Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 512.554.37

ОПЕРАТОРЫ РОТЫ — БАКСТЕРА ВЕСА 0 НА ПРОСТОЙ НЕЛИЕВОЙ АЛГЕБРЕ МАЛЬЦЕВА.

М. Е. Гончаров

Аннотация. Получено полное описание операторов Роты — Бакстера веса 0 на простой нелиевой алгебре Мальцева над полем комплексных чисел. Описание дано с точностью до действия группы автоморфизмов алгебры и умножения на ненулевой скаляр.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.105

Ключевые слова: оператор Роты — Бакстера, алгебра Мальцева, автоморфизмы алгебры Мальцева.

Операторы Роты — Бакстера получили широкую известность после работы Бакстера [1], где данные операторы возникли как формализм при изучении операторов интегрирования. В течение долгого времени операторы Роты — Бакстера изучались преимущественно на коммутативных ассоциативных алгебрах в рамках задач теории вероятностей и комбинаторики [2]. Мощный импульс к изучению операторы Роты — Бакстера получили в 80-х гг., когда выяснилась глубокая связь между операторами Роты — Бакстера веса 0 и кососимметрическими решениями классического уравнения Янга — Бакстера [3]. Кроме того, к данному моменту обнаружены глубокие связи операторов Роты — Бакстера с теорией чисел, теорией операд и, в частности, пре- и посталгебрами [4].

Одним из важнейших и нетривиальных направлений исследований в данной области является описание операторов Роты — Бакстера на важнейших классах алгебр. К настоящему моменту операторы Роты — Бакстера различных весов на алгебре Ли $sl_2(\mathbb{C})$ изучались в работах [5, 6], на алгебре матриц $M_2(\mathbb{C})$ — в работах [7, 8]. Классификация кососимметрических операторов Роты — Бакстера нулевого веса на алгебре $M_3(\mathbb{C})$ приведена В. В. Соколовым [9]. В работе [10] были классифицированы нерасщепляемые операторы Роты — Бакстера ненулевого веса на алгебре матриц $M_3(F)$, где F — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Операторы матриц нулевого веса на $M_3(F)$ изучались в работе [11]. Лиевы операторы Роты — Бакстера на алгебре Свидлера H_4 (более известной как 4-мерная некокоммутативная алгебра Хопфа) были описаны в работе [12]. В неассоциативном случае также стоит отметить работу [13], в которой получено описание операторов Роты — Бакстера (как нулевого, так и ненулевого весов) на простой 4-мерной йордановой алгебре D_t.

Алгебры Мальцева были введены А. И. Мальцевым [14] как касательные алгебры локальных аналитических луп Муфанг. Они являются обобщением алгебр Ли, и их теория достаточно хорошо развита [15]. Важным примером

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10005, https://rscf.ru/project/23-71-10005/.

нелиевой алгебры Мальцева является векторное пространство $\mathbb{M}$ элементов с нулевым следом расщепляемой алгебры Кэли — Диксона относительно операции коммутирования в качестве умножения [16]. Более того, над полем $\mathbb{C}$ алгебра $\mathbb{M}$ является единственной простой конечномерной алгеброй Мальцева, не являющейся алгеброй Ли.

В данной работе дается полное описание операторов Роты — Бакстера веса 0 на простой нелиевой комплексной алгебре Мальцева $\mathbb{M}$ (теорема 6). Описание дается с точностью до действия группы автоморфизмов алгебры $\mathbb{M}$ и умножения на скаляр.

1. Предварительные результаты

Определение. Пусть A — произвольная алгебра над полем F, $R : A \to A$ — линейное отображение, $\lambda \in F$ — скаляр. Отображение R называется *оператором Роты — Бакстера веса* λ, если для любых $x, y \in A$ выполнено:

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy).$$

Заметим, что в случае $\lambda \neq 0$ можно рассматривать операторы веса 1, так как для любого $\alpha \neq 0$ оператор αR является оператором Роты — Бакстера веса $\alpha\lambda$. Таким образом, умножая на скаляр, можем получать любой ненулевой вес. Данное замечание сводит изучение операторов Роты — Бакстера к двум различным случаям, а именно нулевого и ненулевого весов.

Предложение 1 [4]. *Пусть R — оператор Роты — Бакстера веса* 0 *на алгебре A. Тогда подпространство* $\mathrm{Im}(R)$ *является подалгеброй в A. Кроме того,* $[\mathrm{Im}(R), \mathrm{Ker}(R)] \subset \mathrm{Ker}(R)$.

Определение. Алгебра A называется *альтернативной*, если для любых $x, y \in A$ в ней выполняются следующие тождества:

$$x^2y - x(xy) = 0, \quad (yx)x - yx^2 = 0.$$

Легко видеть, что любая ассоциативная алгебра является альтернативной. Среди альтернативных неассоциативных алгебр важную роль играет матричная алгебра Кэли — Диксона $\mathscr{C}$.

Пусть $M_2(\mathbb{C})$ — алгебра 2×2-матриц над полем $\mathbb{C}$. Как векторное пространство $\mathscr{C} = M_2(\mathbb{C})_2 \oplus vM_2(\mathbb{C})$. Умножение в $M_2(\mathbb{C})$ продолжается до умножения в алгебре $\mathscr{C}$ с помощью следующих соотношений:

$$a(vb) = v\overline{a}b, \quad (vb)a = v(ab), \quad (va)(vb) = b\overline{a},$$

где $a, b \in M_2(\mathbb{C})$, а $\overline{}$ — стандартная инволюция алгебры $M_2(\mathbb{C})$, т. е. $\overline{a} = \mathrm{tr}(a) - a$, где $\mathrm{tr}(a)$ — след матрицы a. При этом инволюция алгебры $M_2(\mathbb{C})$ индуцирует инволюцию на $\mathscr{C}$ следующим образом: $\overline{a + vb} = \overline{a} - vb$.

Известно, что над полем $\mathbb{C}$ алгебра $\mathscr{C}$ — единственная конечномерная простая альтернативная неассоциативная алгебра.

Определение. Антикоммутативная алгебра M называется *алгеброй Мальцева*, если для любых $x, y, t \in M$ выполнено

$$J(x, y, xt) = J(x, y, t)x, \tag{1}$$

где $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ — якобиан элементов x, y, z.

Если характеристика поля F отлична от 2, то тождество (1) эквивалентно тождеству

$$((xy)z)t + ((yz)t)x + ((zt)x)y + ((tx)y)z = (xz)(yt).$$

Любая алгебра Ли является алгеброй Мальцева. Кроме того, если A — альтернативная алгебра с умножением ab, то алгебра $A^- = (A, [\cdot,\cdot])$ с умножением

$$[a, b] = ab - ba$$

является алгеброй Мальцева [14].

В работе [16] показано, что над полем $\mathbb{C}$ существует единственная простая конечномерная нелиева алгебра Мальцева $\mathbb{M}$. Размерность алгебры $\mathbb{M}$ равна 7, и в $\mathbb{M}$ можно выбрать стандартный базис h, x, x', y, y', z, z' с таблицей умножения

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = 2y, \quad [h, z] = 2z,$$

$$[h, x'] = -2x', \quad [h, y'] = -2y', \quad [h, z'] = -2z',$$

$$[x, x'] = [y, y'] = [z, z'] = h,$$

$$[x, y] = 2z', \quad [y, z] = 2x', \quad [z, x] = 2y',$$

$$[x', y'] = -2z, \quad [y', \quad z'] = -2x, \quad [z', x'] = -2y.$$

Пусть M — произвольная алгебра Мальцева над полем $\mathbb{C}$. Для любого элемента $x \in M$ через ad_x обозначим оператор правого умножения на элемент x, т. е. для любого $y \in M$

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y].$$

Для любых $x, y \in M$ определим отображение $D_{x,y} = \mathrm{ad}_{[x,y]} + [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] : M \to M$. Тогда $D_{x,y}$ является дифференцированием алгебры M [17] (такие дифференцирования называются *внутренними*). Таким образом, если $D_{x,y}$ является нильпотентным оператором, то $\exp(D_{x,y})$ является автоморфизмом алгебры M.

Нам понадобятся также следующие утверждения об автоморфизмах алгебры $\mathbb{M}$. Обозначим $A = \mathrm{Span}(h, x, x')$, $U = \mathrm{Span}(y, z')$, $W = \mathrm{Span}(y', z)$. Несложно видеть, что A — подалгебра в $\mathbb{M}$, изоморфная $sl_2(\mathbb{C})$, причем $[A, U] = U$, $[A, W] = W$.

Предложение 2 [18, с. 498]. *Любой автоморфизм алгебры $sl_2(\mathbb{C})$ является внутренним, т. е. для любого $\varphi \in \mathrm{Aut}(sl_2(\mathbb{C}))$ существует элемент $u \in SL_2(\mathbb{C})$ такой, что $\varphi(x) = uxu^{-1}$ для любого $x \in sl_2(\mathbb{C})$.*

Следствие 1. *Любой автоморфизм φ алгебры A можно продлить до автоморфизма φ_M алгебры $\mathbb{M}$ так, что ограничение φ_M на подалгебру A совпадает с φ, а также $\varphi_M(U) = U$ и $\varphi_M(W) = W$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{C} = M_2(\mathbb{C}) \oplus \upsilon M_2(\mathbb{C})$ — матричная алгебра Кэли — Диксона.

Определим на $\mathscr{C}$ новую операцию умножения $[x, y] = xy - yx$, относительно этой операции векторное пространство $\mathscr{C}$ превращается в алгебру Мальцева $\mathscr{C}^{(-)}$. Подпространство $\mathbb{C}\,\mathrm{E}$, где E — единица алгебры $\mathscr{C}$, является центром $\mathscr{C}^{(-)}$, а фактор-алгебра $\mathscr{C}^{(-)}/\mathbb{C}\,\mathrm{E}$ будет изоморфна алгебре $\mathbb{M}$ [17]. При этом автоморфизм ψ между $\mathscr{C}^{(-)}/\mathbb{C}\,\mathrm{E}$ и $\mathbb{M}$ задается как

$$\psi(\pi(e_{11} - e_{22})) = h, \quad \psi(\pi(e_{12})) = 2x, \quad \psi(\pi(e_{21})) = 2x', \quad \psi(\pi(\upsilon e_{11})) = 2z',$$

$$\psi(\pi(ve_{12})) = 2y', \quad \psi(\pi(ve_{21})) = 2y, \quad \psi(\pi(ve_{22})) = 2z,$$

где $\pi : \mathscr{C}^{(-)} \to \mathscr{C}^{(-)}/\mathbb{C}\,\mathrm{E}$ — естественный гомоморфизм.

Пусть φ — автоморфизм алгебры A, $\psi_A : sl_2(\mathbb{C}) \to A$ — изоморфизм алгебр Ли, индуцированный отображением ψ, т. е. $\psi_A(t) = \psi(\pi(t))$ для $t \in sl_2(\mathbb{C}) \subset \mathscr{C}$. Тогда $\psi_A^{-1}\circ\varphi\circ\psi_A$ — автоморфизм алгебры $sl_2(\mathbb{C})$. По предложению 2 он задается некоторой невырожденной матрицей u. При этом отображение

$$\varphi_u : \; a + va \mapsto uau^{-1} + v(ubu^{-1}), \quad a, b \in M_2(\mathbb{C}),$$

является автоморфизмом алгебры $\mathscr{C}$. А так как $\varphi_u(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$, то автоморфизм φ_u индуцирует автоморфизм фактор-алгебры $\mathscr{C}^{(-)}/\mathbb{C}\,\mathrm{E}$. Определим автоморфизм φ'_M:

$$\varphi'_M = \psi \circ \varphi_u \circ \psi^{-1}.$$

Рассмотрим $\varphi'_M(U)$. Так как $[A, U] = U$ и $\varphi'_M(A) = A$, то $[A, \varphi'_M(U)] = \varphi'_M(U)$. Рассмотрим элемент $0 \neq t \in \varphi'_M(U)$. Тогда

$$t = \alpha h + t_1 + t_2,$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $t_1 \in \mathrm{Span}(x, y, z)$ и $t_2 \in \mathrm{Span}(x', y', z')$. Заметим, что $[h, [h, t]] = 4t_1 + 4t_2 \in \varphi'_M(U)$. Следовательно, $\alpha = 0$. Отсюда следует, что $t_1 \in \mathrm{Span}(y, z)$ и $t_2 \in \mathrm{Span}(y', z')$. Если $t_1 \neq 0$, то $[x, t_1] \neq 0$ (аналогично если $t_2 \neq 0$, то $[x', t_2] \neq 0$). Следовательно, базисом $\varphi'_M(U)$ будут элементы $t_1 = \alpha_1 y + \beta_1 z$ и $t_2 = \frac{1}{2}[x, t_1] = -\beta_1 y' + \alpha_1 z'$.

Аналогично базисом $\varphi'_M(W)$ будут элементы $q_1 = \alpha_2 y + \beta_2 z$ и $q_2 = -\frac{1}{2}[x, q_2] = \beta_2 y' - \alpha_2 z'$. Элементы $h, x, x', t_1, t_2, q_1, q_2$ образуют базис $\mathbb{M}$.

Так как элементы t_1 и q_1 линейно независимы, то можно считать, что $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 1$. Несложно видеть, что отображение θ, заданное как

$$\theta(h) = h,\ \theta(x) = x,\ \theta(x') = x',\ \theta(t_1) = y,\ \theta(t_2) = z',\ \theta(q_1) = z,\ \theta(q_2) = y',$$

является автоморфизмом алгебры $\mathbb{M}$. Таким образом, отображение $\varphi_M = \theta\circ\varphi'_M$ искомое. Следствие доказано.

Пусть R — оператор Роты — Бакстера веса 0 на $\mathbb{M}$. Тогда $\mathrm{Im}(R)$ является подалгеброй в $\mathbb{M}$.

Лемма 1. *Подалгебра* $\mathrm{Im}(R)$ *не может совпадать с* $\mathbb{M}$.

Доказательство. Действительно, если R — невырожденный оператор, то R^{-1} является обратимым дифференцированием алгебры $\mathbb{M}$. Тогда из [19] следует, что $\mathbb{M}$ является нильпотентной алгеброй; противоречие. Лемма доказана.

В работе [20] было доказано, что максимальная подалгебра в $\mathbb{M}$ имеет размерность 5 и изоморфна подалгебре $M(5)$ с базисом h, x, x', y, z'. Таким образом, необходимо рассмотреть 5 случаев: размерность $\mathrm{Im}(R)$ равна 1, 2, 3, 4 или 5.

2. Случай $\dim(\mathrm{Im}(R)) = 5$

В этом случае $\mathrm{Im}(R)$ изоморфна подалгебре с базисом h, x, x', y, z'.

