{\pi(a)1}E_{\pi(a)1} + I_{\pi(a)1})(u_{1\pi(a)}E_{1\pi(a)} + I_{1\pi(a)}) \\ &= u_{\pi(a)1}u_{1\pi(a)}s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1}E_{\pi(a)\pi(a)} + u_{\pi(a)1}E_{\pi(a)1}I_{1\pi(a)} \\ &\quad + u_{1\pi(a)}I_{\pi(a)1}E_{1\pi(a)} + I_{\pi(a)1}I_{1\pi(a)}. \qquad (**) \end{aligned}$$

По определению идеала I элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ матрицы $I_{\pi(a)\pi(a)}$ лежит в линейной комбинации над R некоторых произведений вида $\beta_i\beta_j$, где $i < j$. В силу минимальности показателей γ_1, γ_2 имеем $\beta_i\beta_j \in s^{\gamma_1+\gamma_2}R$ для всех $i < j$. Таким образом, в произведении $s^{\gamma_a+\gamma_b}(E_{\pi(a)\pi(a)} + I_{\pi(a)\pi(a)})$ элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ лежит в $s^{\gamma_a+\gamma_b} + s^{\gamma_a+\gamma_b+\gamma_1+\gamma_2}R$. Рассмотрим элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ в правой части $(**)$. В $u_{\pi(a)1}E_{\pi(a)1}I_{1\pi(a)}$ и $u_{1\pi(a)}I_{\pi(a)1}E_{1\pi(a)}$ этот элемент лежит в $\beta_{\pi(a)}\beta_1 sR = s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+1}R$, так как в матрицах $I_{\pi(a)1}$ и $I_{1\pi(a)}$ элементы в позициях $(\pi(a), 1)$ и $(1, \pi(a))$ соответственно лежат в sR. Рассмотрим элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ в $I_{\pi(a)1}I_{1\pi(a)}$. Из определения матричного произведения для слагаемых, составляющих данный элемент, возможны два случая.

(1) Слагаемое получено произведением компонент $(\pi(a), \pi(a))$ матриц $I_{\pi(a)1}$ и $I_{1\pi(a)}$. Так как данные матрицы принадлежат I, то в каждой из матриц элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ лежит в линейной комбинации над R произведений вида $\beta_{\pi(a)}\beta_i$, $i \neq \pi(a)$. Так как $\pi(a) > 1$, каждое произведение $\beta_{\pi(a)}\beta_i$ лежит в $\beta_{\pi(a)}\beta_1 R$. Таким образом, произведение компонент $(\pi(a), \pi(a))$ матриц $I_{\pi(a)1}$ и $I_{1\pi(a)}$ лежит в $(\beta_{\pi(a)}\beta_1)^2 R = s^{(\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1)+(\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1)}R$.

(2) Слагаемое получено произведением компонент $(\pi(a), k)$ и $(k, \pi(a))$ матриц $I_{\pi(a)1}$ и $I_{1\pi(a)}$, где $k \neq \pi(a)$.

Если $k = 1$, то и сами компоненты $(\pi(a), 1)$ и $(1, \pi(a))$, как мы видели ранее, лежат в sR. Поэтому соответствующее произведению слагаемое лежит в $(\beta_{\pi(a)}\beta_1)s^2R = s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+2}R$.

Если $k > 1$, то соответствующее слагаемое лежит в $(\beta_{\pi(a)}\beta_k)R = s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_k}R$. Так как $n_1 = 1$, то $\gamma_k > \gamma_1$. Следовательно, сумма по всем $k \neq \pi(a)$ лежит в $s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+1}R$.

По построению $\pi(a) > 1$, а значит, $\gamma_{\pi(a)} > \gamma_1$. Таким образом, вне зависимости от того, отлично от нуля значение γ_1 или нет, имеет место неравенство

$$\min((\gamma_{\pi(a)} + \gamma_1) + (\gamma_{\pi(a)} + \gamma_1), \gamma_{\pi(a)} + \gamma_1 + 1) \geq \gamma_{\pi(a)} + \gamma_1 + 1.$$

Отсюда элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ в правой части $(**)$ лежит в

$$u_{\pi(a)1}u_{1\pi(a)}s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1} + s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+1}R.$$

