

СЛАБАЯ ЛАТЕРАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ А. Е. Гутман, А. В. Коптев

Аннотация. Описана латеральная сходимость последовательностей в банаховых пространствах, снабженных слабой топологией.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.106

Ключевые слова: топологическое пространство, отделимость, сходящаяся последовательность, банахово пространство, слабая топология, сепарабельность.

В работе [1] было введено и исследовано понятие латеральной сходимости в топологическом пространстве и, в частности, показано, что латеральная сходимость последовательности обеспечивает существование непрерывных отображений (в том числе вектор-функций, сечений и гомоморфизмов банаховых расслоений), принимающих заранее заданные значения в точках этой последовательности. В связи с этим возникает задача описания латеральной сходимости в конкретных классах топологических пространств.

Латеральная сходимость подразумевает определенную отделимость членов последовательности друг от друга и от предельной точки. В регулярных топологических пространствах, имеющих счетный псевдохарактер (в частности, в метрических пространствах), латеральная сходимость описывается очень просто: сходящаяся последовательность сходится латерально тогда и только тогда, когда она сходится инъективно, т. е. когда ее члены отличны друг от друга и от предельной точки (см. [1, 1.15]). Менее очевидной задачей является описание латеральной сходимости в банаховых пространствах, снабженных слабой топологией, а также в замкнутых шарах таких пространств. Решению этой задачи посвящена настоящая заметка.

Основные результаты состоят в следующем. Пусть X_w и B_w — банахово пространство X и его замкнутый единичный шар, снабженные слабой топологией, а X'_w и B'_w — соответствующее топологически сопряженное пространство и его замкнутый единичный шар, снабженные слабой* топологией. Если пространство X сепарабельно, то в X'_w и B'_w латеральная сходимость равносильна инъективной сходимости (следствие 16). Если же X не сепарабельно, то в пространстве X'_w нет ни одной латерально сходящейся последовательности (теорема 18), а в шаре B'_w латеральная сходимость последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ тесно связана со сходимостью $\|f_n\| \rightarrow 1$ (теоремы 17 и 23 и следствие 24). Справедливы также двойственные утверждения, описывающие латеральную сходимость последовательностей $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в X_w и B_w в связи с сепарабельностью X'_w и сходимостью $\|x_n\| \rightarrow 1$. Кроме того, приведены примеры, когда в пространствах B_w и B'_w отсутствуют латерально сходящиеся последовательности (теорема 25).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1, § 1]. Пусть X — произвольное топологическое пространство.

Покрытием последовательности точек $x_n \in X$ называется произвольная последовательность множеств $U_n \subseteq X$, каждое из которых является окрестностью соответствующей точки x_n .

Последовательность множеств $U_n \subseteq X$ латерально сходится к точке $x \in X$, если

$$\text{cl}U_m \cap \text{cl} \bigcup_{n>m} U_n = \emptyset$$

для всех $m \in \mathbb{N}$ и, кроме того, x является единственной собственной предельной точкой объединения $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{cl}U_n$, т. е.

$$\left(\text{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{cl}U_n = \{x\}.$$

Последовательность точек $x_n \in X$ латерально сходится к точке $x \in X$, если $x_n \rightarrow x$ и последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ допускает покрытие, латерально сходящееся к x . Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ инъективно сходится к x , если $x_n \rightarrow x$, $x_n \neq x_m$ при $n \neq m$ и, кроме того, $x_n \neq x$ для всех $n \in \mathbb{N}$. (Очевидно, всякая латерально сходящаяся последовательность сходится инъективно.)