Рассмотрим ядро $\mathrm{Ker}(R)$. Ясно что $\dim(\mathrm{Ker}(R)) = 2$. Пусть $u_i = \alpha_i h + a_i + b_i$ $(i = 1, 2)$, где $a_i \in \mathrm{Span}(x, y, z)$ и $b_i \in \mathrm{Span}(x', y', z')$. Из включения $[h, \mathrm{Ker}(R)] \subset \mathrm{Ker}(R)$ следует $2a_i - 2b_i \in \mathrm{Ker}(R)$. Таким образом, $4a_i + 4b_i \in \mathrm{Ker}(R)$, $a_i \in \mathrm{Ker}(R)$, а значит, $b_i \in \mathrm{Ker}(R)$ и $\alpha_i h \in \mathrm{Ker}(R)$.

Если $h \in \mathrm{Ker}(R)$, то по предложению 1 имеем $x, x', y, z' \in \mathrm{Ker}(R)$ и $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Im}(R)$; противоречие. Следовательно, $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2$.

Пусть $a_i = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z$. Из включения $[a_i, z'] \in \mathrm{Ker}(R)$ получаем $\gamma_i h \in \mathrm{Ker}(R)$. Следовательно, $\gamma_i = 0$, $i = 1, 2$. Аналогично доказывается, что $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2$, и как следствие $a_i = \beta_i y$.

Используя аналогичные рассуждения, получаем, что $b_i = \gamma_i z'$. А поскольку размерность $\mathrm{Ker}(R)$ равна 2, то $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(y, z') \subset \mathrm{Im}(R)$.

Обозначим $A = \mathrm{Span}(h, x, x')$. Для любого $a \in A$ можно представить $R(a) = x_a + y_a$, где $x_a \in A$, $y_a \in \mathrm{Ker}(R)$. Определим оператор $R_1 : A \to A$, полагая

$$R_1(a) = x_a.$$

Так как $\mathrm{Ker}(R)$ является идеалом в $\mathrm{Im}(R)$, то R_1 является оператором Роты — Бакстера на A. В работе [5] было получено описание операторов Роты — Бакстера веса 0 на $sl_2(\mathbb{C})$: с точностью до действия группы автоморфизмов и умножения на ненулевой скаляр такие операторы совпадают с одним из следующих операторов:

1) $Q = 0$;
2) $Q(x) = 0$, $Q(x') = tx - h$, $Q(h) = 2x$, $t \in \mathbb{C}$;
3) $Q(x) = 0$, $Q(x') = 0$, $Q(h) = h$;
4) $Q(x) = 0$, $Q(x') = h$, $Q(h) = 0$;
5) $Q(x) = 0$, $Q(x') = x$, $Q(h) = 0$.

По следствию 1 можно считать, что R_1 совпадает с одним из операторов 2–5 (вариант $R_1 = 0$ не подходит, так как $\dim(\mathrm{Ker}(R)) = 2$ и $A \cap \mathrm{Ker}(R) = 0$).

Случай 2.1. Предположим, что $R_1(x) = 0$, $R_1(x') = tx - h$ и $R_1(h) = 2x$. Тогда $R(x) = \alpha y + \beta z'$, $R(h) = 2x + y_h$ и $R(x') = tx - h + y_{x'}$, где $y_h, y_{x'} \in \mathrm{Ker}(R)$. Находим

$$[R(x), R(h)] = [\alpha y + \beta z', 2x + y_h] = -2\alpha z',$$
$$R([R(x), h] + [x, R(h)]) \in R(\mathrm{Ker}(R)) = 0.$$

Следовательно, $\alpha = 0$ и $R(x) = \beta z'$. Из равенств

$$[R(x), R(x')] = [\beta z', tx - h + y_h] = -2\beta z',$$
$$R([R(x), x'] + [x, R(x')]) \in R(2x + \mathrm{Ker}(R)) = 2\beta z'$$

следует, что $\beta = 0$. Противоречие, так как $x \notin \mathrm{Ker}(R)$.

Случай 2.2. Предположим, что $R_1(x) = R_1(x') = 0$, $R_1(h) = h$. Тогда $R(x) = \alpha y + \beta z'$, $R(h) = h + \gamma y + \delta z'$. С одной стороны,

$$[R(h), R(x)] = 2\alpha y - 2\beta z'.$$

С другой стороны,

$$R([R(h), x] + [h, R(x)]) \in R(2x + \mathrm{Ker}(R)) = 2\alpha y + 2\beta z'.$$

Следовательно, $\beta = 0$ и $R(x) = \alpha y \neq 0$. Аналогично доказывается, что $R(x') = \beta z' \neq 0$.

Рассмотрим $R(y') = \alpha_1 h + \beta_1 x + \gamma_1 x' + \delta_1 y + \delta_1 z'$. Тогда

$$[R(y'), R(x)] = [\alpha_1 h + \beta_1 x + \gamma_1 x' + \delta_1 y + \theta_1 z', \alpha y] = 2\alpha_1 \alpha y + 2\beta_1 \alpha z'.$$

С другой стороны,

$$R([R(y'), x] + [y', R(x)]) = R(2\alpha_1 x - \gamma_1 h - 2\delta_1 z' - \alpha h) = 2\alpha_1 \alpha y - (\gamma_1 + \alpha)(h + \gamma y + \delta z').$$

Сравнивая коэффициенты при h, получаем, что $\gamma_1 + \alpha = 0$. Следовательно, $\beta_1 = 0$.

В равенстве $[R(y'), R(h)] = R([R(y'), h] + [y', R(h)])$ сравним коэффициенты при z'. Имеем

$$[R(y'), R(h)] = [\alpha_1 h + \gamma_1 x' + \delta_1 y + \theta_1 z', h + \gamma y + \delta z'] \in (-2\alpha_1\delta + 2\theta_1)z' + \operatorname{Span}(x', y); \tag{2}$$

$$\begin{aligned} R([R(y'), h] + [y', R(h)]) &\in R(2\gamma_1 x' + \operatorname{Ker}(R) + 2y' - \gamma h - 2\delta x) \\ &= 2\gamma_1\beta z' + 2\alpha_1 h + 2\gamma_1 x' + 2\delta_1 y + 2\theta_1 z' - \gamma(h + \gamma y + \delta z') - 2\delta\alpha y. \end{aligned} \tag{3}$$

Сравнивая коэффициенты при векторе h в (2) и (3), получаем, что $2\alpha_1 = \gamma$. Следовательно, в (3) коэффициент при z' равен $2\gamma_1\beta + 2\theta_1 - 2\alpha_1\delta$. Сравнивая с (2), находим, что $\gamma_1\beta = 0$ и как следствие $\gamma_1 = 0$. Но это означает, что $R(y')$ лежит в линейной оболочке векторов $R(h)$, $R(x)$ и $R(x')$, что противоречит тому, что $\operatorname{Ker}(R) = \operatorname{Span}(y, z')$. Следовательно, данный случай невозможен.

Случай 2.3. Предположим, что $R_1(x) = R_1(h) = 0$, $R_1(x') = h$. Тогда $R(h) = \alpha y + \beta z' \neq 0$ и $R(x') = h + a$ для некоторого $a \in \operatorname{Ker}(R)$. Но при этом

$$[R(h), R(x')] = [\alpha y + \beta z', h + a] = -2\alpha y + 2\beta z' \neq 0.$$

С другой стороны,

$$R([R(h), x] + [h, R(x)]) \in R(\operatorname{Ker}(R)) = 0;$$

противоречие. Следовательно, данный случай тоже невозможен.

Случай 2.4. Предположим, что $R_1(x) = R_1(h) = 0$, $R_1(x') = x$. Тогда $R(h) = \alpha_1 y + \beta_1 z' \neq 0$, $R(x) = \alpha_2 y + \beta_2 z' \neq 0$ и $R(x') = x + a$ для некоторого $a \in \operatorname{Ker}(R)$.

Рассмотрим

$$[R(x), R(x')] = [\alpha_2 y + \beta_2 z', x + a] = -2\alpha_2 z'.$$

С другой стороны,

$$R([R(x), x'] + [x, R(x')]) \in R(\operatorname{Ker}(R)) = 0.$$

Следовательно, $\alpha_2 = 0$ и $R(x) = \beta_2 z' \neq 0$. Рассмотрим теперь

$$[R(h), R(x')] = [\alpha_1 y + \beta_1 z', x + a] = -2\alpha_1 z'.$$

С другой стороны,

$$R([R(h), x'] + [h, R(x')]) \in R(\operatorname{Ker}(R) + 2x) = 2\beta_2 z'.$$

Отсюда следует, что $\alpha_1 = -\beta_2$.

Предположим, что $R(y') = \alpha h + \beta x + \gamma x' + \delta y + \theta z'$. Тогда

$$[R(y'), R(x)] = [\alpha h + \beta x + \gamma x' + \delta y + \theta z', \beta_2 z'] = -2\alpha\beta_2 z' + 2\gamma\beta_2 y.$$

С другой стороны, учитывая что $\alpha_1 = -\beta_2$, имеем

$$\begin{aligned} R([R(y'), x] + [y', R(x)]) &= R([\alpha h + \beta x + \gamma x' + \delta y + \theta z', x] - 2\beta_2 x) \\ &\in R(2\alpha x - \gamma h - 2\beta_2 x + \operatorname{Ker}(R)) = 2(\alpha - \beta_2)\beta_2 z' - \gamma(-\beta_2 y + \beta_1 z'). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при y, находим, что $\gamma = 0$. Сравнивая коэффициенты при z', находим, что $\alpha = \frac{1}{2}\beta_2$. Рассмотрим

$$[R(y'), R(x')] = \left[\frac{1}{2}h + \beta x + \delta y + \theta z', x + a\right] = x + b,$$

где $b \in \operatorname{Ker}(R)$. С другой стороны,

$$R([R(y'), x'] + [y', R(x')]) = R(-x' + c) = -x + c_1,$$

где $c \in \operatorname{Span}(h, x, y, z')$ а $c_1 \in \operatorname{Ker}(R)$; противоречие.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{M}$ — простая нелиева алгебра Мальцева над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Не существует операторов Роты — Бакстера веса 0 на $\mathbb{M}$, размерность образов которых равна 5.*

3. Случай $\dim(\mathrm{Im}(R)) = 4$

В этом случае $\mathrm{Im}(R)$ изоморфна подалгебре с базисом h, x, y', z [21]. Пусть $a \in \mathrm{Ker}(R)$, $a = \alpha h + b + c$, где $b \in \mathrm{Span}(x, y, z)$ и $c \in \mathrm{Span}(x', y', z')$. Поскольку $h \in \mathrm{Im}(R)$ и $[\mathrm{Im}(R), \mathrm{Ker}(R)] \subset \mathrm{Ker}(R)$, получаем, что $\alpha h, b, c \in \mathrm{Ker}(R)$. Если $\alpha \neq 0$, то $h \in \mathrm{Ker}(R)$ и $\mathrm{Im}(R) \subset \mathrm{Ker}(R)$. Это противоречит тому, что $\dim(\mathrm{Ker}(R)) = 3$. Следовательно, $\alpha = 0$.

Рассмотрим $b = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \in \mathrm{Ker}(R)$. Так как $[b, y'] = \alpha_2 h \in \mathrm{Ker}(R)$, то по доказанному $\alpha_2 = 0$. Аналогично если $c = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \in \mathrm{Ker}(R)$, то из равенств $[c, x] = \beta_1 h$ и $[c, z] = \beta_3 h$ получаем, что $\beta_1 = \beta_3 = 0$. Поскольку размерность ядра $\mathrm{Ker}(R)$ равна 3, то $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(x, z, y') \subset \mathrm{Im}(R)$. Заметим, что $[h, \mathrm{Im}(R)] \subset \mathrm{Ker}(R)$.

Случай 3.1. Предположим, что $R(h) = \theta h + \alpha x + \beta y' + \gamma z$, где $\theta \neq 0$. С точностью до умножения на скаляр можно считать, что $\theta = 1$. Рассмотрим

$$[R(x'), R(h)] = R([R(x'), h] + [x', R(h)]) = R([x', h + \alpha x + \beta y' + \gamma z]) = R(2x' - \alpha h). \tag{4}$$

Пусть $t = x' - \frac{\alpha}{2} h$. Из (4) следует, что $[R(t), R(h)] = 2R(t)$. Тогда $R(t) \in \mathrm{Span}(x, y', z)$. Предположим, что $R(t) = \alpha_1 x + \beta_1 y' + \gamma_1 z$. Имеем

$$[R(t), R(h)] = [\alpha_1 x + \beta_1 y' + \gamma_1 z, h + \alpha x + \beta y' + \gamma z] = -2\alpha_1 x - 2\gamma_1 z + \mu y'$$

для некоторого $\mu \in \mathbb{C}$. Следовательно, $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ и $R(2x' - \alpha h) \in \mathrm{Span}(y')$. Аналогично доказывается, что $R(2z' - \gamma h) \in \mathrm{Span}(y')$. Но тогда линейная комбинация векторов $2x' - \alpha h$ и $2z' - \gamma h$ лежит в ядре оператора R; противоречие.

Случай 3.2. Предположим, что $R(h) = \gamma x + \alpha y' + \beta z$, где $\gamma \neq 0$. С точностью до умножения на скаляр можно считать, что $R(h) = x + \alpha y' + \beta z$. Рассмотрим дифференцирование $d_1 = \frac{\beta}{6} D_{x',z}$. Для него

$$d_1(x) = -\beta z,\ d_1(z') = \beta x',\ d_1(h) = d_1(x') = d_1(y) = d_1(y') = d_1(z) = 0.$$

Следовательно, $d_1^2 = 0$. Соответствующий автоморфизм $\varphi_1 = \exp(d_1)$ действует:

$$\varphi(h) = h, \quad \varphi(x) = x - \beta z, \quad \varphi(x') = x',$$

$$\varphi(y) = y, \quad \varphi(y') = y', \quad \varphi(z) = z, \quad \varphi(z') = z' + \beta x'.$$

В частности, $\varphi(\mathrm{Im}(R)) \subset \mathrm{Im}(R)$ и $\varphi(\mathrm{Ker}(R)) \subset \mathrm{Ker}(R)$. Рассмотрим оператор Роты — Бакстера $R_1 = \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$. Для него будут выполняться равенства $\mathrm{Im}(R_1) = \mathrm{Im}(R)$ и $\mathrm{Ker}(R_1) = \mathrm{Ker}(R)$. Кроме того,

$$R_1(h) = \varphi(R(\varphi^{-1}(h))) = \varphi(R(h)) = \varphi(x + \alpha y' + \beta z) = x + \alpha y'.$$

Таким образом, можно считать, что $R(h) = x + \alpha y'$. Рассмотрим произвольный $t \in \mathrm{Span}(x', y, z)$. Обозначим $R(t) = \alpha_1^t h + \alpha_2^t x + \alpha_3^t y' + \alpha_4^t z$. Тогда

$$[R(h), R(t)] = \left[x + \alpha y', \alpha_1^t h + \alpha_2^t x + \alpha_3^t y' + \alpha_4^t z\right] = -2\alpha_1^t x - 2\alpha_4^t y' - 2\alpha\alpha_1^t y'. \tag{5}$$

При этом для $t = x'$ правая часть тождества Роты — Бакстера имеет вид

$$R([R(h), x'] + [h, R(x')]) = R(h) = x + \alpha y'.$$

Сравнивая данное равенство с (5), находим, что $\alpha_1^{x'} = -\frac{1}{2}$ и $\alpha_4^{x'} = 0$, т. е. $R(x') = -\frac{1}{2}h + \alpha_2^{x'}x + \alpha_3^{x'}y'$ для некоторых $\alpha_2^{x'}, \alpha_3^{x'} \in \mathbb{C}$. Аналогично при $t = z'$ находим

$$R([R(h), z'] + [h, R(z')]) = R([x + \alpha y', z']) = 0.$$

Следовательно, $\alpha_1^{z'} = \alpha_4^{z'} = 0$ и $R(z') = \alpha_2^{z'}x + \alpha_3^{z'}y'$ для некоторых $\alpha_2^{z'}, \alpha_3^{z'} \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим

$$[R(x'), R(z')] = \left[-\frac{1}{2}h + \alpha_2^{x'}x + \alpha_3^{x'}y', \alpha_2^{z'}x + \alpha_3^{z'}y'\right] = -\alpha_2^{z'}x + \alpha_3^{z'}y'. \quad (6)$$

С другой стороны,

$$R([R(x'), z'] + [x', R(z')]) = R\left(\left[-\frac{1}{2}h + \alpha_2^{x'}x + \alpha_3^{x'}y', z'\right] + [x', \alpha_2^{z'}x + \alpha_3^{z'}y']\right)$$
$$= R\big(z' - \alpha_2^{z'}h\big) = \alpha_2^{z'}x + \alpha_3^{z'}y' - \alpha_2^{z'}x - \alpha_2^{z'}\alpha y. \quad (7)$$

Сравнивая коэффициенты при x в (6) и (7), получаем, что $\alpha_2^{z'} = 0$. Введем новые обозначения: $\alpha_3^{z'} = \beta$. Тогда $R(z') = \beta y'$, причем $\beta \neq 0$.