В частности, данный элемент не лежит в $s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+1}R$. С другой стороны, ранее мы видели, что этот элемент лежит в $s^{\gamma_a+\gamma_b} + s^{\gamma_a+\gamma_b+\gamma_1+\gamma_2}R \subseteq s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+1}R$. Полученное противоречие гарантирует, что $\pi(1) = 1$ при $n_1 = 1$, что и завершает доказательство предложения. $\square$

Следствие 3.11. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$ и фактор-кольцо R/sR неразложимо. Тогда для любых целых неотрицательных попарно различных $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ все R-автоморфизмы алгебры $M = \mathbb{M}_{s^{\gamma_1},\ldots,s^{\gamma_n}}(R)$ внутренние.*

Доказательство напрямую следует из предложений 3.4 и 3.10. $\square$

Пример 3.12. Пусть кольцо R факториально, s — простой элемент кольца R и $M = \mathbb{M}_{s,s^2,s^3}(R)$. По теореме 3.6 группа $\mathrm{Out}_R(M)$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}_R\left(R/s^3R \times R/s^3R \times R/s^4R\right) \cong S_2$. Однако все R-автоморфизмы алгебры M внутренние по следствию 3.11. Таким образом, вложение из теоремы 3.6 не обязано быть сюръективным.

Для уточнения результата теоремы 3.6 опишем группу внешних автоморфизмов алгебры $M_n(R;s)$. Далее в предложении 3.13 будем ассоциировать $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)$ с образом в $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n}(R)$ при вложении $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицу в правой части будем обозначать через $A \oplus (0)_{n-2}$.

Предложение 3.13. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 2$ и $0 \neq \beta_1, \dots, \beta_n \in R$. Пусть также $e \in \mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)$ — нетривиальный идемпотент. Если $\beta_1 = \beta_2$, то существует R-автоморфизм α алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n}(R)$ такой, что*

(1) $\alpha(E_{kk}) = E_{kk}$ *для всех* $3 \leq k \leq n$;

(2) $\alpha(E_{11}) = e \oplus (0)_{n-2}$, $\alpha(E_{22}) = (I_2 - e) \oplus (0)_{n-2}$.

Доказательство. Положим $s = \beta_1 = \beta_2$. При $n = 2$ утверждение предложения следует из леммы 3.8 и изоморфизма $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R) \cong K_{\beta_1\beta_2}(R)$. Зададим автоморфизм α явно. Так как $e \neq 0, I_2$, то найдутся $a, x, y \in R$ такие, что $e = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1-a \end{pmatrix}$ и $a(1-a) = s^2xy$. Несложно заметить, что в силу факториальности кольца R найдутся элементы $a_{s^2}, a_x, a_y \in R$ и $(1-a)_{s^2}, (1-a)_x, (1-a)_y \in R$ такие, что

$$a = a_{s^2}a_xa_y, \quad (1-a) = (1-a)_{s^2}(1-a)_x(1-a)_y,$$
$$x = a_x(1-a)_x, \quad y = a_y(1-a)_y, \quad s^2 = a_{s^2}(1-a)_{s^2}.$$

Более того, в силу того, что элементы a и $(1-a)$ не могут иметь общих необратимых делителей, не нарушая общности можно считать, что $a_{s^2} = (a_s)^2$ и $(1-a)_{s^2} = ((1-a)_s)^2$ для некоторых $a_s, (1-a)_s \in R$. Также можно считать, что $a_s(1-a)_s = s$.

В силу леммы 2.5 существует ненулевой элемент $A_{12} \in \mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)$ такой, что $e\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)(1-e) = A_{12}R$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$eE_{11}(1-e) = \begin{pmatrix} a(1-a) & -ax \\ y(1-a) & -s^2xy \end{pmatrix}$$
$$= a_y(1-a)_x \begin{pmatrix} a_x(1-a)_ys^2 & -a_s^2a_x^2 \\ (1-a)_s^2(1-a)_y^2 & -a_x(1-a)_ys^2 \end{pmatrix},$$
$$eE_{22}(1-e) = -eE_{11}(1-e),$$
$$eE_{12}(1-e) = \begin{pmatrix} -s^2ya & a^2 \\ -s^2y^2 & s^2ya \end{pmatrix} = -a_s^2a_y^2 \begin{pmatrix} a_x(1-a)_ys^2 & -a_s^2a_x^2 \\ (1-a)_s^2(1-a)_y^2 & -a_x(1-a)_ys^2 \end{pmatrix},$$
$$eE_{21}(1-e) = \begin{pmatrix} s^2x(1-a) & -s^2x^2 \\ (1-a)^2 & -s^2x(1-a) \end{pmatrix}$$
$$= (1-a)_s^2(1-a)_x^2 \begin{pmatrix} a_x(1-a)_ys^2 & -a_s^2a_x^2 \\ (1-a)_s^2(1-a)_y^2 & -a_x(1-a)_ys^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$a_y(1-a)_x \cdot (2a_x(1-a)_ys^2) + a_s^2a_y^2 \cdot \left(a_s^2a_x^2\right) + (1-a)_s^2(1-a)_x^2 \cdot \left((1-a)_s^2(1-a)_y^2\right)$$
$$= 2s^2xy + a^2 + (1-a)^2 = 2a(1-a) + a^2 + (1-a)^2 = 1.$$