Лемма 2 [1, 1.2]. Пусть X — топологическое пространство. Последовательность множеств $U_n \subseteq X$ латерально сходится к точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:

- (a) $\text{cl}U_m \cap \text{cl}U_n = \emptyset$ при $m \neq n$;
- (b) $x \in \text{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{cl}U_n$;
- (c) если $x \neq y \in X$, то $y \notin \text{cl} \bigcup_{n \geq m} U_n$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Лемма 3 [1, 1.13]. Пусть в регулярном топологическом пространстве последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ инъективно сходится к точке x и допускает покрытие $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, обладающее следующим свойством: для любой окрестности V точки x найдется такой номер $m \in \mathbb{N}$, что $U_n \subseteq V$ для всех $n \geq m$. Тогда $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ латерально сходится к x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Псевдохарактер T_1 -пространства X в точке $x \in X$ обозначается символом $\psi(x, X)$ и определяется как наименьшая среди мощностей $|\mathcal{U}|$ множеств \mathcal{U} , состоящих из открытых подмножеств X и удовлетворяющих равенству $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$:

$$\psi(x, X) := \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \text{Open}(X), \bigcap \mathcal{U} = \{x\}\}.$$

Псевдохарактером пространства X называется кардинал $\sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Очевидно, псевдохарактер пространства X счетен тогда и только тогда, когда X имеет счетный псевдохарактер в каждой точке. Примерами пространств, имеющих счетный псевдохарактер, служат пространства, удовлетворяющие первой аксиоме счетности. В частности, таковы все метрические пространства.

Предложение 6 [1, 1.15]. Пусть X — регулярное топологическое пространство и $x \in X$. Если псевдохарактер $\psi(x, X)$ счетен, то всякая последовательность в X , инъективно сходящаяся к точке x , сходится латерально.

Следствие 7. В регулярном топологическом пространстве, имеющем счетный псевдохарактер, инъективная и латеральная сходимости последовательностей равносильны.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Как легко видеть, для любого хаусдорфова топологического векторного пространства X следующие утверждения равносильны:

- (a) X имеет счетный псевдохарактер;
- (b) X имеет счетный псевдохарактер в каждой точке;
- (c) X имеет счетный псевдохарактер в некоторой точке;
- (d) X имеет счетный псевдохарактер в нуле, т. е. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$ для некоторой последовательности $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ окрестностей нуля в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. (Все рассматриваемые здесь векторные пространства предполагаются вещественными.) Топологически сопряженное к X пространство (т. е. векторное пространство непрерывных линейных функционалов на X) обозначается символом X' . Символами X_w и X'_w условимся обозначать пространства X и X' , снабженные слабой и слабой* топологиями $\sigma(X, X')$ и $\sigma(X', X)$ соответственно. Как известно, в локально выпуклых пространствах X_w и X'_w базовыми окрестностями произвольных точек $x \in X$ и $f \in X'$ соответственно служат множества вида $x + (X \langle f_1 \rangle \cap \dots \cap X \langle f_m \rangle)$ и $f + (X' \langle x_1 \rangle \cap \dots \cap X' \langle x_m \rangle)$, где $m \in \mathbb{N}$, $f_i \in X'$, $x_i \in X$. Здесь и ниже используются обозначения

$$X \langle f \rangle := \{x \in X : |f(x)| < 1\}, \quad X' \langle x \rangle := \{f \in X' : |f(x)| < 1\}$$

для $x \in X$ и $f \in X'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство.

- (i) Как известно, следующие свойства подмножества $T \subseteq X$ равносильны:
 - (a) линейная оболочка T плотна в X ;
 - (b) если $f \in X'$ и $f = 0$ на T , то $f = 0$ на X ;
 - (c) если $f, g \in X'$ и $f \neq g$, то $f(t) \neq g(t)$ для некоторого элемента $t \in T$.
- (ii) Из (i) вытекает эквивалентность следующих свойств множества $F \subseteq X'_w$:
 - (a) линейная оболочка F плотна в X'_w ;
 - (b) если $x \in X$ и $f(x) = 0$ для всех $f \in F$, то $x = 0$;
 - (c) если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$ для некоторого $f \in F$.

Подмножества $T \subseteq X$ и $F \subseteq X'_w$, обладающие перечисленными выше эквивалентными свойствами, называют *тотальными* (а также фундаментальными или разделяющими, см. [2]).

Лемма 11. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство.