Пусть теперь $t = y$. Тогда

$$R([R(h), y] + [h, R(y)]) = R([x + \alpha y', y]) = R(2z' - \alpha h) = 2\beta y' - \alpha x - \alpha^2 y'. \quad (8)$$

Сравнивая коэффициенты при x в (4) и (8), получаем, что $\alpha_1^y = \frac{\alpha}{2}$. Сравнивая коэффициенты при y', находим, что $\alpha_4^y = -\beta$. Таким образом, на данном этапе $R(y) = \frac{\alpha}{2}h + \alpha_2^y x + \alpha_3^y y' - \beta z$. Рассмотрим

$$[R(x'), R(y)] = \left[-\frac{1}{2}h + \alpha_2^{x'}x + \alpha_3^{x'}y', \frac{\alpha}{2}h + \alpha_2^y x + \alpha_3^y y' - \beta z\right]$$
$$= -\alpha_2^y x + \alpha_3^y y' + \beta z - \alpha\alpha_2^{x'}x + \alpha\alpha_3^{x'}y' + 2\alpha_2^{x'}\beta y'. \quad (9)$$

С другой стороны,

$$R([R(x'), y] + [x', R(y)])$$
$$= R\left(\left[-\frac{1}{2}h + \alpha_2^{x'}x + \alpha_3^{x'}y', y\right] + \left[x', \frac{\alpha}{2}h + \alpha_2^y x + \alpha_3^y y' - \beta z\right]\right)$$
$$= R\big(-y + 2\alpha_2^{x'}z' - \alpha_3^{x'}h + \alpha x' - \alpha_2^y h\big)$$
$$= -\frac{\alpha}{2}h - \alpha_2^y x - \alpha_3^y y' + \beta z + 2\alpha_2^{x'}\beta y' - (\alpha_3^{x'} + \alpha_2^y)(x + \alpha y')$$
$$+ \alpha\left(-\frac{1}{2}h + \alpha_2^{x'}x + \alpha_3^{x'}y'\right). \quad (10)$$

Сравнивая коэффициенты при h в равенствах (9) и (10), получаем $\alpha = 0$. Тогда равенство (9)=(10) примет вид

$$-\alpha_2^y x + \alpha_3^y y' + \beta z + 2\alpha_2^{x'}\beta y' = -\alpha_2^y x - \alpha_3^y y' + \beta z + 2\alpha_2^{x'}\beta y' - \big(\alpha_3^{x'} + \alpha_2^y\big)x$$

или

$$2\alpha_3^y = -\big(\alpha_3^{x'} + \alpha_2^y\big)x.$$

Отсюда получаем, что $\alpha_3^y = 0$ и $\alpha_3^{x'} = -\alpha_2^y$. В итоге оператор имеет вид

$$R(h) = x, \quad R(x') = -\frac{1}{2}h + C_1 x + C_2 y', \quad R(y) = -C_2 x - \beta z, \quad R(z') = \beta y'$$

для некоторых $C_1, C_2, \beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$.

Зафиксируем скаляр $\theta \in \mathbb{C}$ и рассмотрим внутреннее дифференцирование $d = -\frac{\theta}{6} D_{x,z'}$. Для него выполнено $d(x') = \theta z'$, $d(z) = -\theta x$, $d(x) = d(y) = d(y') = d(z') = d(h) = 0$. Соответствующий автоморфизм $\varphi_d = \exp(d)$ действует как

$$\begin{gathered} \varphi_d(x) = x, \quad \varphi_d(x') = x' + \theta z', \quad \varphi_d(h) = h, \\ \varphi_d(y) = y, \quad \varphi_d(y') = y', \quad \varphi_d(z) = z - \theta x, \quad \varphi_d(z') = z'. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда оператор Роты — Бакстера $R_1 = \varphi_d^{-1} \circ R \circ \varphi_d$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} R_1(x') = \varphi_d^{-1} \circ R \circ \varphi_d(x') = \varphi_d^{-1}(R(x' + \theta z') = \varphi_d^{-1}\left(-\frac{1}{2}h + C_1 x + C_2 y' + \theta\beta y'\right) \\ = -\frac{1}{2}h + C_1 x + C_2 y' + \beta\theta y'. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} R_1(y) = \varphi_d^{-1} \circ R \circ \varphi_d(y) = \varphi_d^{-1}(R(y)) = \varphi_d^{-1}(-C_2 x - \beta z) \\ = -C_2 x - \beta(z + \theta x) = -C_2 x - \beta\theta x - \beta z. \end{aligned}$$

Для остальных элементов $t \in \mathrm{Span}(h, x, y', z, z')$ легко видеть, что $R(t) = R_1(t)$ при любом значении θ. Следовательно, можно подобрать θ так, что у элемента $R_1(x')$ коэффициент при y' равен 0. Таким образом, можно считать, что

$$R(h) = x,\ R(x') = -\frac{1}{2}h + Cx,\ R(y) = -\beta z,\ R(z') = \beta y',\ C, \beta \in \mathbb{C},\ \beta \neq 0.$$

Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, определенное как

$$\varphi(h) = h,\ \varphi(x) = x,\ \varphi(x') = x',\ \varphi(y) = \delta y,\ \varphi(y') = \frac{1}{\delta}y',\ \varphi(z) = \frac{1}{\delta}z,\ \varphi(z') = \delta z',$$

где $\delta \in \mathbb{C}$, $\delta \neq 0$. Несложно видеть, что отображение φ будет автоморфизмом алгебры $\mathbb{M}$. При этом

$$\begin{gathered} \varphi^{-1}(R(\varphi(h))) = \varphi^{-1}(x) = x, \quad \varphi^{-1}(R(\varphi(x'))) = -\frac{1}{2}h + Cx, \\ \varphi^{-1}(R(\varphi(y))) = \varphi^{-1}(R(\delta y)) = -\beta\delta\varphi^{-1}(z) = -\delta^2\beta z, \\ \varphi^{-1}(R(\varphi(z'))) = \delta\varphi^{-1}(R(z)) = \delta\beta\varphi^{-1}(y') = \beta\delta^2 y'. \end{gathered}$$

Поскольку поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, можно подобрать скаляр δ так, что $\delta^2 = \frac{1}{\beta}$. Следовательно, можно считать что оператор R имеет вид

$$R(h) = x,\ R(x') = -\frac{1}{2}h + Cx,\ R(y) = -z,\ R(\mathrm{Span}(x, y', z)) = 0,\ R(z') = y',\ C \in \mathbb{C}.$$

Случай 3.3. Предположим, что $R(h) = \alpha_1 y' + \alpha_2 z$, где $\alpha_2 \neq 0$. Рассмотрим автоморфизм φ_d из (11). Для него $\varphi_d(\mathrm{Im}(R)) = \mathrm{Im}(R)$. Кроме того,

$$\varphi_d\big(R\big(\varphi_d^{-1}(h)\big)\big) = \varphi_d(R(h)) = \varphi_d(\alpha_1 y' + \alpha_2 z) = \alpha_1 y' + \alpha_2 z - \alpha_2\theta x,$$

и приходим к случаю 3.2.

Случай 3.4. Предположим, что $R(h) = \alpha y'$, где $\alpha \neq 0$. Можно считать, что в этом случае $R(h) = y'$. Из равенства

$$[y', R(x')] = [R(h), R(x')] = R([y', x'] + [h, R(x')]) = 0$$

следует, что $R(x') \in \mathrm{Span}(x, y', z)$. Аналогично доказывается, что $R(z') \in \mathrm{Span}(x, y', z)$ и $R(y) = -\frac{1}{2}h + t$, где $t \in \mathrm{Span}(x, y', z)$.

Введем обозначения

$$R(y) = -\frac{1}{2}h + \alpha_1 x + \alpha_2 y' + \alpha_3 z, \quad R(x') = \beta_1 x + \beta_2 y' + \beta_3 z, \quad R(z') = \gamma_1 x + \gamma_2 y' + \gamma_3 z,$$

где $\alpha_i, \beta_i \gamma_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим

$$2(-\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1)y' = [R(x'), R(z')] = R([R(x'), z'] + [x', R(z')]) = (\beta_3 - \gamma_1)y'.$$

Отметим, что $-\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1 \neq 0$, так как в противном случае существует нетривиальный набор скаляров $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{C}$ таких, что $R(\theta_1 x' + \theta_2 z' + \theta_3 h) = 0$. При этом вектор $\theta_1 x' + \theta_2 z' + \theta_3 h$ не может лежать в $\mathrm{Ker}(R)$ по построению. Следовательно,

$$2(-\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1) = \beta_3 - \gamma_1 \neq 0. \tag{12}$$

Рассмотрим

$$[R(y), R(x')] = \left[-\frac{1}{2}h + \alpha_1 x + \alpha_2 y' + \alpha_3 z, \beta_1 x + \beta_2 y' + \beta_3 z\right]$$
$$= -\beta_1 x + \beta_2 y' - 2\alpha_1\beta_3 y' + 2\alpha_3\beta_1 y'.$$

С другой стороны,

$$R([R(y), x'] + [y, R(x')]$$
$$= R\left(\left[-\frac{1}{2}h + \alpha_1 x + \alpha_2 y' + \alpha_3 z, x'\right] + [y, \beta_1 x + \beta_2 y' + \beta_3 z]\right)$$
$$= R(x' + \alpha_1 h - 2\beta_1 z' + \beta_2 h + 2\beta_3 x')$$
$$= (\beta_1 - 2\beta_1\gamma_1 + 2\beta_3\beta_1)x + (\beta_2 + \alpha_1 - 2\beta_1\gamma_2 + \beta_2 + 2\beta_3\beta_2)y' + \big(\beta_3 - 2\beta_1\gamma_3 + 2\beta_3^2\big)z.$$

Сравнивая коэффициенты при x, y' и z, получаем следующие равенства:

$$\beta_1 = \beta_1(\gamma_1 - \beta_3), \tag{13}$$

$$2\alpha_3\beta_1 - 2\alpha_1\beta_3 = \alpha_1 + \beta_2 - 2\beta_1\gamma_2 + 2\beta_3\beta_2, \tag{14}$$

$$\beta_3 = \beta_1\gamma_3 - \beta_3^2. \tag{15}$$

Аналогичным образом из тождества $[R(y), R(z')] = R([R(y), z'] + [y, R(z')])$ получаем

$$\gamma_1 = \gamma_1^2 - \gamma_3\beta_1, \tag{16}$$

$$-2\alpha_1\gamma_3 + 2\alpha_3\gamma_1 = \alpha_3 + \gamma_2 - 2\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_3\beta_2, \tag{17}$$

$$\gamma_3 = \gamma_3(\gamma_1 - \beta_3). \tag{18}$$

Случай 3.4.1. Предположим, что $\beta_3 = 0$. Тогда из (12) следует, что $\beta_1 \neq 0$. Следовательно, из (13) следует, что $\gamma_1 = 1$. Но тогда из (16) следует, что $\gamma_3\beta_1 = 0$; противоречие с (12).

Случай 3.4.2. Предположим, что $\beta_3 \neq 0$ и $\beta_1 \neq 0$. Тогда из (13) следует, что $\gamma_1 - \beta_3 = 1$. Умножив равенство (15) на γ_1 и использовав выражение $\gamma_1\gamma_3 = \gamma_3 + \gamma_3\beta_3$ из (18), получаем

$$\beta_3\gamma_1 = \beta_1\gamma_3\gamma_1 - \beta_3^2\gamma_1 = \beta_1(\gamma_3 + \gamma_3\beta_3) - \beta_3^2\gamma_1 = \beta_1\gamma_3 + \beta_3(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1).$$

Следовательно,

$$\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 = \beta_3(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1).$$

А так как $\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1 \neq 0$, то $\beta_3 = -1$. Отсюда $\gamma_1 = 1 + \beta_3 = 0$. Но тогда из (16) следует, что $\gamma_3\beta_1 = 0$. Противоречие с тем, что $\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1 \neq 0$.

Случай 3.4.3. Пусть $\beta_1 = 0$ и $\beta_3 \neq 0$. Тогда из (15) и (16) следует, что $\beta_3 = -1$ и $\gamma_1 = 1$. Подставляя найденные коэффициенты в (18), получаем $\gamma_3 = 2\gamma_3$. Следовательно, $\gamma_3 = 0$.