Поэтому матрица
$$\begin{pmatrix} a_x(1-a)_y s^2 & -a_s^2 a_x^2 \\ (1-a)_s^2(1-a)_y^2 & -a_x(1-a)_y s^2 \end{pmatrix}$$
тоже лежит в $e\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)(1-e)$. Положим
$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_x(1-a)_y s^2 & -a_s^2 a_x^2 \\ (1-a)_s^2(1-a)_y^2 & -a_x(1-a)_y s^2 \end{pmatrix}.$$
Аналогично показывается, что для матрицы
$$A_{21} = \begin{pmatrix} (1-a)_x a_y s^2 & (1-a)_s^2(1-a)_x^2 \\ a_s^2 a_y^2 & (1-a)_x a_y s^2 \end{pmatrix}$$
имеет место равенство $(1-e)\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)e = A_{21}R$.

Непосредственные вычисления показывают, что
$$A_{12}A_{21} = s^2 e \quad \text{и} \quad A_{21}A_{12} = s^2(I_2 - e).$$
Поэтому R-линейное отображение $\alpha : \mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R) \to \mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)$ такое, что
$$\alpha(E_{11}) = e, \quad \alpha(E_{12}) = A_{12}, \quad \alpha(E_{21}) = A_{21}, \quad \alpha(E_{22}) = I_2 - e,$$
будет R-автоморфизмом.

Пусть теперь $n \geq 3$ и $M = \mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}(R)$. Положим $B_{11} = e \oplus (0)_{n-2}$, $B_{12} = A_{12} \oplus (0)_{n-2}$, $B_{21} = A_{21} \oplus (0)_{n-2}$, $B_{22} = (I_2 - e) \oplus (0)_{n-2}$ и $B_{ij} = E_{ij}$ для всех $3 \leq i,j \leq n$. Так как $1 = B_{11} + B_{22} + \ldots + B_{nn}$ является разложением единицы в сумму n ортогональных идемпотентов, то для каждого элемента $3 \leq k \leq n$ существуют ненулевые матрицы $B_{1k}, B_{2k}, B_{k1}, B_{k2} \in M$ такие, что $B_{11}ME_{kk} = B_{1k}R$, $B_{22}ME_{kk} = B_{2k}R$, $E_{kk}MB_{11} = B_{k1}R$ и $E_{kk}MB_{22} = B_{k2}R$. Зададим эти матрицы явно. Заметим, что
$$B_{11}ME_{kk} = B_{11}(E_{1k}R + E_{2k}R)E_{kk} = B_{11}(E_{1k}R + E_{2k}R),$$
$$B_{11}E_{1k} = aE_{1k} + syE_{2k} = a_s a_y(a_s a_x E_{1k} + (1-a)_s(1-a)_y E_{2k}),$$
$$B_{11}E_{2k} = sxE_{1k} + (1-a)E_{2k} = (1-a)_s(1-a)_x(a_s a_x E_{1k} + (1-a)_s(1-a)_y E_{2k}).$$
Так как
$$a_s a_y \cdot (a_s a_x) + (1-a)_s(1-a)_x \cdot ((1-a)_s(1-a)_y) = a + (1-a) = 1,$$
то можно положить
$$B_{1k} = a_s a_x E_{1k} + (1-a)_s(1-a)_y E_{2k}.$$
Аналогично определяем
$$B_{2k} = (1-a)_s(1-a)_x E_{1k} - a_s a_y E_{2k},$$
$$B_{k1} = a_s a_y E_{k1} + (1-a)_s(1-a)_x E_{k2},$$
$$B_{k2} = (1-a)_s(1-a)_y E_{k1} - a_s a_x E_{k2}.$$