- (i) Следующие утверждения равносильны:
 - (a) X сепарабельно;
 - (b) X_w сепарабельно;
 - (c) X содержит счетное тотальное подмножество;
 - (d) X_w содержит счетное тотальное подмножество;
 - (e) X'_w имеет счетный псевдохарактер.

Более того, если X не сепарабельно, то для любой последовательности $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ окрестностей нуля в X'_w пересечение $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ содержит ненулевое векторное подпространство.

(ii) Следующие утверждения равносильны:

- (a) X'_w сепарабельно;
- (b) X'_w содержит счетное тотальное подмножество;
- (c) X_w имеет счетный псевдохарактер.

Более того, если X'_w не сепарабельно, то для любой последовательности $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ окрестностей нуля в X_w пересечение $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ содержит ненулевое векторное подпространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Равносильность условий (a)–(d) хорошо известна и легко проверяется, например, с помощью аппроксимации произвольных линейных комбинаций посредством комбинаций с рациональными коэффициентами, а также с использованием того факта, что замыкание выпуклого множества не зависит от выбора топологии, согласованной с двойственностью.

(c) \Rightarrow (e). Если T — тотальное подмножество X , то для любого ненулевого функционала $f \in X'$ найдутся такие $t \in T$ и $n \in \mathbb{N}$, что $|f(nt)| \geq 1$, а значит,

$$\bigcap_{(t,n) \in T \times \mathbb{N}} X' \langle nt \rangle = \{0\}.$$

(e) \Rightarrow (c). Пусть $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность окрестностей нуля в X'_w . Каждое из множеств U_n содержит некоторую базовую окрестность

$$X' \langle x_1^n \rangle \cap \cdots \cap X' \langle x_{m_n}^n \rangle,$$

где $m_n \in \mathbb{N}$, $x_i^n \in X$. Если счетное подмножество

$$T := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_1^n, \dots, x_{m_n}^n\} \subseteq X$$

не является тотальным, то найдется ненулевой функционал $f \in X'$, аннулирующийся на T , и тогда

$$\{\lambda f : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X' \langle x_1^n \rangle \cap \cdots \cap X' \langle x_{m_n}^n \rangle \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Утверждение (ii) непосредственно вытекает из (i). \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Всюду ниже X — произвольное вещественное банахово пространство, X' — сопряженное к X банахово пространство. Условимся использовать следующие обозначения:

$$B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\};$$

$$S := \{x \in X : \|x\| = 1\};$$

B_w — шар B как топологическое подпространство X_w ;

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in B : \|x - y\| < \varepsilon\} \text{ для } x \in B \text{ и } \varepsilon > 0;$$

$$B \langle x, f \rangle := (x + X \langle f \rangle) \cap B = \{y \in B : |f(x - y)| < 1\} \text{ для } x \in B \text{ и } f \in X'$$

и аналогично

$$B' := \{f \in X' : \|f\| \leq 1\};$$

$$S' := \{f \in X' : \|f\| = 1\};$$

B'_w — шар B' как топологическое подпространство X'_w ;

$$B'(f, \varepsilon) := \{g \in B' : \|f - g\| < \varepsilon\} \text{ для } f \in B' \text{ и } \varepsilon > 0;$$

$$B' \langle f, x \rangle := (f + X' \langle x \rangle) \cap B' = \{g \in B' : |f(x) - g(x)| < 1\} \text{ для } f \in B' \text{ и } x \in X.$$

С использованием введенных обозначений базовые окрестности произвольных точек $x \in B$ и $f \in B'$ в топологических пространствах B_w и B'_w соответственно приобретают вид $B \langle x, f_1 \rangle \cap \cdots \cap B \langle x, f_m \rangle$ и $B' \langle f, x_1 \rangle \cap \cdots \cap B' \langle f, x_m \rangle$, где $m \in \mathbb{N}$, $f_i \in X'$, $x_i \in X$.

Лемма 13. Пусть X — банахово пространство.