Из равенств (14) и (17) находим, что $\alpha_1 = -\beta_2$ и $\alpha_3 = -\gamma_2$. Таким образом, оператор R действует как

$$R(h) = y',\ R(y) = -\frac{1}{2}h - C_1x + C_2y' - C_3z,\ R(x') = C_1y' - z,\ R(z') = x + C_3y'.$$

Зафиксируем ненулевой скаляр $\theta \in \mathbb{C}$ и рассмотрим нильпотентное дифференцирование $d = \frac{\theta}{4}D_{h,x}$, действующее как

$$d(x') = \theta h,\ d(y) = -\theta z',\ d(z) = \theta y',\ d(h) = -2\theta x,\ d(\mathrm{Span}(x, y', z')) = 0. \quad (19)$$

Соответствующий автоморфизм $\varphi = \exp(d)$ будет действовать как

$$\begin{gathered}\varphi(h) = h - 2\theta x, \quad \varphi(x) = x, \quad \varphi(x') = x' + \theta h - \theta^2 x, \quad \varphi(y) = y - \theta z', \\ \varphi(y') = y', \quad \varphi(z) = z + \theta y', \quad \varphi(z') = z'.\end{gathered} \quad (20)$$

Оператор $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$ удовлетворяет равенствам

$$R_1(h) = \varphi^{-1}(R(h - 2\theta x)) = y',$$

$$\begin{aligned}R_1(x') &= \varphi^{-1}(R(\varphi(x')) = \varphi^{-1}(R(x' + \theta h - \theta^2 x)) \\ &= \varphi^{-1}(C_1y' - z + \theta y') = C_1y' - (z - \theta y') + \theta y' = (C_1 + 2\theta)y' - z,\end{aligned}$$

$$R_1(z') = \varphi^{-1}(R(\varphi(z'))) = \varphi^{-1}(R(z')) = \varphi^{-1}(x + C_3y') = x + C_3y'.$$

Из этих равенств автоматически следует, что $R_1(y) = -\frac{1}{2}h - (C_1 + 2\theta)z + C_2y' - C_3z$. Таким образом, можно считать $C_1 = 0$. Аналогично, используя дифференцирование $D_{h,z}$, можно обнулить коэффициент C_3. В итоге оператор примет вид

$$R(h) = y', \quad R(y) = -\frac{1}{2}h + Cy', \quad R(x') = -z, \quad R(z') = x,$$

$$R(\mathrm{Span}(x, y', z)) = 0, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2. *Пусть $R : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ — оператор Роты — Бакстера веса 0 такой, что $\dim(\mathrm{Im}(R)) = 4$. Тогда с точностью до сопряжения автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$ и умножения на скаляр оператор R имеет один из следующих видов:*

$$R(h) = x,\ R(x') = -\frac{1}{2}h + Cx,\ R(y) = -z,\ R(z') = y',\ x, y', z \in \mathrm{Ker}(R),\ C \in \mathbb{C}. \quad (21)$$

$$R(h) = y',\ R(y) = -\frac{1}{2}h + Cy',\ R(x') = -z,\ R(z') = x,\ x, y', z \in \mathrm{Ker}(R),\ C \in \mathbb{C}. \quad (22)$$

При этом операторы (21) *и* (22), *а также операторы одного типа при различных значениях параметра* C *не сопряжены автоморфизмами алгебры* $\mathbb{M}$.

Доказательство. Докажем, что при различных значениях параметра C операторы типа (21) не сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$. Действительно, пусть для некоторого автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ оператор $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$ удовлетворяет равенствам

$$R_1(h) = x,\ R_1(x') = -\frac{1}{2}h + C_1 x,\ R_1(y) = -z,\ R_1(z') = y',\ C_1 \in \mathbb{C}.$$

Так как $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(R_1)$, то $\varphi(\mathrm{Im}(R)) = \mathrm{Im}(R)$. При этом $[\mathrm{Im}(R), \mathrm{Im}(R)] = \mathrm{Span}(x, y', z)$. Следовательно, $\varphi(\mathrm{Span}(x, y', z)) = \mathrm{Span}(x, y', z)$ и $\varphi(h) = \gamma_1 h + \gamma_2 x + \gamma_3 y' + \gamma_4 z$, где $\gamma_i \in \mathbb{C}$, $\gamma_1 \neq 0$.

Из равенства $R_1(h) = x$ получаем, что $R(\varphi(h)) = \varphi(x)$. Но $R(\varphi(h)) = \gamma_1 R(h) = \gamma_1 x$. Следовательно, $\varphi(x) = \gamma_1 x$. Тогда

$$2\gamma_1 x = 2\varphi(x) = \varphi([h, x]) = [\gamma_1 h + \gamma_2 x + \gamma_3 y' + \gamma_4 z, \gamma_1 x] = 2\gamma_1^2 x - 2\gamma_1\gamma_4 y'.$$

Стало быть, $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_4 = 0$. Обозначим $\varphi(x') = \alpha_1 h + \alpha_2 x' + t$, где $t \in \mathrm{Span}(x, y, y', z, z')$. Тогда

$$\varphi(h) = [\varphi(x), \varphi(x')] = [x, \alpha_1 h + \alpha_2 x' + t] = \alpha_2 h - 2\alpha_1 x + t_1,$$

где $t_1 \in \mathrm{Span}(z', y')$. Следовательно, $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_1 = -\frac{\gamma_2}{2}$. Но тогда из равенства $R_1(x') = -\frac{1}{2}h + C_1 x$ вытекает, что

$$R(\varphi(x')) = \varphi\left(-\frac{1}{2}h + C_1 x\right) = -\frac{1}{2}(h + \gamma_2 x + \gamma_3 y') + C_1 x. \tag{23}$$

При этом

$$R(\varphi(x')) = R\left(-\frac{\gamma_2}{2}h + x' + t\right) = -\frac{\gamma_2}{2}x - \frac{1}{2}h + Cx + t_2, \tag{24}$$

где $t_2 \in \mathrm{Span}(y', z)$. Сравнивая коэффициенты при x в (23) и (24), получаем, что $C_1 = C$.

Аналогичным образом доказывается, что операторы вида (22) при различных параметрах C не сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$.

Осталось доказать только то, что операторы (21) и (22) не сопряжены автоморфизмами. Предположим противное: существуют автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M})$, оператор R вида (21) и оператор R_1 вида (22) такие, что $\varphi^{-1} \circ R \circ \varphi = R_1$. Так как $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(R_1) = \mathrm{Span}(h, x, y', z)$, то $\varphi(\mathrm{Span}(h, x, y', z)) = \mathrm{Span}(h, x, y', z)$. В частности, $R(\varphi(h)) = \gamma y'$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{C}$,

$$\gamma y' = R(\varphi(h)) = \varphi(R_1(h)) = \varphi(x).$$

Обозначим $I = \mathrm{Span}(h, x, y', z)$. Легко видеть, что $I^2 = \mathrm{Span}(x, y', z)$. Следовательно, $\varphi(z) \in \mathrm{Span}(x, y', z)$. Но тогда

$$-2\varphi(y') = [\varphi(x), \varphi(z)] = [\gamma y', \varphi(z)] = 0;$$

противоречие. Теорема доказана.

4. Случай $\dim(\mathrm{Im}(R)) = 3$

В этом случае $\mathrm{Im}(R)$ является алгеброй Ли. С точностью до действия группы автоморфизмов можно считать что $\mathrm{Im}(R)$ содержится в максимальной подалгебре $I = \mathrm{Span}(h, x, x', y, z')$. Пусть

$$L = \{a \in \mathrm{Span}(h, x, x')|\ a + i \in \mathrm{Im}(R) \text{ для некоторого } i \in \mathrm{Span}(y, z')\}.$$

Так как $\mathrm{Span}(y, z')$ — идеал в I, то L является подалгеброй в $\mathrm{Span}(h, x, x')$.

Случай 4.1. Предположим, что $\dim(L) = 3$. Ограничение оператора R на подалгебру $\mathrm{Im}(R)$ является оператором Роты — Бакстера веса 0. Так как $L \subset \mathrm{Im}(R) \oplus \mathrm{Span}(y, z')$ и $L^2 = L$, то $\mathrm{Im}(R)$ не может быть разрешимой алгеброй Ли. Следовательно, ограничение $R|_{\mathrm{Im}(R)}$ не может быть невырожденным (см. лемму 1), т. е. $\mathrm{Im}(R) \cap \mathrm{Ker}(R) \neq 0$. Но $[\mathrm{Im}(R), \mathrm{Ker}(R)] \subset \mathrm{Ker}(R)$. Тогда пересечение $\mathrm{Im}(R) \cap \mathrm{Ker}(R)$ является ненулевым идеалом в $\mathrm{Im}(R)$. В силу простоты L отсюда следует, что $\mathrm{Im}(R) \subset \mathrm{Ker}(R)$. Так как $\dim(\mathrm{Ker}(R)) = 4$, то $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Im}(R) \oplus \mathbb{C}t$ для некоторого $t \in \mathbb{M}$. Следовательно, $\mathrm{Ker}(R)$ является четырехмерной подалгеброй в $\mathbb{M}$. В [21] было доказано, что с точностью до выбора базиса в $\mathbb{M}$ существует только одна четырехмерная подалгебра I с базисом h, x, y', z. При этом I разрешима и не может содержать неразрешимую подалгебру, изоморфную $\mathrm{Im}(R)$; противоречие.

Случай 4.2. Предположим, что $\dim(L) = 2$. В этом случае L будет двумерной разрешимой ненильпотентной алгеброй Ли. В силу следствия 1 можно считать, что $L = \mathrm{Span}(h, x)$. Тогда базисом $\mathrm{Im}(R)$ будут элементы $h + i_1$, $x + i_2$, i_3, где $i_j = \alpha_j y + \beta_j z'$, $j = 1, 2, 3$. При этом из равенства

$$[h + i_1, i_3] = 2\alpha_3 y - 2\beta_3 z' \in \mathrm{Im}(R)$$

следует, что либо $\alpha_3 = 0$, либо $\beta_3 = 0$. Если $\beta_3 = 0$, то из $[x + i_2, y] = 2z'$ получаем, что $\dim(\mathrm{Im}(R)) \geq 4$; противоречие. Следовательно, $i_3 = z'$. Аналогичным образом можно показать, что $\alpha_1 = 0$. Таким образом, базисом $\mathrm{Im}(R)$ являются элементы h, $x + \alpha y$, z'. Используя автоморфизм $\exp(\theta D_{x',y})$ для подходящего $\theta \in \mathbb{C}$, можно считать, что $\alpha = 0$ и $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}(h, x, z')$.

Рассмотрим два случая: $h \in \mathrm{Ker}(R)$ и $h \notin \mathrm{Ker}(R)$.

Случай 4.2.1. Предположим, что $h \in \mathrm{Ker}(R)$. Тогда $\mathrm{Im}(R) \subset \mathrm{Ker}(R)$. Следовательно, $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Im}(R) \oplus \mathbb{C}t$, $t \in \mathrm{Span}(x', y, y,' z)$. Из условия $[t, \mathrm{Im}(R)] \subset \mathrm{Ker}(R)$ непосредственными вычислениями находим, что $t = y$ или $t = y'$. Другими словами, либо $\mathrm{Ker}(R) = V_1 = \mathrm{Span}(h, x, z', y)$, либо $\mathrm{Ker}(R) = V_2 = \mathrm{Span}(h, x, z', y')$. Рассмотрим отображение

$$\varphi(h) = -h,\ \varphi(x) = z',\ \varphi(x') = z,\ \varphi(y) = y',\ \varphi(y') = y,\ \varphi(z) = x',\ \varphi(z') = x.$$

Несложно видеть, что отображение φ является автоморфизмом алгебры $\mathbb{M}$, а также $\varphi(\mathrm{Im}(R)) = \mathrm{Im}(R)$ и $\varphi(V_1) = V_2$. Таким образом, можно считать, что $\mathrm{Ker}(R) = V_2 = \mathrm{Span}(h, x, z', y')$. Введем обозначения

$$R(x') = \alpha_1 h + \alpha_2 x + \alpha_3 z',\ \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad R(y) = \beta_1 h + \beta_2 x + \beta_3 z',\ \beta_i \in \mathbb{C},$$

$$R(z) = \gamma_1 h + \gamma_2 x + \gamma_3 z',\ \gamma_i \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$[R(x'), R(y)] = 2(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)x + 2(-\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3)z'$$

$$= R([R(x'),y]+[x',R(y)]) = R(2\alpha_1 y + 2\beta_1 x' + 2\beta_3 y + \mathrm{Ker}(R))$$
$$= 4\alpha_1\beta_1 h + 2(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)x + 2(\alpha_1\beta_3+\beta_1\alpha_3)z' + 2\beta_3 R(y), \quad (25)$$

$$[R(x'),R(z)] = 2(\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2)x + 2(-\alpha_1\gamma_3+\gamma_1\alpha_3)z'$$
$$= R([R(x'),z]+[x',R(z)]) = R(2\alpha_1 z + 2\gamma_1 x' + 2\gamma_3 y + \mathrm{Ker}(R))$$
$$= 4\alpha_1\gamma_1 h + 2(\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2)x + 2(\alpha_1\gamma_3+\gamma_1\alpha_3)z' + 2\gamma_3 R(y), \quad (26)$$

$$[R(z),R(y)] = 2(\gamma_1\beta_2 - \beta_1\gamma_2)x + 2(-\gamma_1\beta_3+\beta_1\gamma_3)z'$$
$$= R([R(x'),y]+[x',R(y)]) = R(2\gamma_1 z - 2\beta_1 y + \mathrm{Ker}(R))$$
$$= 2(\gamma_1\beta_2 - \beta_1\gamma_2)x + 2(\gamma_1\beta_3 - \beta_1\gamma_3)z'. \quad (27)$$

Из равенства (27) следует, что

$$\gamma_1\beta_3 - \beta_1\gamma_3 = 0. \quad (28)$$

Случай 4.2.1.1. Предположим, что $(\beta_1,\beta_3)=(0,0)$. Тогда можно считать, что $R(y)=x$. Рассмотрим дифференцирование $\frac{\alpha_2}{4}D_{h,z'}$ и соответствующий ему автоморфизм $\exp\bigl(-\frac{\alpha_2}{4}D_{h,z'}\bigr)$, действующий как

$$\begin{gathered}\varphi(x)=x, \quad \varphi(x')=x'-\alpha_2 y, \quad \varphi(y)=y, \quad \varphi(y')=y'+\alpha_2 x,\\ \varphi(z)=z+\alpha_2 h-\alpha_2^2 z', \quad \varphi(z')=z', \quad \varphi(h)=h-2\alpha_2 z'.\end{gathered} \quad (29)$$

Тогда оператор Роты — Бакстера $R_1=\varphi^{-1}\circ R\circ\varphi$ будет удовлетворять

$$R_1(x')=\alpha_1' h+\alpha_3' z', \quad R_1(y)=x, \quad R_1(z)=\gamma_1' h+\gamma_2' x+\gamma_3' z'$$

для некоторых $\alpha_1',\alpha_3',\gamma_1',\gamma_2',\gamma_3'\in\mathbb{C}$.

