*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1*

*УДК 519.2*

# О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА

**Е. И. Зотова, Ф. С. Насыров**

**Аннотация.** Построен новый метод решения задачи Коши для стохастических и детерминированных обобщенных уравнений Бюргерса с временным шумом в нелинейной части уравнения. Решение стохастического обобщенного уравнения Бюргерса представлено в виде преобразования Вейерштрасса от функции, которая является решением задачи Коши для обобщенного уравнения Хопфа. Полученные результаты остаются справедливыми для детерминированного обобщенного уравнения Бюргерса.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.107

**Ключевые слова:** обобщенное уравнение Бюргерса, обобщенное уравнение Хопфа, стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, симметричный интеграл, стохастический интеграл Стратоновича.

## 1. Введение

Задача Коши для обобщенного уравнения Бюргерса с шумом в нелинейной части может быть формально записана в виде

$$\begin{gathered}\widetilde{u}_t + (f(\widetilde{u}))_x V'(t) = \widetilde{u}_{xx}, \quad \widetilde{u}(x,0) = \varphi(x),\\ \widetilde{u} = \widetilde{u}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $f(\widetilde{u})$ — нелинейная функция, $V'(t)$ — формальная производная непрерывной детерминированной функции $V(t)$ или случайного процесса $V(t)$ с непрерывными реализациями, которая может и не существовать (например, $V(t)$ — винеровский процесс). При математически строгой постановке задачи Коши (1.1) обобщенное уравнение Бюргерса должно быть записано в интегральной форме

$$\widetilde{u}(x,t) - \widetilde{u}(x,0) + \int\limits_0^t (f(\widetilde{u}(x,s)))_x * dV(s) = \int\limits_0^t \widetilde{u}_{xx}(x,s)\, ds,$$

где интеграл в левой части равенства — симметричный интеграл [1] относительно процесса $V(t)$. В случае $V(t) = t$ задача (1.1) сводится к задаче Коши для обобщенного уравнения Бюргерса без шума

$$\widetilde{u}_t + (f(\widetilde{u}))_x = \widetilde{u}_{xx}, \quad \widetilde{u}(x,0) = \varphi(x), \quad \widetilde{u} = \widetilde{u}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \tag{1.2}$$

Полагая $f(\widetilde{u}) = \frac{\widetilde{u}^2}{2}$ в задаче (1.2), получаем задачу Коши для уравнения Бюргерса

$$\widetilde{u}_t + \widetilde{u}\widetilde{u}_x = \widetilde{u}_{xx}, \quad \widetilde{u}(x,0) = \varphi(x), \quad \widetilde{u} = \widetilde{u}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \tag{1.3}$$

Данное уравнение является классическим примером в теории нелинейных волн, поскольку оно описывает взаимодействие двух противоположных волновых эффектов: затухания из-за вязкости и нелинейного распространения [2, 3].

Известно, что преобразование Коула — Хопфа (см. [4, 5])

$$\widetilde{u} = -2\frac{\partial \ln \phi}{\partial x}$$

сводит уравнение Бюргерса (1.3) к уравнению теплопроводности

$$\phi_t = \phi_{xx}, \quad \phi = \phi(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса (1.3) определяется из следующих соотношений:

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} \exp\left\{\frac{-G(\eta,x,t)}{2}\right\} d\eta}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{-G(\eta,x,t)}{2}\right\} d\eta}, \quad G(\eta,x,t) = \frac{(x-\eta)^2}{2t} + \int\limits_{0}^{\eta} \varphi(\mu)\, d\mu. \tag{1.4}$$

Соотношения (1.4) позволяют строить решения уравнения Бюргерса с различными начальными профилями волн [6].

Ранее было доказано [7], что преобразование Коула — Хопфа применимо к уравнению Бюргерса с аддитивным пространственно-временным белым шумом. Задача в этом случае свелась к анализу линейного уравнения с мультипликативным шумом. В работах [8, 9] были доказаны существование и единственность глобального решения для уравнения Бюргерса с аддитивным шумом и мультипликативным шумом.

В работе [10] исследовалась задача Коши для стохастического дифференциального уравнения Бюргерса со случайной внешней силой, представленной в виде стохастического интеграла. Поставленная задача Коши для стохастического дифференциального уравнения была сведена к решению задачи Коши для уравнения Бюргерса с внешней силой, уже не содержащей стохастического интеграла.