- (i) Если X не сепарабельно и $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — покрытие последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в X'_w , то для любого $\lambda \geq 0$ существует такой функционал $g \in X'$, что $\|g\| = \lambda$ и $f_n + g \in U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Если X'_w не сепарабельно и $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — покрытие последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в X_w , то для любого $\lambda \geq 0$ существует такой элемент $y \in X$, что $\|y\| = \lambda$ и $x_n + y \in U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ разность $U_n - f_n$ является окрестностью нуля в X'_w . Согласно лемме 11(i) пересечение

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n - f_n)$$

содержит ненулевое векторное подпространство, в котором, очевидно, имеется искомый элемент g .

Утверждение (ii) доказывается аналогично (i) с привлечением леммы 11(ii) вместо 11(i). \square

Лемма 14. Пусть X — банахово пространство.

- (i) Следующие утверждения равносильны:
 - (a) X сепарабельно;
 - (b) B'_w имеет счетный псевдохарактер;
 - (c) B'_w имеет счетный псевдохарактер в некоторой точке $B' \setminus S'$.
- (ii) Следующие утверждения равносильны:
 - (a) X'_w сепарабельно;
 - (b) B_w имеет счетный псевдохарактер;
 - (c) B_w имеет счетный псевдохарактер в некоторой точке $B \setminus S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Импликации (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) тривиальны с учетом леммы 11(i).

(c) \Rightarrow (a). Допустим, X не сепарабельно. Рассмотрим произвольную точку $f \in B' \setminus S'$ и последовательность ее окрестностей U_n в B'_w и покажем, что

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \{f\}.$$

Каждое из множеств U_n имеет вид $V_n \cap B'$, где V_n — окрестность f в X'_w . Согласно лемме 13(i) существует такой функционал $g \in X'$, что $\|g\| = 1 - \|f\|$ и $f + g \in V_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f + g \in B'$ и таким образом

$$f \neq f + g \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \cap B' = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Утверждение (ii) доказывается аналогично (i) с привлечением лемм 11(ii) и 13(ii) вместо 11(i) и 13(i). \square

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Условия (a)–(c) леммы 14(ii) выполняются, если, например, банахово пространство X сепарабельно или является сопряженным к сепарабельному банахову пространству (см. [3, 3.1.5]).

Приведенное ниже утверждение вытекает из следствия 7 и лемм 11 и 14.

Следствие 16. Пусть X — банахово пространство.

- (i) Если X сепарабельно, то в пространствах X'_w и B'_w инъективная и латеральная сходимости последовательностей равносильны.
- (ii) Если X'_w сепарабельно, то в пространствах X_w и B_w инъективная и латеральная сходимости последовательностей равносильны.

Теорема 17. Пусть X — банахово пространство.

- (i) Если X не сепарабельно и $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — латерально сходящаяся последовательность в B'_w , то $\|f_n\| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Если X'_w не сепарабельно и $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — латерально сходящаяся последовательность в B_w , то $\|x_n\| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. (i) Пусть X не сепарабельно, пусть $f_n \rightarrow f$ в B'_w , и пусть $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — латерально сходящаяся к f покрытие последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в B'_w . Предположим вопреки доказываемому, что существуют бесконечное множество $I \subseteq \mathbb{N}$ и число $0 < \lambda < 1$ такие, что $\|f_i\| \leq \lambda$ для всех $i \in I$.

Каждое из множеств U_i имеет вид $V_i \cap B'$, где V_i — окрестность f_i в X'_w . Согласно лемме 13(i) имеется такой функционал $g \in X'$, что $\|g\| = 1 - \lambda$ и $f_i + g \in V_i$ для всех $i \in I$. Из соотношений

$$\|f_i + g\| \leq \|f_i\| + \|g\| \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1$$

следует, что $f_i + g \in V_i \cap B' = U_i$ для всех $i \in I$. В частности, для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$f_i + g \in U_i \subseteq \bigcup_{n \in I, n \geq m} U_n \subseteq \bigcup_{n \geq m} U_n \quad \text{для всех } i \in I, i \geq m.$$

Кроме того, из сходимости $f_i + g \xrightarrow{i \in I} f + g$ в X'_w и замкнутости B' в X'_w следует включение $f + g \in B'$. Таким образом, в топологическом пространстве B'_w имеет место соотношение

$$f \neq f + g \in \text{cl} \bigcup_{n \geq m} U_n \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N},$$

что противоречит условию (с) леммы 2.