Прямые вычисления показывают, что R-линейное отображение
$$\gamma : M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R) \to M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$$
такое, что $\gamma(E_{ij}) = B_{ij}$ для всех $1 \leq i,j \leq n$, является гомоморфизмом. Заметим, для всех $1 \leq i,j \leq n$ выполняется $B_{ii}M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)B_{jj} = B_{ij}R$. Поэтому гомоморфизм γ является автоморфизмом. $\square$

Теорема 3.14. *Пусть $n \geq 2$, кольцо R факториально и $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Тогда*

$$\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_n(R;s)) \cong (S_n)^k,$$

где k определяется, как в лемме 3.9.

Доказательство. Для $n = 2$ утверждение следует из теоремы 1.3. Поэтому можно считать, что $n \geq 3$.

В силу леммы 3.9 найдутся попарно взаимно простые элементы $s_1, \dots, s_k \in R$ такие, что $s = s_1 \cdots s_k$, кольца $R/s_1^2R, \dots, R/s_k^2R$ неразложимы и идеалы $s_1^2R, \dots, s_k^2R$ попарно комаксимальны. По китайской теореме об остатках имеет место изоморфизм

$$R/s^2R = R/s_1^2R \times R/s_2^2R \times \dots \times R/s_k^2R.$$

В силу теоремы 3.6 группа $\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_n(R;s))$ изоморфно вкладывается в

$$\mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s)/I) \cong \mathrm{Aut}_R((R/s^2R)^n) \cong \mathrm{Aut}_R\left[\left(\prod_{i=1}^{k} R/s_i^2R\right)^n\right] \cong S_n^k.$$

Пусть $\Theta : \mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_n(R;s)) \to \mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s)/I)$ — введенное в доказательстве теоремы 3.6 отображение. Покажем что Θ сюръективно. Возьмем $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s))$. Под действием стандартного изоморфизма $\mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s)/I) \cong \mathrm{Aut}_R((R/s^2R)^n)$ элемент $\Theta(\mathrm{Inn}_R(\mathbb{M}_n(R;s)) \cdot \varphi)$ переходит в автоморфизм $\widehat{\varphi}$ такой, что

$$\widehat{\varphi}((r_1 + s^2R), \dots, (r_n + s^2R)) = (\varphi(A)_{11} + s^2R, \dots, \varphi(A)_{nn} + s^2R),$$

где $A = \sum\limits_{i=1}^{n} r_iE_{ii}$, а под $\varphi(A)_{ij}$ понимается (i,j)-компонента матрицы $\varphi(A)$. Очевидно, что R-автоморфизмы алгебры $(R/s^2R)^n$ просто переставляют местами компоненты R/s_i^2R. Учитывая, что группа S_n порождается транспозициями, для доказательства сюръективности достаточно показать существование автоморфизма φ алгебры $\mathbb{M}_n(R;s)$, для которого автоморфизм $\widehat{\varphi}$ переставляет компоненты R/s_1^2R у двух копий R/s^2R, а на всех остальных компонентах действует тождественно.

По китайской теореме об остатках найдется элемент $a \in R$ такой, что $a + s_1^2R = 0 + s_1^2R$ и $a + s_i^2R = 1 + s_i^2R$ для всех $2 \leq i \leq k$. Поэтому достаточно построить автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s))$, который переводит $E_{11} + I$ в $\mathrm{diag}(a, 1-a, 0, \dots, 0) + I$, $E_{22} + I$ в $\mathrm{diag}(1-a, a, 0, \dots, 0) + I$, а $E_{ii} + I$ переводит в себя для всех $3 \leq i \leq n$.

Так как по построению $a(1-a) \in s^2R$, то существует элемент $x \in R$ такой, что $a(1-a) = s^2x$. Тогда матрица $e = \begin{pmatrix} a & x \\ 1 & (1-a) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(R;s)$ будет идемпотентом. В силу предложения 3.13 найдется автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s))$ такой, что

(1) $\varphi(E_{kk}) = E_{kk}$ при $k > 2$;

(2) $\varphi(E_{11}) = e \oplus (0)_{n-2}$, $\varphi(E_{22}) = (I_2 - e) \oplus (0)_{n-2}$.