Аналогично, используя внутреннее дифференцирование $D_{y,z'}$, действующее как $D_{y,z'}(y')=-6z'$, $d_{y,z'}(z)=6y$ и $D_{y,z'}(t)=0$ при $t\in\mathrm{Span}(x,x',y,z',h)$, можно занулить коэффициент γ_2. Таким образом, можно считать, что

$$R(x')=\alpha_1 h+\alpha_3 z', \quad R(y)=x, \quad R(z)=\gamma_1 h+\gamma_3 z', \quad \alpha_1,\alpha_3,\gamma_1,\gamma_3\in\mathbb{C}.$$

В этом случае формула (26) примет вид

$$4\alpha_1\gamma_1 h+4\alpha_1\gamma_3 z+2\gamma_3 x=0.$$

Следовательно, $\gamma_3=0$. А так как $z\notin\mathrm{Ker}(R)$, то $\gamma_1\neq 0$. Но тогда $\alpha_1=0$ и $\alpha_3\neq 0$. В итоге

$$R(x')=\alpha_3 z', \quad R(y)=x, \quad R(z)=\gamma_1 h, \quad \alpha_3,\gamma_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Для произвольного $\theta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ рассмотрим автоморфизм $\varphi_1:\mathbb{M}\to\mathbb{M}$, определенный как

$$\varphi_1(h)=h, \quad \varphi_1(x)=\theta x, \quad \varphi_1(x')=\frac{1}{\theta}x', \quad \varphi_1(y)=\theta y, \quad \varphi_1(y')=\frac{1}{\theta}y',$$
$$\varphi_1(z)=\frac{1}{\theta^2}z, \quad \varphi_1(z')=\theta^2 z'.$$

Тогда при $\theta^2=\gamma_1$ сопряжение автоморфизмом φ_1 дает оператор

$$R(x')=Cz',\ R(y)=x,\ R(z)=h,\ R(\mathrm{Span}(h,x,z',y'))=0,\ C\in\mathbb{C}\setminus\{0\}. \quad (30)$$

При сопряжении оператора (30) с помощью автоморфизма φ, определенного как

$$\varphi(h)=h,\ \varphi(x)=Cx,\ \varphi(x')=\frac{1}{C}x',\varphi(y)=\frac{1}{C}y,\ \varphi(y')=Cy',\ \varphi(z)=z,\ \varphi(z')=z', \tag{31}$$

получим оператор

$$R(x')=z',\quad R(y)=Cx,\quad R(z)=h,\quad R(\mathrm{Span}(h,x,z',y'))=0,\quad C\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Случай 4.2.1.2. Предположим что $(\beta_1,\beta_3)\neq(0,0)$. Тогда из (28) следует, что найдется скаляр $\theta\in\mathbb{C}$ такой, что $R(z+\theta y)=\gamma x$, $\gamma\in\mathbb{C}$. Рассмотрим внутреннее дифференцирование $D_{y,z'}$, действующее как $D_{y,z'}(y')=-6z'$, $D_{y,z'}(z)=6y$, $D_{y,z'}(\mathrm{Span}(h,x,x',y,z'))=0$. С точностью до сопряжения автоморфизмом $\exp(\frac{\theta}{6}D_{y,z'})$ и умножения на ненулевой скаляр можно считать, что $R(z)=x$. Из равенства (25) следует, что

$$(4\alpha_1\beta_1+2\beta_1\beta_3)h+(4\beta_1\alpha_2+2\beta_2\beta_3)x+\big(4\alpha_1\beta_3+2\beta_3^2\big)z'=0. \tag{32}$$

Случай 4.2.1.2.a. Предположим, что $\beta_3=0$. Тогда, так как $(\beta_1,\beta_3)\neq(0,0)$, то $\beta_1\neq0$. Тождество (32) примет вид $4\alpha_1\beta_1h+4\beta_1\alpha_2x=0$. Следовательно, $\alpha_1=\alpha_2=0$. Таким образом,

$$R(z)=x,\ R(x')=\alpha_3z',\ R(y)=\beta_1h+\beta_2x,\quad \alpha_3,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{C},\ \alpha_3\beta_1\neq0.$$

Для произвольного $\delta\in\mathbb{C}$ определим автоморфизм φ:

$$\begin{gathered}\varphi(h)=h,\quad \varphi(x)=\delta x,\quad \varphi(x')=\frac{1}{\delta}x',\\ \varphi(z)=\delta z,\quad \varphi(z')=\frac{1}{\delta}z',\quad \varphi(y)=\frac{1}{\delta^2}y,\quad \varphi(y')=\delta^2y'.\end{gathered} \tag{33}$$

С точностью до сопряжения с автоморфизмом φ (при $\delta^2=\beta_1$) можно считать, что $\beta_1=1$. Кроме того, рассмотрим внутреннее дифференцирование $d=\frac{\theta}{4}D_{h,x}$ при $2\theta=\beta_2$, определенное в (19). После сопряжения автоморфизмом $\exp(d)$ получим оператор

$$R(x')=Cz',\quad R(y)=h,\quad R(z)=x,\quad R(\mathrm{Span}(h,x,z',y'))=0,\quad C\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Пусть $\theta\in\mathbb{C}$ удовлетворяет $\theta^2=C_1$. Сопрягая полученный оператор автоморфизмом

$$\varphi(h)=h,\ \varphi(x)=\theta x,\ \varphi(x')=\frac{1}{\theta}x',\ \varphi(y)=y,\ \varphi(y')=y',\ \varphi(z)=\frac{1}{\theta}z,\ \varphi(z')=\theta z',$$

получим оператор

$$R(x')=z',\ R(y)=h,\ R(z)=Cx,\ R(\mathrm{Span}(h,x,z',y'))=0,\ C\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Случай 4.2.1.2.b. Предположим, что $\beta_3\neq0$. Тогда из (32) следует, что $\beta_3=-2\alpha_1$ и $\beta_2\beta_3=-2\beta_1\alpha_2$. Таким образом,

$$R(x')=\alpha_1h+\alpha_2x+\alpha_3z',\ R(y)=\beta_1h+\frac{\beta_1\alpha_2}{\alpha_1}x-2\alpha_1z',\ \alpha_1\neq0,\ \beta_1\alpha_3+2\alpha_1^2\neq0.$$

Допустим, что $\beta_1\neq0$. Рассмотрим внутреннее дифференцирование $d=\frac{\theta}{4}D_{h,z'}$, где $\theta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Для него

$$d(x')=-\theta y,\quad d(y')=\theta x,\quad d(z)=\theta h,\ d(h)=-2\theta z',\quad d(\mathrm{Span}(x,y,z'))=0.$$

В частности, $d(\mathrm{Im}(R)) \subset \mathrm{Im}(R)$ и $d(\mathrm{Ker}(R)) \subset \mathrm{Ker}(R)$. Соответствующий автоморфизм $\varphi = \exp(d)$ действует как

$$\varphi(h) = h - 2\theta z', \quad \varphi(x) = x, \quad \varphi(x') = x' - \theta y, \quad \varphi(y) = y, \quad \varphi(y') = y' + \theta x,$$
$$\varphi(z) = z + \theta h - \theta^2 z', \quad \varphi(z') = z'.$$

Сопрягая автоморфизмом $\exp(d)$ при $\theta = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, получаем оператор Роты — Бакстера R_1 веса 0, для которого $\mathrm{Im}(R_1) = \mathrm{Im}(R)$, $\mathrm{Ker}(R_1) = \mathrm{Ker}(R)$, $R_1(z) = x$ и $R_1(x') \in \mathrm{Span}(z')$. Следовательно, $R(y) \in \mathrm{Span}(h, x)$, и получаем оператор из случая 4.2.1.2.a.

Пусть $\beta_1 = 0$. В этом случае $R(y) = -2\alpha_1 z'$. Сопрягая автоморфизмом (33) при $\delta = \alpha_1$, получаем оператор

$$R(x') = h + C_1 x + C_2 z', \quad R(y) = -2z', \quad R(z) = x,$$
$$R(\mathrm{Span}(h, x, z', y')) = 0, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим автоморфизм φ, определенный в (20) при $-2\theta = C_1$. Для него, в частности, выполнено

$$\varphi^{-1}(h + C_1 x) = h, \quad \varphi(x) = x, \quad \varphi(z) = z', \quad \varphi(x') = x' - \frac{C_1}{2}h - \frac{C_1^2}{4}x.$$

Определим $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$. Несложно видеть, что $R_1(y) = -2z'$, $R_1(z) = x$. Кроме того,

$$R_1(x') = \varphi^{-1}(R(\varphi(x'))) = \varphi^{-1}(h + C_1 x + C_2 z') = h + C_2 z'.$$

Таким образом, можно считать что оператор R имеет вид

$$R(x') = h + Cz', \quad R(y) = -2z', \quad R(z) = x, \quad R(\mathrm{Span}(h, x, z', y')) = 0, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Случай 4.2.2. Пусть $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}(h, x, z')$ и $h \notin \mathrm{Ker}(R)$. Так как $[\mathrm{Im}(R), \mathrm{Ker}(R)] \subset \mathrm{Ker}(R)$, то $\mathrm{Ker}(R) \subset \mathrm{Span}(x, z', y, y')$. Но $\dim(\mathrm{Ker}(R)) = 4$, поэтому $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(x, z', y, y')$. Введем обозначения

$$R(h) = \alpha_1 h + \alpha_2 x + \alpha_3 z', \quad R(x') = \beta_1 h + \beta_2 x + \beta_3 z', \quad R(z) = \gamma_1 h + \gamma_2 x + \gamma_3 z'.$$

Учитывая, что $[h, \mathrm{Im}(R)] \in \mathrm{Ker}(R)$, имеем

$$\begin{aligned}
[R(h), R(x')] &= 2(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)x + 2(-\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3)z' \\
&= R([R(h), x'] + [h, R(x')]) = R(-2\alpha_1 x' + \alpha_2 h + \mathrm{Ker}(R)) \\
&= \alpha_1(\alpha_2 - 2\beta_1)h + \bigl(-2\alpha_1\beta_2 + \alpha_2^2\bigr)x + (\alpha_3\alpha_2 - 2\alpha_1\beta_3)z',
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
[R(h), R(z)] &= 2(\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2)x + 2(-\alpha_1\gamma_3 + \gamma_1\alpha_3)z' \\
&= R([R(h), z] + [h, R(z)]) = R(2\alpha_1 z - \alpha_3 h + \mathrm{Ker}(R)) \\
&= \alpha_1(2\gamma_1 - \alpha_3)h + (2\alpha_1\gamma_2 - \alpha_3\alpha_2)x + \bigl(2\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3^2\bigr)z',
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
[R(x'), R(z)] &= 2(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)x + 2(-\beta_1\gamma_3 + \gamma_1\beta_3)z' \\
&= R([R(x'), z] + [x', R(z)]) = R(2\beta_1 z - \beta_3 h + 2\gamma_1 x' - \gamma_2 h + \mathrm{Ker}(R)) \\
&= 2\beta_1 R(z) + 2\gamma_1 R(x') - (\beta_3 + \gamma_2)R(h).
\end{aligned} \tag{36}$$

Равенства (34) и (35) эквивалентны следующим равенствам:

$$\alpha_1(\alpha_2-2\beta_1)h+\big(2\beta_1\alpha_2-4\alpha_1\beta_2+\alpha_2^2\big)x+\alpha_3(\alpha_2-2\beta_1)z'=0, \tag{37}$$

$$\alpha_1(2\gamma_1-\alpha_3)h+\alpha_2(2\gamma_1-\alpha_3)x+\big(4\alpha_1\gamma_3-2\gamma_1\alpha_3-\alpha_3^2\big)z'=0. \tag{38}$$

Предположим, что $\alpha_2-2\beta_1\neq 0$. Тогда из (37) следует, что $\alpha_1=\alpha_3=0$ и $\alpha_2=-2\beta_1$. При этом $\alpha_2\neq 0$ (иначе $h\in\mathrm{Ker}(R)$). Из(38) следует, что $\gamma_1=0$. Равенство (36) примет вид

$$2\beta_1\gamma_2x-2\beta_1\gamma_3z'=2\beta_1\gamma_2x+2\beta_1\gamma_3z'-(\beta_3+\gamma_2)\alpha_2x.$$

Сравнивая коэффициент при z' и учитывая, что $\beta_1\neq 0$, получаем $\gamma_3=0$ и $R(z)=\gamma_2x$. Но тогда линейная комбинация векторов h и z лежит в ядре оператора R; противоречие. Следовательно, $\alpha_2-2\beta_1=0$. Аналогичным образом доказывается, что $2\gamma_1-\alpha_3=0$. В этом случае равенства (37) и (38) примут вид

$$4(\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2)x=0,\quad 4(\alpha_1\gamma_3-\gamma_1\alpha_3)z'=0.$$

Получаются следующие соотношения:

$$\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2=2\beta_1^2-\alpha_1\beta_2=0, \tag{39}$$

$$\alpha_1\gamma_3-\gamma_1\alpha_3=\alpha_1\gamma_3-2\gamma_1^2=0. \tag{40}$$

Отсюда вытекает, что если $\alpha_1=0$, то $\beta_1=\gamma_1=0$. Но тогда $R(h)=0$ и $h\in\mathrm{Ker}(R)$; противоречие.

Следовательно, можно считать, что $\alpha_1=1$. Тогда ввиду (39) существует скаляр $\theta_1\in\mathbb{C}$, для которого $R(x'+\theta_1h)\in\mathrm{Span}(z')$. Аналогично из (40) следует существование $\theta_2\in\mathbb{C}$ такого, что $R(z+\theta_2h)\in\mathrm{Span}(x)$. Пусть φ_1 — автоморфизм, определенный в (20) при $\theta=\theta_1$. Определим $R_1=\varphi_1^{-1}\circ R\circ\varphi_1$. Так как $\varphi_1(\mathrm{Ker}(R))=\mathrm{Ker}(R)$, то $\mathrm{Ker}(R_1)=\mathrm{Ker}(R)$. Кроме того, поскольку $\varphi_1(\mathrm{Im}(R))=\mathrm{Im}(R)$, то $R_1(\mathrm{Span}(h,z))\in\mathrm{Span}(h,x,z')$. Имеем

$$R_1(x')=\varphi_1^{-1}(R(\varphi_1(x')))=\varphi_1^{-1}\big(R\big(x'+\theta_1h-\theta_1^2x\big)\big)=\varphi_1^{-1}(\beta z')=\beta z',\quad \beta\in\mathbb{C}.$$

Таким образом, можно считать, что $R(x')=\beta_3z'$ и $R(h)=h+\alpha_3z'$.