Утверждение (ii) доказывается аналогично (i) с привлечением леммы 13(ii) вместо 13(i). \square

Теорема 18. Пусть X — ненулевое банахово пространство.

- (i) Следующие утверждения равносильны:
 - (a) X сепарабельно;
 - (b) в X'_w инъективная и латеральная сходимость равносильны;
 - (c) в X'_w существует латерально сходящаяся последовательность.
- (ii) Следующие утверждения равносильны:
 - (a) X'_w сепарабельно;
 - (b) в X_w инъективная и латеральная сходимость равносильны;
 - (c) в X_w существует латерально сходящаяся последовательность.

Доказательство. (i) Импликация (a) \Rightarrow (b) содержится в следствии 16.

Импликация (b) \Rightarrow (c) тривиальна: например, для любого ненулевого функционала $f \in X'$ имеет место инъективная сходимость $\frac{1}{n}f \rightarrow 0$ в X'_w , которая благодаря условию (b) является латеральной.

(c) \Rightarrow (a). Рассмотрим латерально сходящуюся последовательность $g_n \rightarrow g$ в X'_w и предположим вопреки доказываемому, что X не сепарабельно. Из слабой* сходимости $g_n \rightarrow g$ следует наличие такого числа $\lambda > 0$, что $\|g\| \leq \lambda$ и $\|g_n\| \leq \lambda$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $f_n := \frac{1}{2\lambda}g_n$ и $f := \frac{1}{2\lambda}g$. Очевидно, последовательность $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ латерально сходится к f в X'_w , причем члены этой последовательности и ее предел лежат в B'_w . Следовательно, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ латерально сходится в B'_w (см. [1, 1.10(b)]). Согласно теореме 17(i) отсюда вытекает сходимость $\|f_n\| \rightarrow 1$, противоречащая соотношениям $\|f_n\| = \frac{1}{2\lambda}\|g_n\| \leq \frac{1}{2\lambda}\lambda = \frac{1}{2}$.

Утверждение (ii) доказывается аналогично (i) с привлечением теоремы 17(ii) вместо 17(i). \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Напомним несколько классических определений и фактов о выпуклых и гладких пространствах (см., например, [4, гл. II; 5, ч. 3]).

Банахово пространство X называется

(а) *строго выпуклым*, если для любых $x, y \in X$

$$\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1 \Rightarrow x = y;$$

(б) *равномерно выпуклым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in X$

$$\|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta;$$

(с) *гладким*, если для любого ненулевого элемента $x \in X$ существует единственный функционал $f \in X'$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$;

(д) *равномерно гладким*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in X$

$$\|x\| = 1, \|y\| \leq \delta \Rightarrow \|x + y\| + \|x - y\| \leq 2 + \varepsilon\|y\|.$$

Классическими примерами пространств, обладающих свойствами (а)–(д), служат гильбертовы пространства, а также пространства вида L^p , где $1 < p < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 20 (см. [4, гл. II; 5, ч. 3]).

(а) Всякое равномерно выпуклое пространство является строго выпуклым, а всякое равномерно гладкое пространство является гладким.

(б) Гладкость X' влечет строгую выпуклость X , а строгая выпуклость X' влечет гладкость X .

(с) Равномерная выпуклость X равносильна равномерной гладкости X' , а равномерная гладкость X равносильна равномерной выпуклости X' .

(д) Все равномерно выпуклые и все равномерно гладкие банаховы пространства рефлексивны.

Лемма 21. Пусть X — банахово пространство.

(i) Если X' строго выпукло, то B'_w имеет счетный псевдохарактер в каждой точке S' .

(ii) Если X строго выпукло, то B_w имеет счетный псевдохарактер в каждой точке S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть X' строго выпукло, и пусть $f \in S'$. Поскольку $\|f\| = 1$, имеется последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов B , для которой $f(x_n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B'(f, nx_n) = \{f\}$. Для этого рассмотрим произвольный элемент $g \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B'(f, nx_n)$ и установим равенство $f = g$.