Очевидно, что автоморфизм φ искомый. □

Следствие 3.15. *Пусть $n \geq 2$, кольцо R является областью главных идеалов и $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Пусть также $s = up_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ — разложение s на попарно не ассоциированные простые элементы. Тогда*

$$\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_n(R;s)) \cong (S_n)^k.$$

Заметим, что в предложении 3.4 фактически доказывается следующий факт: если в $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ имеется разложение единицы $1 = e_1 + \ldots + e_n$ такое, что каждый идемпотент e_i отличается от E_{ii} только на элемент из I, то для некоторой обратимой матрицы $U \in \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ имеет место равенство $e_i = UE_{ii}U^{-1}$ $\forall 1 \le i \le n$. Это позволяет доказать теорему об изоморфизме для $\mathbb{M}_n(R;s)$, пользуясь знанием группы внешних автоморфизмов.

Теорема 3.16. *Пусть кольцо R факториально, $s \in R$, $n \in \mathbb{N}$. Алгебры формальных матриц $\mathbb{M}_n(R;s)$ и $\mathbb{M}_n(R;\eta)$ изоморфны в точности тогда, когда $\eta_{ijk} = u_{ijk}s^{\delta_{ijk}}$ для всех $1 \le i,j,k \le n$, где $u_{ijk} \in U(R)$.*

Доказательство. Если $s \in U(R)$, то утверждение теоремы вытекает из [10, предложение 3.3]. Если $s = 0$, то утверждение теоремы вытекает из [12, лемма 9.2]. Таким образом, достаточно ограничиться случаем $s \notin U(R) \cup \{0\}$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathbb{M}_n(R;\eta)$ такое кольцо формальных матриц, что $\eta_{ijk} = u_{ijk}s^{\delta_{ijk}}$, где $u_{ijk} \in U(R)$ для всех $1 \le i,j,k \le n$. Нетрудно видеть, что набор u_{ijk} удовлетворяет условию: $u_{ijk}u_{ikl} = u_{ijl}u_{jkl}$ для всех $1 \le i,j,k,l \le n$.

Положим $g_{ij} = u_{1ij}$, $1 \le i,j \le n$. Тогда

$$g_{ij}g_{jk}s^{\delta_{ijk}} = u_{1ij}u_{1jk}s^{\delta_{ijk}} = u_{1ik}u_{ijk}s^{\delta_{ijk}} = g_{ik}\eta_{ijk}.$$

Таким образом, отображение $\Psi : \mathbb{M}_n(R;\eta) \to \mathbb{M}_n(R;s)$, определенное по правилу $(a_{ij}) \mapsto (g_{ij}a_{ij})$, будет изоморфизмом.

($\Rightarrow$) Пусть $\Psi : \mathbb{M}_n(R;\eta) \to \mathbb{M}_n(R;s)$ — изоморфизм. Через E_{ij} и F_{ij} обозначим матричные единицы колец $\mathbb{M}_n(R;s)$ и $\mathbb{M}_n(R;\eta)$ соответственно. Пусть также $I = \langle E_{ij} \mid i \ne j \rangle$ — идеал в $\mathbb{M}_n(R;s)$, $\Psi(F_{11}),\ldots,\Psi(F_{nn})$ — набор из n взаимно ортогональных ненулевых идемпотентов в $\mathbb{M}_n(R;s)$. Заметим, что ни один из них не может лежать в I. В самом деле, пусть $e \in I$ — идемпотент. Так как элементы главной диагонали матриц из I лежат в sR, то $e = e^2 \in s\mathbb{M}_n(R;s)$. Тем более для любого натурального k имеем $e = e^{2k} \in s^k\mathbb{M}_n(R;s)$. В силу факториальности R это возможно, только если $e = 0$.

Пусть $s = s_1s_2\cdots s_k$ — разбиение из леммы 3.9. Для каждого $1 \le t \le k$ можно рассмотреть идеал $I_{s_t} \subseteq \mathbb{M}_n(R;s)$, состоящий из всех матриц, элементы которых на главной диагонали лежат в s_tR. Дублируя рассуждения выше, получаем, что идемпотенты $\Psi(F_{11}),\ldots,\Psi(F_{nn})$ не лежат в s_tR. Так как фактор-алгебра $\mathbb{M}_n(R;s)/I_{s_t} \cong \prod\limits_{i=1}^{n} R/s_tR$ содержит единственный набор из n попарно ортогональных ненулевых идемпотентов, то $\Psi(F_{11}) + I_{s_t},\ldots,\Psi(F_{nn}) + I_{s_t}$ совпадают с ними с точностью до некоторой перестановки.