Рассмотрим теперь автоморфизм φ_2, определенный в (29), при $\alpha_2=\theta_2$. Данный автоморфизм удовлетворяет $\varphi_2(\mathrm{Ker}(R))=\mathrm{Ker}(R)$ и $\varphi_2(\mathrm{Im}(R))=\mathrm{Im}(R)$. Рассмотрим оператор $R_2=\varphi_2^{-1}\circ R\circ\varphi_2$. Тогда $\mathrm{Ker}(R_2)=\mathrm{Ker}(R)$, $\mathrm{Im}(R_2)=\mathrm{Im}(R)$. Кроме того,

$$R_2(x')=\varphi_2^{-1}(R(\varphi_2(x')))=\varphi_2^{-1}(R(x'-\theta_2y))=\varphi_2^{-1}(\beta_3z')=\beta_3z',$$

$$R_2(z)=\varphi_2^{-1}(R(\varphi_2(z)))=\varphi_2^{-1}\big(R\big(z+\theta_2h-\theta_2^2z'\big)\big)=\varphi_2^{-1}(\gamma_2x)=\gamma_2x.$$

Таким образом, можно считать, что оператор R удовлетворяет

$$R(h)=h,\quad R(x')=\beta_3z',\quad R(z)=\gamma_2x,\quad \beta_3=-\gamma_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Сопрягая автоморфизмом φ, определенным как

$$\varphi(h)=h,\quad \varphi(x)=\beta_3x,\quad \varphi(x')=\frac{1}{\beta_3}x',$$

$$\varphi(z)=z,\quad \varphi(z')=z',\quad \varphi(y)=\frac{1}{\beta_3}y,\quad \varphi(y')=\beta_3y',$$

получаем оператор

$$R(h) = h, \quad R(x') = z, \quad R(z) = -x, \quad R(\mathrm{Span}(x, z', y, y')) = 0.$$

Случай 4.3. Предположим, что $\dim(L) = 1$. В этом случае $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}(y, z', t)$, где $t \in \mathrm{Span}(h, x, x')$. В силу следствия 1 с точностью до действия группы автоморфизмов у нас есть два варианта: $t = h$ (если элемент t полупрост), и $t = x$ (если он ad-нильпотентен).

Предположим, что $t = h$ и $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}(h, y, z')$. Сопрягая автоморфизмом φ, определенным по правилу

$$\varphi(h) = h,\ \varphi(x) = y,\ \varphi(x') = y',\ \varphi(y) = x,\ \varphi(y') = x',\ \varphi(z) = -z,\ \varphi(z') = -z', \tag{41}$$

получаем оператор R_1, у которого $\mathrm{Im}(R_1) = \mathrm{Span}(h, x, z')$, рассмотренный в случае 4.2.

Предположим, что $t = x$ и $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}(x, y, z')$. Докажем, что $\mathrm{Im}(R) \subset \mathrm{Ker}(R)$. Действительно, предположим что $\dim(\mathrm{Ker}(R) \cap \mathrm{Im}(R)) = 2$. Так как $I := \mathrm{Ker}(R) \cap \mathrm{Im}(R)$ является идеалом в $\mathrm{Im}(R)$ размерности 2, то $I = \mathrm{Span}(t, z')$, где $t \in \mathrm{Span}(x, y)$. С точностью до сопряжения с автоморфизмом φ, определенным как

$$\varphi(h) = h, \quad \varphi(x) = x + \theta y, \quad \varphi(x') = x',$$
$$\varphi(y) = y, \quad \varphi(y') = y' - \theta x', \quad \varphi(z) = z, \quad \varphi(z') = z',$$

можно считать, что либо $I = \mathrm{Span}(x, z')$, либо $I = \mathrm{Span}(y, z')$. Рассмотрим случай, когда $I = \mathrm{Span}(x, z')$ (второй случай рассматривается аналогично). Возьмем $t \in \mathrm{Ker}(R)$, линейно независимый с x и z'. Можно считать, что

$$t = \alpha_1 h + \alpha_2 x' + \alpha_3 y + \alpha_4 y' + \alpha_5 z.$$

Тогда

$$[t, x] = 2\alpha_1 x - \alpha_2 h - 2\alpha_3 z' + 2\alpha_5 y' \in \mathrm{Ker}(R),$$
$$[[t, x], y] = 2\alpha_1 z' - 2\alpha_2 y - 2\alpha_5 h.$$

Следовательно, $\alpha_2 y + \alpha_5 h \in \mathrm{Ker}(R)$. Но тогда $[\alpha_2 y + \alpha_5 h, y] = 2\alpha_5 y \in \mathrm{Ker}(R)$. Стало быть, $\alpha_5 = \alpha_2 = 0$.

Рассмотрим

$$[t, y] = 2\alpha_1 y - \alpha_4 h \in \mathrm{Ker}(R), \quad [[t, y], y] = -2\alpha_4 y \in \mathrm{Ker}(R).$$

Из этих равенств следует, что $\alpha_4 = \alpha_1 = 0$. Но тогда $t = \alpha_3 y$; противоречие.

Аналогичным образом доказывается, что пересечение $\mathrm{Ker}(R) \cap \mathrm{Im}(R)$ не может быть нулевым или иметь размерность 1. Значит, $x, y, z' \in \mathrm{Ker}(R)$. Несложно видеть, что четвертым базисным вектором в ядре будет h, т. е. $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(h, x, y, z')$. Обозначим

$$R(x') = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z', \quad R(y') = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z', \quad R(z) = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z'.$$

Заметим, что $[R(x'), y'] = \alpha_2 h + 2\alpha_3 x \in \mathrm{Ker}(R)$ (аналогично $[x', R(t)] \in \mathrm{Ker}(R)$ для любого $t \in \mathrm{Im}(R)$). Следовательно,

$$[R(x'), R(y')] = (2\alpha_1\beta_2 - 2\alpha_2\beta_1)z' = R([R(x'), y'] + [x', R(y')]) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 0$, т. е. пары (α_1, α_2) и (β_1, β_2) линейно зависимы. Заметим, что вариант $\alpha_i = \beta_i = 0$ при $i = 1, 2$ невозможен, так как в этом случае линейная комбинация векторов x' и y' лежит в ядре оператора R. С точностью до сопряжения автоморфизмом (41) можно считать, что $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$. Тогда найдется $\theta \in \mathbb{C}$ такой, что $R(y' + \theta x') = \beta z'$. Рассмотрим автоморфизм

$$\varphi(h) = h,\ \varphi(x) = x - \theta y,\ \varphi(x') = x',\ \varphi(y) = y,\ \varphi(y') = y' + \theta x',\ \varphi(z) = z,\ \varphi(z') = z'.$$

Оператор $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$ удовлетворяет равенствам $\mathrm{Im}(R_1) = \mathrm{Im}(R)$, $\mathrm{Ker}(R_1) = \mathrm{Ker}(R)$. Кроме того, $R_1(y') = \beta_3 z'$. С точностью до умножения на скаляр можно считать, что $R(y') = z'$. Сопрягая автоморфизмом

$$\varphi(h) = h, \quad \varphi(x) = x, \quad \varphi(x') = x' - \alpha_3 y',$$

$$\varphi(y) = y + \alpha_3 x, \quad \varphi(y') = y', \quad \varphi(z) = z, \quad \varphi(z') = z',$$

добьемся $R(x') = \alpha_1 x + \alpha_2 y$.

Рассмотрим равенство

$$[R(x'), R(z)] = (2\alpha_1\gamma_2 - 2\alpha_2\gamma_1)z' = R([x', R(z)] + [R(x'), z])$$
$$= R(-2\alpha_1 y' + 2\alpha_2 x' + \mathrm{Ker}(R)) = -2\alpha_1 z' + 2\alpha_2\alpha_1 x + 2\alpha_2^2 y.$$

Из него следует, что $\alpha_2 = 0$ и $\gamma_2 = -1$. Равенство

$$[R(y'), R(z)] = R([R(y'), z] + [y', R(z)] = 0$$

верно при любых значениях параметров α_1, γ_1 и γ_3. В итоге оператор R удовлетворяет

$$R(x') = \alpha x, \quad R(y') = z', \quad R(z) = \gamma_1 x - y + \gamma_3 z', \quad R(\mathrm{Span}(h, x, y, z')) = 0,$$

где $\alpha, \gamma_1, \gamma_3 \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

Пусть скаляр $\theta \in \mathbb{C}$ удовлетворяет $\theta^4 = \alpha$. Рассмотрим автоморфизм φ, определенный как

$$\varphi(h) = h, \quad \varphi(x) = \theta^2 x, \quad \varphi(x') = \frac{1}{\theta^2} x',$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\theta} y, \quad \varphi(y') = \theta y', \quad \varphi(z) = \frac{1}{\theta} z, \quad \varphi(z') = \theta z'.$$

Оператор $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$ удовлетворяет равенствам $\mathrm{Im}(R_1) = \mathrm{Im}(R)$ и $\mathrm{Ker}(R_1) = \mathrm{Ker}(R)$. Кроме того,

$$R_1(x') = \varphi^{-1}(R(\varphi(x'))) = \frac{1}{\theta^2}\varphi^{-1}(R(x')) = \frac{\alpha}{\theta^2}\varphi^{-1}(x) = \frac{\alpha}{\theta^4} x = x,$$

$$R_1(y') = \varphi^{-1}(R(\varphi(y'))) = \theta\varphi^{-1}(z') = z',$$

$$R_1(z) = \varphi^{-1}(R(\varphi(z))) = \frac{1}{\theta}\varphi^{-1}(\gamma_1 x - y + \gamma_3 z') = \frac{\gamma_1}{\theta^3} x - y + \frac{\gamma_3}{\theta^2} z'.$$

Получаем оператор

$$R(x') = x,\ R(y') = z',\ R(z) = C_1 x - y + C_2 z',\ R(\mathrm{Span}(h, x, y, z')) = 0,\ C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Пусть скаляр θ удовлетворяет $C_1 - 2\theta = 0$. Рассмотрим автоморфизм $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, определенный как

$$\varphi(h) = h - 2\theta y, \quad \varphi(x) = x + \theta z', \quad \varphi(x') = x' + \theta y' + \theta^2 h - \theta^3 y,$$

$$\varphi(y) = y - \theta x - \theta^2 z', \quad \varphi(y') = y' + \theta h - \theta^2 y, \quad \varphi(z) = z - \theta x', \quad \varphi(z') = z'.$$

Тогда оператор $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$ удовлетворяет

$$R_1(x') = \varphi^{-1}(R(x' + \theta y' + \theta^2 h - \theta^3 y)) = \varphi^{-1}(x + \theta z') = x,$$

$$R_1(y') = \varphi^{-1}(R(y' + \theta h - \theta^2 y)) = \varphi^{-1}(z') = z',$$

$$\begin{aligned} R_1(z) &= \varphi^{-1}(R(z - \theta x')) = \varphi^{-1}(C_1 x - y + C_2 z' - \theta x) \\ &= \varphi^{-1}(-y + \theta x + \theta^2 z') + \varphi^{-1}(C_1 x + C_2 z' - 2\theta x - \theta^2 z') \\ &= -y + (C_1 - 2\theta)x + (-C_1\theta + 2\theta^2 + C_2 - \theta^2)z' = -y + Cz', \end{aligned}$$

где $C \in \mathbb{C}$. Таким образом, можно считать, что оператор R удовлетворяет

$$R(x') = x,\ R(y') = z',\ R(z) = -y + Cz',\ R(\mathrm{Span}(h, x, y, z')) = 0,\ C \in \mathbb{C}. \quad (42)$$

Заметим, что операторы типа (42), отвечающие скалярам $C \in \mathbb{M}$ и $-C$, сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$. Действительно, пусть оператор R определен, как в (42). Рассмотрим автоморфизм φ, определенный как

$$\varphi(h) = h, \quad \varphi(x) = -x, \quad \varphi(x') = -x',$$

$$\varphi(y) = -iy, \quad \varphi(y') = iy, \quad \varphi(z) = -iz, \quad \varphi(z') = iz',$$

где $i \in \mathbb{C}$ — мнимая единица.

Несложно видеть, что оператор $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$ удовлетворяет

$$R_1(x') = x,\ R_1(y') = z',\ R_1(z) = -y - Cz',\ R_1(\mathrm{Span}(h, x, y, z')) = 0,\ C \in \mathbb{C}.$$

В итоге получаем, что верна следующая

Теорема 3. *Пусть $R : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ — оператор Роты — Бакстера веса 0 такой, что $\dim(\mathrm{Im}(R)) = 3$. Тогда с точностью до сопряжения автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$ и умножения на скаляр оператор R имеет один из следующих видов:*
1) $R(x') = z'$, $R(y) = Cx$, $R(z) = h$, $R(\mathrm{Span}(h, x, z', y')) = 0$, $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
2) $R(x') = z'$, $R(y) = h$, $R(z) = Cx$, $R(\mathrm{Span}(h, x, z', y')) = 0$, $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
3) $R(x') = h + Cz'$, $R(y) = -2z'$, $R(z) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, z', y')) = 0$, $C \in \mathbb{C}$,
4) $R(h) = h$, $R(x') = z$,$R(z) = -x$, $R(\mathrm{Span}(x, z', y, y')) = 0$,
5) $R(x') = x$, $R(y') = z'$, $R(z) = -y + Cz'$, $R(\mathrm{Span}(h, x, y, z')) = 0$, $C \in \mathbb{C}$.

При этом операторы типа 1–3 не сопряжены автоморфизмами при различных значениях параметров. Операторы типа 5, отвечающие скалярам C_1 и C_2, сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$ тогда и только тогда, когда $C_1 = \pm C_2$.

Доказательство. Осталось показать, что данные операторы не сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$. Оператор 4 является единственным оператором, у которого квадрат ядра имеет размерность 2, поэтому он не может быть сопряжен операторам 1–3 или 5. Кроме того, у оператора 5 образ является нильпотентной подалгеброй, в то время как у операторов 1–3 образ не нильпотентен. Следовательно, операторы вида 1–3 не могут быть сопряжены оператору 5.

Случай 1. Рассмотрим операторы 1–3. Обозначим $I = \mathrm{Span}(h, x, z')$ и $Y = \mathrm{Span}(h, x, z', y')$. Рассмотрим автоморфизм $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ такой, что $\varphi(I) = I$ и $\varphi(Y) = Y$. Так как $x \in [I, I] = \mathrm{Span}(x, z')$, то $\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 z'$. Аналогично $\varphi(z') = \beta_1 x + \beta_2 z'$. Пусть $\varphi(h) = \alpha h + \beta x + \gamma z'$. Так как $\varphi(y') \in [Y, Y]$, то

$\varphi(y') = \theta_1 x + \theta_2 z' + \theta_3 y'$, $\theta_3 \neq 0$. Из условия $[\varphi(y'), \varphi(h)] = 2\varphi(y')$ следует, что $\alpha = 1$. Следовательно, $\varphi(x) = \alpha_1 x$ и $\varphi(z') = \beta_2 z'$.

Рассмотрим R, оператор Роты — Бакстера типа 1. Так как $\varphi(y') = \theta_1 x + \theta_2 z' + \theta_3 y'$ для $\theta_3 \neq 0$, то $\varphi(y) = \frac{1}{\theta_3} y + t$, где $t \in \mathrm{Span}(h, x, x', y', z, z')$. Но тогда

$$\varphi^{-1}(R(\varphi(y))) = \frac{C}{\theta_3}\varphi^{-1}(x) + \gamma_2 h + \gamma_3 z' = \frac{C}{\alpha_1\theta_3}x + \gamma_2 h + \gamma_3 z' \tag{43}$$

для некоторых $\gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{M}$. Следовательно, коэффициент при x у $\varphi^{-1}(R(\varphi(y)))$ всегда будет отличен от нуля и оператор R не может быть сопряжен операторам типа 2 или 3. Аналогично доказывается, что операторы 2 и 3 не сопряжены.