Действительно, для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $|g(x_n) - f(x_n)| < \frac{1}{n}$, откуда

$$1 \geq \|g\| \geq g(x_n) = f(x_n) + g(x_n) - f(x_n) > f(x_n) - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

$$1 \geq \left\| \frac{f+g}{2} \right\| \geq \frac{f+g}{2}(x_n) = f(x_n) + \frac{g(x_n) - f(x_n)}{2} > f(x_n) - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

а значит, $f = g$ в силу строгой выпуклости X' .

(ii) Доказательство можно провести по той же схеме, что и для (i). При этом возникающие аргументы более элементарны: если X строго выпукло, то счетность псевдохарактера B_w в точке $x \in S$ обеспечивается равенством $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(x, nf) = \{x\}$, где f — такой функционал, что $f(x) = \|f\| = 1$. \square

Следствие 22. Пусть X — банахово пространство.

- (i) Если X' строго выпукло, то в B'_w инъективная и латеральная сходимость последовательности к элементу S' равносильны.
- (ii) Если X строго выпукло, то в B_w инъективная и латеральная сходимость последовательности к элементу S равносильны.

Теорема 23. Пусть X — банахово пространство.

- (i) Пусть X — равномерно гладкое пространство, пусть последовательность $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ инъективно сходится к f в B'_w , и пусть $\|f_n\| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ латерально сходится к f в B'_w .
- (ii) Пусть X — равномерно выпуклое пространство, пусть последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ инъективно сходится к x в B_w , и пусть $\|x_n\| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ латерально сходится к x в B_w .

Доказательство. (i) Пусть выполнены условия утверждения (i). Можно считать, что $\dim X' > 1$ и $f_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку пространство X' равномерно выпукло (см. замечание 20(c)), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $g, h \in X'$

$$\|g\| = \|h\| = 1, \quad \left\| \frac{g+h}{2} \right\| > 1 - \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|g-h\| < \varepsilon. \quad (1)$$

Покажем, что для всех $x \in X$ и $g, h \in X'$

$$\|x\| = \|g\| = g(x) = 1, \quad \|h\| \leq 1, \quad |h(x) - 1| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|g-h\| < \varepsilon. \quad (2)$$

Действительно, пусть $\|x\| = \|g\| = g(x) = 1$ и $|h(x) - 1| < \delta(\varepsilon)$. В случае $\|h\| = 1$ имеем

$$\left\| \frac{g+h}{2} \right\| \geq \frac{g+h}{2}(x) = 1 + \frac{1}{2}(h(x) - 1) > 1 - \frac{\delta(\varepsilon)}{2} > 1 - \delta(\varepsilon),$$

откуда следует $\|g-h\| < \varepsilon$ в силу (1). Пусть теперь $\|h\| < 1$. Рассмотрим ненулевой функционал $z \in X'$, принимающий значение $z(x) = 0$, и положим $h_\lambda := h + \lambda z$ для $\lambda \in \mathbb{R}$. Очевидно, имеются такие числа $\lambda < 0 < \mu$, что $\|h_\lambda\| = \|h_\mu\| = 1$. Поскольку $h_\lambda(x) = h_\mu(x) = h(x)$ и соотношение (2) доказано для функционалов h единичной нормы, имеем

$$\|g-h_\lambda\| < \varepsilon, \quad \|g-h_\mu\| < \varepsilon,$$

а значит, $\|g-h\| < \varepsilon$, так как h принадлежит отрезку $[h_\lambda, h_\mu]$.