Таким образом, можно заключить, что отображение $E_{ii} + I \mapsto \Psi(F_{ii}) + I$ задает R-автоморфизм $\mathbb{M}_n(R;s)/I$. В силу теоремы 3.14 и [10, лемма 5.5] найдется автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n(R;s))$ такой, что $\alpha(E_{ii}) - \Psi(F_{ii}) \in I$.

Композиция $\alpha^{-1}\Psi : \mathbb{M}_n(R;\eta) \to \mathbb{M}_n(R;s)$ будет изоморфизмом, для которого $\alpha^{-1}\Psi(F_{ii}) - E_{ii} \in I$. Рассуждая, как и в доказательстве предложения 3.4, получаем, что $C_U\alpha^{-1}\Psi(F_{ii}) = E_{ii}$ для некоторой обратимой матрицы $U \in U(\mathbb{M}_n(R;s))$, где C_U — соответствующий U внутренний автоморфизм.

Так как элемент E_{ij}, $i \ne j$, характеризуется тем, что $E_{ii}M_n(R;s)E_{jj} = E_{ij}R$, то изоморфизм $C_U\alpha^{-1}\Psi$ переводит элемент F_{ij} в $g_{ij}E_{ij}$, где $g_{ij} \in U(R)$ в силу сюръективности. Остается заметить, что

$$\begin{aligned}\eta_{ijk}g_{ik}E_{ik} &= \eta_{ijk}C_U\alpha^{-1}\Psi(F_{ik}) = C_U\alpha^{-1}\Psi(F_{ij}F_{jk}) \\ &= C_U\alpha^{-1}\Psi(F_{ij}) \cdot C_U\alpha^{-1}\Psi(F_{jk}) = g_{ij}g_{jk}s^{\delta_{ijk}}E_{ik}. \quad \square\end{aligned}$$

Следствие 3.17. *Пусть $s \in \mathbb{Z}$ и $n \geq 2$. Алгебры формальных матриц $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}; s)$ и $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}; \eta)$ изоморфны в точности тогда, когда $\eta_{ijk} = \pm s^{\delta_{ijk}}$ для всех $1 \leq i, j, k \leq n$.*

Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Пусть также $M = \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$, где $\beta_k = s^{\gamma_k}$, $\gamma_k \in \mathbb{Z}_+$ для каждого $1 \leq k \leq n$. Через $q_1 < q_2 < \ldots < q_t$ обозначим все попарно различные значения, которые могут принимать элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. При этом для каждого $1 \leq j \leq t$ элемент q_j встречается в последовательности $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ровно $n_j \in \mathbb{N}$ раз и $\sum\limits_{j=1}^{t} n_j = n$. Набор $\{(q_1, n_1), \ldots, (q_t, n_t)\}$ будем называть набором показателей s в последовательности $\beta_1, \ldots, \beta_n$ с учетом кратности.

Теорема 3.18. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Пусть также $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R$, где каждый элемент β_i представляет из себя целую неотрицательную степень элемента s и $\{(q_1, n_1), \ldots, (q_t, n_t)\}$ — набор показателей s в последовательности $\beta_1, \ldots, \beta_n$ с учетом кратности и $q_1 < q_2 < \ldots < q_t$. Если $n_1 > 1$, то*

$$\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)) \cong \begin{cases} (S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_t})^k, & \text{если } q_1 > 0, \\ (S_{n_2} \times \cdots \times S_{n_t})^k, & \text{если } q_1 = 0. \end{cases}$$

где k определяется, как в лемме 3.9.

Доказательство. Положим $M = \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$. В силу леммы 3.9 найдутся попарно взаимно простые элементы $s_1, \ldots, s_k \in R$ такие, что $s = s_1 \cdots s_k$, кольца $R/s_1R, \ldots, R/s_kR$ неразложимы и идеалы $s_1R, \ldots, s_kR$ попарно комаксимальны. Очевидно, что для любого натурального m кольца $R/s_1^mR, \ldots, R/s_k^mR$ также неразложимы и идеалы $s_1^mR, \ldots, s_k^mR$ попарно комаксимальны.