Докажем, что различные значения параметра C дают не сопряженные операторы. Пусть R — оператор Роты — Бакстера типа 1 и $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$, где φ — автоморфизм алгебры $\mathbb{M}$, удовлетворяющий $\varphi(I) = I$ и $\varphi(J) = J$. Предположим, что $R_1(x') = z'$ и $R_1(z) = h$. Так как $\varphi(z) = \beta_2 z'$, то $\varphi(z) = -\frac{1}{\beta_2} z + t_1$, где $t_1 \in \mathrm{Span}(h, x, x', y, y', z')$. Тогда из $R_1(z) = h$ получаем

$$\frac{1}{\beta_2} h + q = R(\varphi(z)) = \varphi(h) = h + \beta x + \gamma z',$$

где $q \in \mathrm{Span}(x, z')$. Следовательно, $\beta_2 = 1$ и $\varphi(z') = z'$. Аналогично из условия $R(x') = z'$ получаем, что $\alpha_1 = 1$ и $\varphi(x) = x$. Так как $[z', y'] = 2x$, то $\theta_3 = 1$. Из (43) следует, что $R_1(y) = Cx' + \gamma_2 h + \gamma_3 z'$. Отсюда вытекает, что операторы типа 1 при различных значениях параметра C не сопряжены. Аналогично доказывается, что операторы типа 2 не сопряжены при различных значениях параметра C.

Пусть R — оператор Роты — Бакстера типа 3 и $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ — автоморфизм алгебры $\mathbb{M}$ такой, что $\varphi(I) = I$ и $\varphi(J) = J$. По доказанному выше $\varphi(h) = h + \beta x + \gamma z'$, $\varphi(x) = \alpha_1 x$, $\varphi(z') = \beta_2 z'$ и $\varphi(y') = \theta_3 y' + \theta_1 x + \theta_2 z'$, где $\beta, \gamma, \alpha_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{C}$.

Предположим, что оператор $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi^{-1}$ удовлетворяет

$$R_1(x') = h + C' z', \quad R_1(y) = -2z', \quad R_1(z) = x.$$

Так как $\varphi(x') = \frac{1}{\alpha_1} x' + t$, где $t \in \mathrm{Span}(h, x, y, y', z, z')$, то из условия $R_1(x') = h + C'z'$ следует, что $\alpha_1 = 1$ и $\varphi(x) = x$. Но тогда из условия $R_1(z) = x$ следует, что $\beta_2 = 1$ и $\varphi(z') = z'$.

Из условия $R_1(y) = -2z'$ следует, что $\varphi(y) = y + \alpha_y h + \beta_y x + \gamma_y z' + \delta_y y'$, где $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y, \delta_y \in \mathbb{C}$. Из равенства $[\varphi(x), \varphi(y)] = 2\varphi(z') = 2z'$ находим, что $\alpha_y = 0$. Из равенства $[\varphi(y), \varphi(z')] = 0$ находим, что $\delta_y = 0$. В итоге

$$\varphi(y) = y + \beta_y x + \gamma_y z'.$$

Из равенства $R_1(z) = x$ следует, что $\varphi(z) - z \in \mathrm{Ker}(R)$. Пусть $\varphi(z) = z + \alpha_z h + \beta_z x + \gamma_z z' + \delta_z y'$. Тогда

$$\begin{aligned} 2\varphi(x') = [\varphi(y), \varphi(z)] &= [y + \beta_y x + \gamma_y z', z + \alpha_z h + \beta_z x + \gamma_z z' + \delta_z y'] \\ &= 2x' + q2\delta_1 y + 2\delta_2 z' + 2\delta_3 h + 2\delta_4 y' + 2\delta_5 x, \end{aligned}$$

где $q \in \mathrm{Span}(y, z', h, x)$. Следовательно,

$$\varphi(x') = x' + \delta_1 y + \delta_2 z' + \delta_3 h + \delta_4 y' + \delta_5 x$$

для некоторых $\delta_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \ldots, 5)$.

Из равенства $R_1(x') = h + C'z'$ получаем, что $R(\varphi(x')) = \varphi(h + C'z')$. Но тогда

$$R(\varphi(x')) = R(x' + \delta_1 y + \delta_2 z' + \delta_3 h + \delta_4 y' + \delta_5 x) = R(x' + \delta_1 y) = h + \delta z',$$

где $\delta = C - 2\delta_1 \in \mathbb{C}$. Следовательно, $\varphi(h + C'z') = h + \delta z'$. Так как $\varphi(z') = z'$, то $\alpha = 0$ и $\varphi(h) = h + (\delta - C')z'$. При этом $\varphi^{-1}(h) = h - (\delta - C')z'$. Сравнивая коэффициент при y в выражении

$$2\varphi(x') = [\varphi(x'), \varphi(h)] = [x' + \delta_1 y + \delta_2 z' + \delta_3 h + \delta_4 y' + \delta_5 x, h + (\delta - C')z'],$$

получаем, что $2\delta_1 = -2\delta_1 + 2(\delta - C')$. Отсюда следует, что $\delta - C' = 2\delta_1$ и $\varphi(h) = h + 2\delta_1 z'$. Но тогда

$$R_1(x') = \varphi^{-1}(R(\varphi(x'))) = \varphi^{-1}(h + Cz' - 2\delta_1 z') = h + Cz'.$$

Значит, $C = C_1$.

Случай 2. Пусть R — оператор Роты — Бакстера типа 5. Предположим, что φ — автоморфизм алгебры $\mathbb{M}$ такой, что оператор $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$ удовлетворяет

$$R_1(x') = x,\ R_1(y') = z',\ R_1(z) = -y + C'z',\ R_1(\mathrm{Span}(h, x, y, z')) = 0,\ C' \in \mathbb{C}.$$

Тогда автоморфизм φ удовлетворяет $\varphi(\mathrm{Im}(R)) = \mathrm{Im}(R_1) = \mathrm{Im}(R)$, $\varphi(\mathrm{Ker}(R)) = \mathrm{Ker}(R_1) = \mathrm{Ker}(R)$. Так как $\mathrm{Im}(R)^2 = \mathbb{C}z'$, то

$$\varphi(z') = \theta z', \quad 0 \neq \theta \in \mathbb{C}.$$

Условие $R_1(y') = z'$ можно переписать так:

$$R(\varphi(y')) = \varphi(z') = \theta z'.$$

Отсюда получаем, что $\varphi(y') - \theta y' \in \mathrm{Ker}(R)$. Обозначим

$$\varphi(y') = \theta y' + \theta_1 h + \theta_2 x + \theta_3 y + \theta_4 z'.$$

Тогда

$$2\varphi(x) = \varphi([z', y']) = [\varphi(z'), \varphi(y')] = \theta[z', \theta y' + \theta_1 h + \theta_2 x + \theta_3 y + \theta_4 z'] = 2\theta^2 x + 2\theta\theta_1 z'.$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \theta^2 x + \theta\theta_1 z'.$$

Из условия $R_1(x') = x$ получаем

$$R(\varphi(x')) = \varphi(x) = \theta^2 x + \theta\theta_1 z'.$$

Следовательно, $\varphi(x') - \theta^2 x' - \theta\theta_1 y' \in \mathrm{Ker}(R)$. Обозначим

$$\varphi(x') = \theta^2 x' + \theta\theta_1 y' + \alpha_1 h + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z'.$$

Тогда

$$\begin{aligned}2\varphi(y) = [\varphi(x'), \varphi(z')] &= [\theta^2 x' + \theta\theta_1 y' + \alpha_1 h + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z', \theta z'] \\ &= 2\theta^3 y - 2\theta^2\theta_1 x - 2\alpha_1\theta z'.\end{aligned}$$

Стало быть,

$$\varphi(y) = \theta^3 y - \theta^2\theta_1 x - \alpha_1\theta z'.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}2\varphi(z) &= [\varphi(y'),\varphi(x')]\\ &= [\theta y'+\theta_1 h+\theta_2 x+\theta_3 y+\theta_4 z', \theta^2 x'+\theta\theta_1 y'+\alpha_1 h+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 z']\\ &= 2\theta^3 z+2\theta\alpha_1 y'-2\theta^2\theta_1 x'-2\theta\theta_1^2 y'+2t,\end{aligned}$$

где $t\in \mathrm{Ker}(R)$. Отсюда

$$\varphi(z)=\theta^3 z+\big(\theta\alpha_1-\theta\theta_1^2\big)y'-\theta^2\theta_1 x'+t,\quad t\in\mathrm{Ker}(R).$$

Тогда

$$\begin{aligned}R_1(z) &= \varphi^{-1}(R(\varphi(z)))=\varphi^{-1}\big(R\big(\theta^3 z+\big(\theta\alpha_1-\theta\theta_1^2\big)y'-\theta^2\theta_1 x'+t\big)\big)\\ &= \varphi^{-1}\big(-\theta^3 y+\theta^3 C-\theta^2\theta_1 x+\big(\theta\alpha_1-\theta\theta_1^2\big)z'\big)\\ &= \varphi^{-1}(-\theta^3 y+\theta^2\theta_1 ax+\alpha_1\theta z')+\varphi^{-1}\big(-2\theta^2\theta_1 x-\theta\theta_1^2 z'+\theta^3 Cz'\big)\\ &= -y-2\theta_1 x+2\theta\theta_1^2 z'-\theta_1^2 z'+\theta^2 Cz'.\end{aligned}$$

Так как $R_1(z)=-y+C'z'$, то $\theta_1=0$ и $C'=\theta^2 C$. Заметим, что

$$2\theta z'=2\varphi(z')=[\varphi(x),\varphi(y)]=[\theta^2 x+\theta\theta_1 z', \theta^3 y-\theta^2\theta_1 x-\alpha_1\theta z']=\theta^5 z'.$$

Следовательно, $\theta^4=1$ и $\theta^2=\pm 1$. Отсюда получаем, что $C'=\pm C$. Теорема доказана.

5. Случай $\dim(\mathrm{Im}(R)) = 2$

В этом случае $\mathrm{Im}(R)$ является либо разрешимой, либо абелевой алгеброй Ли. Рассмотрим подалгебру

$$L=\{a\in\mathrm{Span}(h,x,x')\mid a+i\in\mathrm{Im}(R)\text{ для некоторого } i\in\mathrm{Span}(y,z')\}.$$

С точностью до сопряжения автоморфизмами у нас есть четыре варианта: $L=0$, $L=\mathrm{Span}(h)$, $L=\mathrm{Span}(x)$ или $L=\mathrm{Span}(h,x)$. Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из разд. 3, можно показать, что если $L=\mathrm{Span}(h)$ или $L=\mathrm{Span}(h,x)$, то с точностью до сопряжения автоморфизмом $\mathrm{Im}(R)=\mathrm{Span}(h,x)$ (разрешимый случай), а в остальных случаях с точностью до сопряжения автоморфизмами $\mathrm{Im}(R)=\mathrm{Span}(x,y')$ (случай абелевой алгебры Ли).

Случай 5.1. Предположим, что $\mathrm{Im}(R)=\mathrm{Span}(h,x)$. Пусть $t\in\mathrm{Ker}(R)$, $t=\alpha h+a+b$, где $a\in\mathrm{Span}(x,y,z)$, $b\in\mathrm{Span}(x',y',z')$. Тогда, как показано ранее, $\alpha h, a, b\in\mathrm{Ker}(R)$.

Случай 5.1.1. Предположим, что $h\in\mathrm{Ker}(R)$. Тогда $x\in\mathrm{Ker}(R)$. Обозначим

$$a=\alpha x+\beta y+\gamma z,\quad b=\gamma x'+\delta y'+\theta z'.$$

Случай 5.1.1.1. Допустим, что $\mathrm{Ker}(R)\cap\mathrm{Span}(y,z)=0$. Тогда $\mathrm{Ker}(R)\subseteq\mathrm{Span}(h,x,x',y',z')$. А так как $\dim(\mathrm{Ker}(R))=5$, то $\mathrm{Ker}(R)=\mathrm{Span}(h,x,x',y',z')$. Введем обозначения

$$R(y)=\alpha_1 h+\beta_1 x,\quad R(z)=\alpha_2 h+\beta_2 x.$$

Несложно видеть, что условие $[R(y),R(z)]=R([R(y),z]+[y,R(z)])$ выполняется при любых значениях параметров α_i,β_i $(i=1,2)$. По условию $\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2\neq 0$.

С точностью до действия автоморфизмом φ, определенным по правилу

$$\varphi(h)=h,\ \varphi(x)=-x,\ \varphi(x')=-x',\ \varphi(y)=z,\ \varphi(y')=z',\ \varphi(z)=y,\ \varphi(z')=y', \tag{44}$$

можно считать, что $\alpha_1=1$. Тогда с точностью до сопряжения автоморфизмом $\psi=\exp(-\frac{\alpha_2}{6}D_{y,z'})$, действующим по правилу

$$\begin{gathered}\psi(h)=h,\quad \psi(x)=x,\quad \psi(x')=x',\quad \psi(y)=y,\quad \psi(y')=y'+\alpha_2 z',\\ \psi(z)=z-\alpha_2 y,\quad \psi(z')=z',\end{gathered} \tag{45}$$

можно считать что $\alpha_2=0$ и $\beta_2\neq 0$. Аналогично с точностью до сопряжения автоморфизмом $\exp\bigl(-\frac{\beta_2}{6\beta_2}D_{y',z}\bigr)$ можно считать, что $\beta_1=0$. Таким образом, с точностью до действия $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ и умножения на скаляр оператор R имеет вид

$$R(y)=h,\quad R(z)=Cx,\quad R(\mathrm{Span}(h,x,x',y',z'))=0,\quad 0\neq C\in\mathbb{C}.$$

Для того чтобы избавиться от параметра C рассмотрим скаляр $\theta\in\mathbb{C}$ такой, что $\theta^2=C$, и автоморфизм ϕ, определенный по правилу

$$\phi(h)=h,\ \phi(x)=\theta x,\ \phi(x')=\frac{1}{\theta}x',\ \phi(y)=y,\ \phi(y')=y',\ \phi(z)=\frac{1}{\theta}z,\ \phi(z')=\theta z'.$$

Тогда оператор Роты — Бакстера $R_1=\phi^{-1}\circ R\circ\phi$ удовлетворяет

$$R_1(y)=h,\quad R_1(z)=\phi^{-1}(R(\phi(z)))=\frac{1}{\theta}\phi^{-1}(Cx)=\frac{C}{\theta^2}x=x,$$

$$R_1(\mathrm{Span}(h,x,x,'y',z'))=0.$$

Случай 5.1.1.2. Пусть $\dim(\mathrm{Ker}(R)\cap\mathrm{Span}(y,z))=1$. С точностью до сопряжения автоморфизмами (44) и (45) можно считать, что $\mathrm{Ker}(R)\cap\mathrm{Span}(y,z)=\mathrm{Span}(z)$. Но тогда $[x,z]=-2y'\in\mathrm{Ker}(R)$. Последний базисный вектор будет иметь вид $t=\alpha_1x'+\alpha_3z'\in\mathrm{Ker}(R)$. С точностью до сопряжения автоморфизмом (11) у нас есть два варианта: $\mathrm{Ker}(R)=\mathrm{Span}(h,x,z,y',x')$ и $\mathrm{Ker}(R)=\mathrm{Span}(h,x,z,y',z')$.