Поскольку пространство X рефлексивно (см. замечание 20(d)), по теореме Джеймса имеется последовательность таких элементов $x_n \in S$, что $f_n(x_n) = \|f_n\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Благодаря сходимости $\|f_n\| \rightarrow 1$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что при $n \geq N(\varepsilon)$

$$\frac{1}{n} + \left| \|f_n\| - 1 \right| < \delta(\varepsilon), \quad (3)$$

$$\left| \|f_n\| - 1 \right| < \varepsilon. \quad (4)$$

Покажем, что для любых $\varepsilon > 0$, $n \geq N(\varepsilon)$ и $h \in X'$

$$\|h\| \leq 1, \quad |h(x_n) - f_n(x_n)| < \frac{1}{n} \Rightarrow \|f_n - h\| < 2\varepsilon. \quad (5)$$

Действительно, если $n \geq N(\varepsilon)$, $\|h\| \leq 1$ и $|h(x_n) - f_n(x_n)| < \frac{1}{n}$, то согласно неравенству (3) имеем

$$|h(x_n) - 1| \leq |h(x_n) - f_n(x_n)| + |f_n(x_n) - 1| < \frac{1}{n} + \left| \|f_n\| - 1 \right| < \delta(\varepsilon). \quad (6)$$

Положим $g_n := f_n / \|f_n\|$. Тогда $\|x_n\| = \|g_n\| = g_n(x_n) = 1$, откуда с учетом (2) и (6) вытекает неравенство $\|g_n - h\| < \varepsilon$. Привлекая (4), заключаем, что

$$\begin{aligned} \|f_n - h\| &\leq \|f_n - g_n\| + \|g_n - h\| < \left\| f_n - \frac{f_n}{\|f_n\|} \right\| + \varepsilon \\ &= \left\| (\|f_n\| - 1) \frac{f_n}{\|f_n\|} \right\| + \varepsilon = \left| \|f_n\| - 1 \right| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Согласно лемме 3 для обоснования латеральной сходимости $f_n \rightarrow f$ в B'_w достаточно показать, что для любой окрестности V точки f в B'_w имеет место включение $B'\langle f_n, nx_n \rangle \subseteq V$ при больших n . С учетом структуры базовых окрестностей в B'_w (см. определение 12) для этого, в свою очередь, достаточно фиксировать произвольный ненулевой элемент $x \in X$ и для больших n установить включение

$$B'\langle f_n, nx_n \rangle \subseteq B'\langle f, x \rangle. \quad (7)$$

Благодаря слабой сходимости $f_n \rightarrow f$ имеется такой номер $M \in \mathbb{N}$, что

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}$$

при $n \geq M$. Покажем, что (7) выполняется для

$$n \geq \max \left\{ N \left(\frac{1}{4\|x\|} \right), M \right\}.$$

Действительно, если $h \in B'\langle f_n, nx_n \rangle$, т. е. $\|h\| \leq 1$ и $|h(x_n) - f_n(x_n)| < \frac{1}{n}$, то согласно (5) имеем $\|f_n - h\| < \frac{1}{2\|x\|}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - h(x)| \\ &< \frac{1}{2} + \|f_n - h\| \|x\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\|x\|} \|x\| = 1, \end{aligned}$$

т. е. $h \in B'\langle f, x \rangle$.

(ii) Равномерно выпуклое пространство X рефлексивно, а сопряженное к нему пространство X' является равномерно гладким (см. замечание 20(c),(d)). Эти наблюдения позволяют отождествить B_w с единичным шаром во втором сопряженном пространстве X'' , наделенном слабой* топологией, и воспользоваться утверждением (i). \square

Следствие 24. (i) Пусть X — несепарабельное равномерно гладкое банахово пространство. В пространстве B'_w последовательность $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ латерально сходится к f тогда и только тогда, когда $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ инъективно сходится к f и $\|f_n\| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

(ii) Пусть X — несепарабельное равномерно выпуклое банахово пространство. В пространстве B_w последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ латерально сходится к x тогда и только тогда, когда $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ инъективно сходится к x и $\|x_n\| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 25. (i) Существует ненулевое банахово пространство X такое, что B'_w не содержит ни одной латерально сходящейся последовательности.

(ii) Существует ненулевое банахово пространство X такое, что B_w не содержит ни одной латерально сходящейся последовательности.