В силу теоремы 3.6 группа $\mathrm{Out}_R(M)$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}_R(M/I)$,

$$M/I \cong \left(\prod_{j=1}^{n_1} R/(s^{q_1+q_1}R)\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n_2} R/(s^{q_2+q_1}R)\right) \times \cdots \times \left(\prod_{j=1}^{n_t} R/(s^{q_k+q_1}R)\right).$$

По китайской теореме об остатках для каждого $1 \leq i \leq k$ имеет место изоморфизм

$$R/(s^{q_i+q_1}R) = R/(s_1^{q_i+q_1}R) \times R/\big(s_2^{q_i+q_1}R\big) \times \cdots \times R/\big(s_k^{q_i+q_1}R\big).$$

Так как числа $q_1 + q_1, q_2 + q_1, \ldots, q_k + q_1$ попарно различны, то

$$\mathrm{Aut}_R(M/I) \cong \mathrm{Aut}_R\left(\prod_{j=1}^{n_1} R/(s^{q_1+q_1}R)\right) \times \mathrm{Aut}_R\left(\prod_{j=1}^{n_2} R/(s^{q_2+q_1}R)\right) \times \cdots$$
$$\times \mathrm{Aut}_R\left(\prod_{j=1}^{n_t} R/(s^{q_k+q_1}R)\right) \cong G \times S_{n_2}^k \times \cdots S_{n_t}^k,$$

где $G = S_{n_1}^k$, если $q_1 > 0$, и $G = \{e\}$ иначе.

Пусть $\Phi : \mathrm{Aut}_R(M/I) \to G \times S_{n_2}^k \times \cdots S_{n_t}^k$ — соответствующий изоморфизм и $\Theta : \mathrm{Out}_R(M) \to \mathrm{Aut}_R(M/I)$ — введенное в доказательстве теоремы 3.6 отображение. Фиксируем индекс $1 \leq i \leq k$. Если $n_i = 1$, то группа S_{n_i} одноэлементна. Если $n_i > 1$ и $q_i > 0$, то в силу изоморфизма $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\pi(\beta_1),\ldots,\pi(\beta_n)}(R)$

для произвольного $\pi \in S_n$, как и при доказательстве теоремы 3.14, получаем, что в образе $\Phi \cong \Theta$ целиком содержится подгруппа

$$1_{n_1} \times 1_{n_2} \times \cdots \times 1_{n_{i-1}} \times S_{n_i}^k \times 1_{n_{i+1}} \times \cdots \times 1_{n_t},$$

где под 1_{n_j} понимается единица группы $S_{n_j}^k$ (или единица группы G при $j = 1$). Следовательно, $\mathrm{Out}_R(M) \cong \mathrm{Aut}_R(M/I)$. $\square$

Замечание 3.19. Пусть элементы $\beta_1, \ldots, \beta_n$ заданы, как в условии теоремы 3.18, $\{(q_1, n_1), \ldots, (q_t, n_t)\}$ — набор показателей s в последовательности $\beta_1, \ldots, \beta_n$ с учетом кратности, $q_1 < q_2 < \ldots < q_t$ и $n_1 = 1$. Следуя доказательству теоремы 3.18, легко показать, что группа $\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ изоморфно вкладывается в $(S_{n_2+1} \times S_{n_3} \times \cdots \times S_{n_t})^k$. Через H обозначим подгруппу S_{n_2+1}, состоящую из перестановок, которые оставляют элемент 1 неподвижным. Тогда образ $\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ при вложении выше содержит $(H \times S_{n_3} \times \cdots \times S_{n_t})^k \cong (S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times \cdots \times S_{n_t})^k$. Неизвестно, будет ли образ изоморфен данному произведению. Однако если кольцо R/sR неразложимо, то изоморфизм будет иметь место в силу предложения 3.10.

Следствие 3.20. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$ и кольцо R/sR неразложимо. Пусть также $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R$, где каждый элемент β_i представляет из себя целую неотрицательную степень элемента s и $\{(q_1, n_1), \ldots, (q_t, n_t)\}$ — набор показателей s в последовательности $\beta_1, \ldots, \beta_n$ с учетом кратности. Тогда*

$$\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)) \cong \begin{cases} S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_t}, & \text{если } q_1 > 0, \\ S_{n_2} \times \cdots \times S_{n_t}, & \text{если } q_1 = 0. \end{cases}$$

Пусть в условиях следствия 3.20 среди элементов $\beta_1, \ldots, \beta_n$ имеется не более одного обратимого элемента. Тогда фактор-алгебра $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)/I$ содержит единственный набор из n попарно ортогональных ненулевых идемпотентов. Поэтому, повторяя доказательство теоремы 3.16, можно получить аналогичную теорему об изоморфизме. В доказательство потребуется внести только одно изменение. Два набора взаимно ортогональных идемпотентов $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ и $\Psi(F_{11}), \ldots \Psi(F_{nn})$ теперь позволяют задать R-автоморфизм вида $E_{\pi(i)\pi(i)} + I \mapsto \Psi(F_{ii}) + I$ для некоторой перестановки $\pi \in S_n$.