Целью данной работы является построение нового способа решения задачи Коши для обобщенного уравнения Бюргерса как с шумом, так и без шума. В работе решение задачи Коши (1.1) для стохастического обобщенного уравнения Бюргерса найдено в виде функции трех переменных

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x,t,V(t)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi, V(t)) \exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right\} d\xi,$$

где функция $g(x,v) = u(x,0,v)$ является решением задачи Коши для обобщенного уравнения Хопфа

$$g_v + (f(g))_x = 0, \quad g(x,0) = \varphi(x).$$

Представленный метод решения уравнения (1.1), где в качестве шума берется случайный процесс $V(t)$ с непрерывными реализациями или произвольная непрерывная функция, основан на технике симметричных интегралов. Симметричный интеграл (см. [1]) по непрерывной функции является обобщением стохастического интеграла Стратоновича и совпадает с ним в случае винеровского процесса. Метод, применяемый в данной работе, первоначально был построен для решения обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений [1].

Работа организована следующим образом: в разд. 2 представлен основной результат, разд. 3 является приложением, в нем представлен ряд сведений о симметричных интегралах, применяемых в данной работе.

## 2. Основной результат

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ задан случайный процесс $V(t)$, $t \in [0,T]$, $T \in \mathbb{R}^+$, $V(0) = 0$, обладающий непрерывными с вероятностью 1 реализациями. Рассмотрим задачу Коши (1.3) для стохастического обобщенного уравнения Бюргерса, которое в интегральной форме имеет вид

$$\widetilde{u}(x,t) - \widetilde{u}(x,0) + \int\limits_0^t (f(\widetilde{u}(x,s)))_x * dV(s) = \int\limits_0^t \widetilde{u}_{xx}(x,s)\, ds, \quad \widetilde{u}(x,0) = \varphi(x), \tag{2.1}$$

где интеграл в левой части равенства — симметричный интеграл [1] относительно процесса $V(t)$.

Обозначим

$$u(x,t,v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi, v) \exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right\} d\xi, \tag{2.2}$$

где $g(x,v) = u(x,0,v)$.

**Теорема 1.** *Пусть функция $g(x,v)$ определяется из соотношения*

$$g(x,v) = \varphi(x - vf'(g(x,v))). \tag{2.3}$$

*Тогда функция $\widetilde{u}(x,t) = u(x,t,V(t))$, заданная с помощью формулы (2.2), является решением задачи Коши для стохастического обобщенного уравнения Бюргерса (2.1).*

Доказательство. В силу формулы (3.1) левая часть уравнения (2.1) зависит от переменных $(t, V(0), V(t))$, поэтому решение уравнения (2.1) будем искать в виде функции трех переменных

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x,t,V(t)),$$

где $u(x,t,v)$ — функция, подлежащая определению. Воспользовавшись формулой для стохастического дифференциала (3.2), перепишем уравнение (2.1) в виде

$$\int\limits_0^t u_s(x,s,V(s))\, ds + \int\limits_0^t u_v(x,s,V(s)) * dV(s) + \int\limits_0^t (f(u(x,s,V(s))))_x * dV(s) = \int\limits_0^t u_{xx}(x,s)\, ds$$

или

$$\int\limits_0^t [u_s(x,s,V(s)) - u_{xx}(x,s,V(s))]\, ds = -\int\limits_0^t [u_v(x,s,V(s)) + (f(u(x,s,V(s))))_x] * dV(s). \tag{2.4}$$

Пусть $V(t)$ — непрерывная нигде не дифференцируемая функция. В силу леммы 1 о равенстве двух интегралов уравнение (2.4) равносильно системе

$$\begin{cases} u_t(x,t,V(t)) = u_{xx}(x,t,V(t)), \\ u_v(x,t,V(t)) + (f(u(x,t,V(t))))_x = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Если $V(t)$ — произвольная непрерывная функция, то решение уравнения (2.4) будет найдено, если найдется решение системы (2.5).

Заметим, что система уравнений (2.5) представляет собой неклассическую систему уравнений, для которой стандартные методы решения не разработаны. Поэтому вместо первого уравнения системы (2.5) рассмотрим при каждом фиксированном значении переменной $v$ уравнение теплопроводности относительно переменных $x$ и $t$:

$$u_t(x,t,v) = u_{xx}(x,t,v),$$

решение которого определяется из соотношения (2.2). Следовательно, решение первого уравнения системы (2.5) имеет вид

$$u(x,t,V(t)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi, V(t)) \exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right\} d\xi. \tag{2.6}$$

Правая часть равенства (2.6) зависит от неизвестной функции $g(x, V(t))$, которую будем искать как решение задачи Коши для второго уравнения системы (2.5) при $t = 0$:

$$g_v + (f(g))_x = 0, \quad g(x,0) = \varphi(x), \quad (x,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Решение этой задачи Коши представимо в неявном виде (2.3) и при $v = V(t)$ определяет неизвестную функцию в правой части равенства (2.6):

$$g(x, V(t)) = \varphi(x - V(t) f'(g(x, V(t)))). \tag{2.7}$$

Итак, функция $u(x,t,V(t))$ полностью определяется соотношениями (2.6) и (2.7), удовлетворяет первому уравнению системы (2.5) и второму уравнению системы (2.5) при $t = 0$.