Доказательство. (i) Рассмотрим несчетное множество I и классические банаховы пространства $X := \ell^1(I)$ и $\ell^\infty(I)$, состоящие соответственно из суммируемых функций $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ и ограниченных функций $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ с нормами

$$\|x\|_1 = \sum_{i \in I} |x(i)|, \quad \|f\|_\infty = \sup_{i \in I} |f(i)|.$$

Как известно, отображение $f \mapsto \widehat{f}$, сопоставляющее каждой функции $f \in \ell^\infty(I)$ функционал

$$\widehat{f} : x \mapsto \sum_{i \in I} x(i)f(i),$$

осуществляет линейную изометрию $\ell^\infty(I)$ на X' .

Допустим, имеются такие $f_n \in \ell^\infty(I)$ ($n \in \mathbb{N}$) и $f \in \ell^\infty(I)$, что последовательность $(\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ допускает латерально сходящееся к \widehat{f} покрытие $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в B'_w .

Каждое из множеств U_n содержит некоторую базовую окрестность

$$B'(\widehat{f}_n, x_1^n) \cap \dots \cap B'(\widehat{f}_n, x_{m_n}^n),$$

где $m_n \in \mathbb{N}$, $x_k^n \in X$. Поскольку всякая функция $x \in \ell^1(I)$ имеет счетный носитель $\text{supp } x := \{i \in I : x(i) \neq 0\}$, все x_k^n зануляются вне счетного подмножества

$$I_0 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=1}^{m_n} \text{supp } x_k^n \subseteq I.$$

Как легко видеть, для каждого $n \in \mathbb{N}$ в множество U_n попадает любой функционал \widehat{g} , соответствующий такой функции $g \in \ell^\infty(I)$, что $\|g\|_\infty \leq 1$ и $g = f_n$ на I_0 .

Зафиксируем элемент $j \in I \setminus I_0$ и отличное от $f(j)$ число $\lambda \in [-1, 1]$. Обозначим символом e_j характеристическую функцию синглтона $\{j\} \subseteq I$ и определим функции $g, g_n \in \ell^\infty(I)$, полагая

$$g := f + (\lambda - f(j))e_j, \quad g_n := f_n + (\lambda - f_n(j))e_j.$$

Ясно, что $\|g_n\|_\infty \leq 1$ и $g_n = f_n$ на $I \setminus \{j\} \supseteq I_0$. Следовательно, $\widehat{g}_n \in U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, в B'_w имеет место сходимост

$$\widehat{g}_n = \widehat{f}_n + (\lambda - f_n(j))\widehat{e}_j \rightarrow \widehat{f} + (\lambda - f(j))\widehat{e}_j = \widehat{g}$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\widehat{f} \neq \widehat{g} \in \text{cl} \bigcup_{n \geq m} U_n$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, что противоречит условию (c) леммы 2.

(ii) Соответствующим примером служит снабженное равномерной нормой пространство $X := c_0(I)$, состоящее из вещественных функций, определенных на несчетном множестве I и стремящихся к нулю на бесконечности, т. е. таких функций $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, что множество $\{i \in I : |x(i)| > \varepsilon\}$ конечно для любого $\varepsilon > 0$. Доказательство можно получить, повторив выкладки (i) применительно к $c_0(I)$ вместо $\ell^\infty(I)$ и используя линейную изометричность банаховых пространств $c_0(I)'$ и $\ell^1(I)$. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман А. Е., Коптев А. В. Латеральная сходимость и гомоморфизмы банаховых расслоений // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 2. С. 188–203.
2. Wilansky A. Modern methods in topological vector spaces. New York: McGraw-Hill, 1978.
3. Гутман А. Е., Коптев А. В. Сопряженные банаховы расслоения // Нестандартный анализ и векторные решетки, изд. 2-е. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 125–201.
4. Diestel J. Geometry of Banach spaces – Selected topics. Berlin etc.: Springer, 1975.
5. Beauzamy B. Introduction to Banach spaces and their geometry. Amsterdam etc.: North-Holland, 1982.

Поступила в редакцию 7 октября 2025 г.

После доработки 24 ноября 2025 г.

Принята к публикации 30 ноября 2025 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Коптев Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
koptev@math.nsc.ru