Теорема 3.21. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$ и кольцо R/sR неразложимо. Пусть также набор $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R$, где каждый элемент β_i представляет из себя целую неотрицательную степень элемента s, содержит не более одного обратимого элемента. Алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ и $\mathbb{M}_n(R;\eta)$ изоморфны в точности тогда, когда для некоторой перестановки $\pi \in S_n$:*

(1) $\eta_{ijk} = u_{ijk}\beta_{\pi(j)}$ для всех попарно различных $1 \leq i, j, k \leq n$, где $u_{ijk} \in U(R)$;

(2) $\eta_{iji} = u_{iji}\beta_{\pi(i)}\beta_{\pi(j)}$ для всех попарно различных $1 \leq i, j \leq n$, где $u_{iji} \in U(R)$.

Из теоремы 3.18 напрямую получить аналогичный результат не представляется возможным. Разложимость кольца R/sR вместе с различием идеалов $\beta_i\widehat{\beta}_iR$ уже не гарантируют наличие R-автоморфизма вида $E_{\pi(i)\pi(i)} + I \mapsto \Psi(F_{ii}) + I$ на фактор-алгебре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skolem T.* Zur Theorie der assoziativen Zahlensysteme // Oslo Vial. Akad. Skr. I. 1927. N 12. P. 50.
2. *Noether E.* Hyperkomplexe Gröıen und Darstellungstheorie // Math. Z. 1929. V. 30. P. 641–692.
3. *Isaacs I. M.* Automorphsms of matrix algebras over commutative rings // Linear Algebra Appl. 1980. V. 31. P. 215–231.
4. *Courtemanche J., Dugas M.* Automorphisms of the endomorphism algebra of a free module // Linear Algebra Appl. 2016. V. 510. P. 79–91.
5. *Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д.* Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 1116–1127.
6. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Группы автоморфизмов колец формальных матриц // Итоги науки и техн. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 164. С. 96–124.
7. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Formal matrix rings: Automorphisms // Internat. J. Algebra Comput. 2023. V. 33, N 4. P. 687–698.
8. *Tang G., Zhou Y.* A class of formal matrix rings // Linear Algebra Appl. 2013. V. 438, N 12. P. 4672–4688.
9. *Крылов П. А.* Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 456–463.
10. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* Кольца формальных матриц и их изоморфизмы // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1199–1214.
11. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* О некоторых классах колец формальных матриц // Изв. вузов. Математика. 2016. № 3. С. 3–14.
12. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Формальные матрицы и их определители // Фундамент. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 1. С. 65–119.
13. *Tang G., Li C., Zhou Y.* Study of Morita contexts // Commun. Algebra. 2014. V. 42, N 4. P. 1668–1681.
14. *Кульгускин И. А., Тапкин Д. Т.* Инволюции колец $K_s(R)$ // Математика и теоретические компьютерные науки. 2023. Т. 1, № 4. С. 81–104.
15. *Anderson D. D.* GCD domains, Gauss' lemma, and contents of polynomials. Boston, MA: Springer US, 2000.
16. *Cohn P. M.* Bezout rings and their subrings // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1968. V. 64. P. 251–264.
17. *Azumaya G.* On maximally central algebras // Nagoya Math. J. 1951. V. 2. P. 119–150.

Поступила в редакцию 24 июля 2025 г.
После доработки 31 октября 2025 г.
Принята к публикации 7 ноября 2025 г.

Абызов Адель Наилевич (ORCID 0000-0002-9809-2091),
Тапкин Даниль Тагирзянович (ORCID 0000-0003-0828-4397)
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420000;
Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I,
Московский пр., 9, Санкт-Петербург 190031
Adel.Abyzov@kpfu.ru, danil.tapkin@yandex.ru