Проверим, что $u(x,t,V(t))$ удовлетворяет второму уравнению системы (2.5) при любом $t$. Рассмотрим обобщенное уравнение Хопфа

$$u_v(x,t,V(t)) + (f(u(x,t,V(t))))_x = 0. \tag{2.8}$$

Решение уравнения (2.8) имеет вид

$$u(x,t,V(t)) = \Phi(x - V(t) f'(u(x,t,V(t))), t), \tag{2.9}$$

где $\Phi$ — неизвестная функция. Так как $g(x, V(t)) = u(x, 0, V(t))$, то из соотношений (2.6) и (2.7) следуют равенства

$$u(x,t,V(t)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\xi, 0, V(t)) \exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right\} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi - V(t) f'(u(\xi, 0, V(t)))) \exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right\} d\xi.$$

Тогда при любом фиксированном значении $t$ можно построить функцию

$$\Phi(x - V(t)f'(u(x,t,V(t))),t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi - V(t)f'(u(\xi,0,V(t))))\exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right\}d\xi$$

и существует решение (2.9) для обобщенного уравнения Хопфа (2.8). Значит, функция $u(x,t,V(t))$ удовлетворяет второму уравнению системы (2.5) при любом $t$.

Таким образом, функция $\widetilde{u}(x,t) = u(x,t,V(t))$, определяемая соотношениями (2.6) и (2.7), удовлетворяет системе (2.5) и является решением задачи Коши (2.1) для стохастического обобщенного уравнения Бюргерса.

Замечание 1. Пусть в задаче (2.1) $f(\widetilde{u}) = \frac{\widetilde{u}^2}{2}$ и $V(t) = t$. Мы получаем задачу Коши для уравнения Бюргерса (1.3). Решение этой задачи определяется из соотношений

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi,t)\exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right\}d\xi,$$

$$g_t + gg_x = 0, \quad g(x,0) = \varphi(x), \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+.$$

Замечание 2. Полагая $f(\widetilde{u}) = \frac{\widetilde{u}^2}{2}$ в задаче (2.1), получаем задачу Коши для стохастического уравнения Бюргерса. Решение этой задачи определяется из соотношений

$$u(x,t,V(t)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi,V(t))\exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right\}d\xi, \tag{2.10}$$

$$g_v + gg_x = 0, \quad g(x,0) = \varphi(x), \quad (x,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Пример 1. Исследуем задачу Коши (1.3) для стохастического уравнения Бюргерса. Известно, что задача Коши для уравнения Хопфа (2.11) с начальным условием

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_1, & x \le 0,\\ u_2, & x > 0,\end{cases}$$

имеет решение вида

$$g(x,t) = \begin{cases} u_1, & x \le aV(t),\\ u_2, & x > aV(t),\end{cases}$$

где $u_1 > u_2$ и $a = \frac{u_1+u_2}{2}$ — константы. Тогда решение задачи Коши для стохастического уравнения Бюргерса определяется из (2.10) и имеет вид

$$u(x,t) = \frac{u_1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{aV(t)}\exp\left[\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right]d\xi + \frac{u_2}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{aV(t)}^{\infty}\exp\left[\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right]d\xi$$
$$= u_1\Phi\left(\frac{aV(t)-x}{\sqrt{2t}}\right) + u_2\left(1 - \Phi\left(\frac{aV(t)-x}{\sqrt{2t}}\right)\right), \tag{2.12}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left[\frac{-y^2}{2}\right]dy$$

— функция Лапласа.

Если $V(t) = W(t)$ в (2.12), где $W(t)$ — винеровский процесс, то получаем решение задачи Коши для стохастического уравнения Бюргерса с винеровским шумом.

Замечание 3. Отметим, что соотношение (2.6) является обобщенным преобразованием Вейерштрасса [11] функции $g(x,v)$ с параметром $t$. Преобразование Вейерштрасса дает «сглаженную» версию функции $g(x,v)$, что гарантирует гладкость полученного решения.

## 3. Приложение. Симметричные интегралы

В этом разделе кратко излагается теория симметричных интегралов. Симметричный интеграл является обобщением интеграла типа Стилтьеса. В случае интеграла по винеровскому процессу симметричный интеграл совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича с вероятностью 1.

Определение 1. Пусть $V(t)$, $t \in [0,+\infty)$, — произвольная непрерывная функция. *Симметричным интегралом* называется

$$\int_0^t f(s,V(s)) * dV(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s,V^{(n)}(s))\,ds\,\Delta V_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(s,V^{(n)}(s))(V^{(n)})'(s)\,ds,$$

где $V^{(n)}(s)$ — ломаная, построенная функцией $V(t)$ и разбиением $\{t^{(n)}\}$ промежутка $[0,t]$ таким образом, что $\max\limits_k\bigl(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\bigr) \to 0$ при $n\to\infty$.

Определение 2. Будем говорить, что для пары функций $(V(s), f(s,u))$ *выполнено условие* $(S)$, если верны следующие предположения:

(a) $V(s)$, $s \in [0,t]$, является непрерывной функцией;

(b) для почти всех $u$ функция $f(s,u)$, $s\in[0,t]$, непрерывна справа и имеет ограниченную вариацию;

(c) полная вариация $|f|(t,u)$ по $s$ функции $f(s,u)$ на $[0,t]$ локально суммируема по переменной $u$;

(d) для почти всех $u$

$$\int_0^t \mathbf{1}(s:\, V(s)=u)|f|(ds,u) = 0,$$

где $\mathbf{1}(A)$ — индикатор множества A, т. е. функция, равная 1 на $A$ и 0 вне $A$.

Некоторые свойства симметричного интеграла.

1. Пусть пара функций $(V(s), f(s,v))$ удовлетворяет условию $(S)$. Тогда

$$\int_0^t f(s,V(s)) * dV(s) = \int_{V(0)}^{V(t)} f(t,v)\,dv - \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \kappa(v,V(0),V(s)) f(ds,v)\,dv, \tag{3.1}$$

где $\kappa(v,a,b) = \operatorname{sgn}(b-a)\mathbf{1}(a\wedge b < v < a\vee b)$. Это означает, что симметричный интеграл является функцией трех переменных.

2. Пусть функция $F(t,u)$ имеет непрерывные частные производные $F'_t(t,u)$ и $F'_u(t,u)$. Тогда существует симметричный интеграл $\int\limits_0^t F'_u(s,V(s)) * dV(s)$ и справедлива формула

$$F(t,V(t)) - F(0,V(0)) = \int\limits_0^t F'_s(s,V(s))\,ds + \int\limits_0^t F'_u(s,V(s)) * dV(s). \qquad (3.2)$$

Если $V(s)$ — винеровский процесс, то формула (3.2) совпадает с формулой для стохастического дифференциала Стратоновича.

**Лемма 1** (о равенстве двух интегралов). *Пусть $V(s)$, $s \in [0,T]$, — непрерывная нигде не дифференцируемая функция. Предположим, что непрерывные функции $f_1(s,v)$ и $f_2(s,v)$, $(s,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, удовлетворяют следующим условиям:*

(a) *функция $f_2(s,V(s))$, $s \in [0,T]$, суммируема;*

(b) *функция $f_1(s,v)$ для каждого $s$ суммируема по переменной $v \in R$ и имеет непрерывную производную $(f_1(s,v))'_s$, удовлетворяющую условию*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^T |(f_1(s,v))'_s|\,dsdv < \infty.$$

*Тогда условие*

$$\int\limits_0^t f_1(s,V(s)) * dV(s) = \int\limits_0^t f_2(s,V(s))\,ds, \quad t \in [0,T],$$

*эквивалентно условию*

$$f_1(s,V(s)) = f_2(s,V(s)) = 0, \quad s \in [0,T].$$

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Насыров Ф. С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. М.: Физматлит, 2011.
2. *Burgers J. M.* The nonlinear diffusion equation: Asymptotic solutions and statistical problems. Dordrecht: D. Reidel, 1974.
3. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves. New York: Wiley, 1974.
4. *Cole J. D.* On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. V. 9, N 3. P. 225–236.
5. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$ // Commun. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. P. 201–230.
6. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of nonlinear partial differential equations. Boca Raton: Chapman Hall & CRC Press, 2012.
7. *Bertini L., Cancrini N., Jona-Lasinio G.* The stochastic Burgers equation // Commun. Math. Phys. 1994. V. 165. P. 211–232.
8. *Prato G. Da, Debussche A., Temam R.* Stochastic Burgers′ equation // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 1994. V. 1. P. 389.
9. *Prato G. Da, Gatarek D.* Stochastic burgers′ equation with correlated noise // Stoch. Rep. 1995. V. 52. P. 29–41.
10. *Насыров Ф. С., Парамошина И. Г.* Эволюционные стохастические уравнения Ито и их моделирование // Вестн. Уфимск. гос. авиационного техн. ун-та. 2008. Т. 11, № 1. С. 175–180.

**11.** *Zayed A. I.* Handbook of function and generalized function transformations. Boca Raton: CRC Press, 1996. V. 18.

*Поступила в редакцию 3 апреля 2025 г.*
*После доработки 10 сентября 2025 г.*
*Принята к публикации 26 сентября 2025 г.*

Зотова Екатерина Игоревна (ORCID 0009-0005-5965-8397),
Насыров Фарит Сагитович (ORCID 0000-0002-6566-5156)
Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32, Уфа 450076
zot-kate83@yandex.ru, farsagit@yandex.ru