Случай 5.1.1.2.a. Пусть $\mathrm{Ker}(R)=\mathrm{Span}(h,x,z,y',x')$. Обозначим

$$R(z')=\alpha_1h+\beta_1x,\quad R(y)=\alpha_2h+\beta_2x.$$

С одной стороны,

$$[R(z'),R(y)]=2(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)x.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}R([R(z'),y]+[z',R(y)])&=R(2\alpha_1y+2\beta_1z'+2\alpha_2z')\\&=2\alpha_1\alpha_2h+2\alpha_2\beta_2x+2\beta_1\alpha_1h+2\beta_1^2x+2\alpha_2\alpha_1h+2\alpha_2\beta_1x.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha_1(\beta_1+2\alpha_2)h+\beta_1(\beta_1+2\alpha_2)x=0.$$

Так как $R(z')\neq 0$, то $\beta_1+2\alpha_2=0$. Если $\beta_1=0$, то $\alpha_2=0$ и с точностью до умножения на скаляр и сопряжения автоморфизмом (31) получим оператор

$$R(z')=h,\quad R(y)=x,\quad R(\mathrm{Span}(h,x,x',y',z))=0.$$

Пусть $\beta_1 \neq 0$. С точностью до умножения на скаляр можно считать, что $\beta_1 = -2$. Тогда $\alpha_2 = 1$.

Если $\alpha_1 \neq 0$, то, сопрягая автоморфизмом (20) при $\theta = 1$, мы попадем в случай, когда $\beta_1 = 0$.

Если $\alpha_1 = 0$, то получается оператор

$$R(z') = -2x, \quad R(y) = h + Cx, \quad R(\mathrm{Span}(h, x, x', z, y')) = 0, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Сопрягая автоморфизмом (20) при $\theta = -\frac{C}{4}$, окончательно получаем оператор

$$R(z') = -2x, \quad R(y) = h, \quad R(\mathrm{Span}(h, x, x', z, y')) = 0.$$

Случай 5.1.1.2.b. Рассмотрим случай $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(h, x, z, y', z')$. Обозначим

$$R(x') = \alpha_1 h + \beta_1 x, \quad R(y) = \alpha_2 h + \beta_2 x.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
[R(x'), R(y)] &= 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)x \\
&= R([R(x'), y] + [x', R(y)]) = R(2\alpha_1 y + 2\beta_1 z' + 2\alpha_2 x' - \beta_2 h) \\
&\qquad = 2\alpha_1\alpha_2 h + 2\alpha_1\beta_2 x + 2\alpha_2\alpha_1 h + 2\alpha_2\beta_1 x.
\end{aligned}$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$\alpha_1\alpha_2 h + \alpha_2\beta_1 x = 0.$$

Так как $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$, последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_2 = 0$. С точностью до умножения на скаляр $R(y) = x$. Более того, сопрягая автоморфизмами (20) (для подходящего значения параметра θ) и автоморфизмом φ, определенным как

$$\varphi(h) = h, \quad \varphi(x) = \alpha_1 x, \quad \varphi(x') = \frac{1}{\alpha_1}x', \quad \varphi(y) = \alpha_1 y, \quad \varphi(y') = \frac{1}{\alpha_1}y',$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\alpha_1^2}z, \quad \varphi(z') = \alpha_1^2 z',$$

получаем оператор R, действующий как

$$R(x') = h, \quad R(y) = x, \quad R(\mathrm{Span}(h, x, y', z, z')) = 0.$$

Случай 5.1.1.3. Предположим, что $\mathrm{Ker}(R) \cap \mathrm{Span}(y, z) = 2$. Тогда $y, z \in \mathrm{Ker}(R)$. Но тогда $y', z' \in \mathrm{Ker}(R)$ и $\mathrm{Span}(h, x, y, z, y', z') \subset \mathrm{Ker}(R)$. Это противоречит тому, что $\dim(\mathrm{Ker}(R)) = 5$.

Случай 5.1.2. Предположим что $h \notin \mathrm{Ker}(R)$. В этом случае произвольный элемент $t \in \mathrm{Ker}(R)$ имеет вид $t = a + b$, где $a \in \mathrm{Span}(x, y, z)$, $b \in \mathrm{Span}(y', z')$. Так как $\dim(\mathrm{Ker}(R)) = 5$, то $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(x, y, z, y', z')$. Введем обозначения

$$R(h) = \alpha_1 h + \beta_1 x, \quad R(x') = \alpha_2 h + \beta_2 x.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
[R(h), R(x')] &= 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)x = R([R(h), x'] + [h, R(x')] \\
&= R(-2\alpha_1 x' + \beta_1 h + 2\beta_2 x) = -2\alpha_1\alpha_2 h - 2\alpha_1\beta_2 x + \beta_1\alpha_1 h + \beta_1^2 x.
\end{aligned}$$

Данное равенство эквивалентно следующему:

$$\alpha_1(\beta_1 - 2\alpha_2)h + \big(-4\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + \beta_1^2\big)x = 0.$$

Предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $\beta_1 = 2\alpha_2$. Подставляя данное выражение в коэффициент при x, получаем что $-4\alpha_1\beta_2 + 4\alpha_2\beta_1 = 0$. Но в этом случае векторы $R(h)$ и $R(x')$ линейно зависимы; противоречие.

Следовательно, $\alpha_1 = 0$. Отсюда получаем $2\alpha_2\beta_1 + \beta_1^2 = 0$. Заметим, что так как $R(h) \neq 0$, то $\beta_1 \neq 0$. Значит, $\beta_1 = -2\alpha_2 \neq 0$. С точностью до умножения на скаляр можно считать, что $\beta_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$. Таким образом,

$$R(h) = -2x, \quad R(x') = h + \beta_2 x.$$

Сопрягая автоморфизмом (20) при $\theta = -\frac{\beta_2}{2}$, получаем оператор

$$R(h) = -2x, \quad R(x') = h, \quad R(x, y, z, y', z') = 0.$$

Случай 5.2. Предположим что $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}(x, y')$. Докажем, что $x, y' \in \mathrm{Ker}(R)$.

Рассмотрим $t \in \mathrm{Ker}(R)$, $t = \alpha_1 h + \alpha_2 x + \alpha_3 x' + \alpha_4 y + \alpha_5 y' + \alpha_6 z + \alpha_7 z'$. Тогда

$$[[t, x], x] = -2\alpha_3 x, \quad [[t, y'], y'] = -2\alpha_4 y', \quad [[t, x], y'] = 2\alpha_3 y' - 2\alpha_4 x.$$

Если $x \notin \mathrm{Ker}(R)$, то из полученных равенств следует, что $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Но тогда $t \in \mathrm{Span}(h, x, y', z, z')$. Так как $\dim(\mathrm{Ker}(R)) = 5$, то $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(h, x, y', z, z')$. Противоречие с тем, что $x \notin \mathrm{Ker}(R)$. Аналогично доказывается, что $y' \in \mathrm{Ker}(R)$.

Пусть теперь $t \in \mathrm{Ker}(R)$, $t = \beta_1 h + \beta_2 x' + \beta_3 y + \beta_4 z + \beta_5 z'$. Тогда

$$[t, x] = 2\beta_1 x - \beta_2 h - 2\beta_3 z' + 2\beta_4 y' \in \mathrm{Ker}(R),$$

$$[t, y'] = -2\beta_1 y' - 2\beta_2 z + \beta_3 h + 2\beta_5 x \in \mathrm{Ker}(R).$$

Следовательно,

$$\beta_2 h + 2\beta_3 z' \in \mathrm{Ker}(R), \quad -2\beta_2 z + \beta_3 h \in \mathrm{Ker}(R). \tag{46}$$

Случай 5.2.1. Предположим, что $\beta_2 = \beta_3 = 0$ для любого $t \in \mathrm{Ker}(R)$. Тогда $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(x, y', h, z, z')$. Если обозначить $R(x') = a$, $R(y) = b$, где $a, b \in \mathrm{Span}(x, y')$, то несложно видеть, что условие $[R(x'), R(y)] = R([R(x'), y] + [x', R(y)])$ выполняется при любом выборе векторов a и b. Повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям из случая 5.1.1.1, получим, что с точностью до действия группы автоморфизмов оператор R в этом случае имеет вид

$$R(x') = y', \quad R(y) = x, \quad R(\mathrm{Span}(h, x, y', z, z')) = 0.$$

Случай 5.2.2. Предположим, что существует элемент $t \in \mathrm{Ker}(R)$, у которого пара коэффициентов $(\beta_2, \beta_3) \neq (0, 0)$. С точностью до сопряжения автоморфизмами $\exp(D_{h,z})$ и $\exp(D_{h,z'})$ можно считать, что $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 = 0$. Но тогда из (46) следует, что $h, z \in \mathrm{Ker}(R)$. Кроме того, $t' = t - \beta_1 h - \beta_4 z = \beta_2 x' + \beta_5 z' \in \mathrm{Ker}(R)$. Сопрягая автоморфизмом (11) при $\theta = -\frac{\beta_5}{\beta_2}$, получим $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(h, x, x', y', z)$.

Введем обозначения

$$R(y) = \alpha_1 x + \beta_1 y', \quad R(z') = \alpha_2 x + \beta_2 y'.$$

Рассмотрим равенство

$$0 = [R(y), R(z')] = R([R(y), z'] + [y, R(z')]) = R(-2\beta_1 x - 2\alpha_2 z' + \beta_2 h) = -2\alpha_2 R(z').$$

Так как $R(z') \neq 0$, то $\alpha_2 = 0$, и с точностью до умножения на скаляр можно считать, что $R(z') = y'$. Сопрягая автоморфизмом (20) при $\theta = \beta_1$, получаем, что $R(y) = \alpha_1 x$. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$ такой, что $\gamma^3 \alpha_1 = 1$. Сопрягая автоморфизмом ψ, определенным как

$$\psi(h) = h, \quad \psi(x) = \frac{1}{\gamma^2} x, \quad \psi(x') = \gamma^2 x', \quad \psi(y) = \gamma y, \quad \psi(y') = \frac{1}{\gamma} y',$$

$$\psi(z) = \gamma z, \quad \psi(z') = \frac{1}{\gamma} z',$$

окончательно получим оператор

$$R(y) = x, \quad R(z') = y', \quad R(\mathrm{Span}(h, x, x', y', z)) = 0.$$

Теорема 4. *Пусть* $R : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ — *оператор Роты — Бакстера веса* 0 *такой, что* $\dim(\mathrm{Im}(R)) = 2$. *Тогда с точностью до сопряжения автоморфизмами и умножения на скаляр оператор* R *имеет один из следующих видов:*

1) $R(y) = h$, $R(z) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, x', y', z')) = 0$,
2) $R(z') = h$, $R(y) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, x', y', z)) = 0$,
3) $R(z') = -2x$, $R(y) = h$, $R(\mathrm{Span}(h, x, x', z, y')) = 0$,
4) $R(x') = h$, $R(y) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, y', z, z')) = 0$,
5) $R(h) = -2x$, $R(x') = h$, $R(\mathrm{Span}(x, y, z, y', z')) = 0$,
6) $R(x') = y'$, $R(y) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, y', z, z')) = 0$,
7) $R(y) = x$, $R(z') = y'$, $R(\mathrm{Span}(h, x, x', y', z)) = 0$.

Доказательство. Операторы типа 1 и 5 — единственные операторы, у которых ядро не является подалгеброй в $\mathbb{M}$. При этом ядро оператора 5 не содержит подалгебры, изоморфной $sl_2(\mathbb{C})$.

Рассмотрим операторы типа 2–4. У них образ равен $I = \mathrm{Span}(h, x)$. При этом $\dim([I, \mathrm{Span}(h, x, y', z, z')]) = 4$, в то время как $\dim([I, \mathrm{Span}(h, x, x', y', z)]) = 5$. Следовательно, оператор 4 не может быть сопряжен оператору типа 2 или 3 с помощью автоморфизма алгебры $\mathbb{M}$.

Рассмотрим оператор R типа 3. Предположим, что существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ такой, что оператор $R_1 = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$ является оператором типа 2.

Заметим, что так как $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Ker}(R_1)$ и $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(R_1)$, то $\varphi(x) = \gamma x$, $\varphi(h) = h + \beta x$, где $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0$. Тогда $R(\varphi(y)) = \varphi(x) = \gamma x$. Следовательно, $\varphi(y) = -\frac{\gamma}{2} z' + t$, где $t \in \mathrm{Ker}(R)$. Но тогда

$$[\varphi(h), \varphi(y)] = \left[h + \beta x, -\frac{\gamma}{2} z' + t\right] = \gamma z' + t_1,$$

где $t_1 \in \mathrm{Ker}(R)$. В то же время $\varphi([h, y]) = \varphi(2y) = -\gamma z' + 2t$; противоречие.

Операторы типа 2–4 не могут быть сопряженными к операторам типа 6, 7, так как их образы являются неизоморфными алгебрами Ли.

Если R_1 и R_2 — операторы типа 6 и 7 соответственно, то $[\mathrm{Im}(R_1), \mathrm{Ker}(R_1)] = \mathrm{Span}(y', x)$, в то время как $[\mathrm{Im}(R_2), \mathrm{Ker}(R_2)] = \mathrm{Span}(x, h, y')$. Следовательно, операторы R_1 и R_2 не могут быть сопряжены автоморфизмом алгебры $\mathbb{M}$. Теорема доказана.

6. Случай $\dim(\mathrm{Im}(R)) = 1$

С точностью до сопряжение автоморфизмами можно считать, что либо $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}(h)$, либо $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}(x)$.

Случай 6.1. Предположим, что $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}(h)$. Рассмотрим $t = \alpha h + a + b \in \mathrm{Ker}(R)$, где $a \in \mathrm{Span}(x, y, z)$, $b \in \mathrm{Span}(x', y', z')$. Из условия $[h, \mathrm{Ker}(R)] \subset \mathrm{Ker}(R)$ следует, что $\alpha h, a, b \in \mathrm{Ker}(R)$.

Если $h \notin \mathrm{Ker}(R)$, то $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(x, y, z, x', y', z')$ и с точностью до умножения на скаляр можно считать, что $R(h) = h$.

Предположим, что $R(h) = 0$. Тогда $R(a) = h$ для некоторого $a \in \{x, x', y, y', z, z'\}$. С точностью до сопряжения группой автоморфизмов можно считать, что $R(x) = h$. По доказанному выше получаем

$$\mathrm{Ker}(R) = \mathbb{C}h \oplus \mathrm{Ker}(R) \cap \mathrm{Span}(x, y, z) \oplus \mathrm{Ker}(R) \cap \mathrm{Span}(x', y', z').$$

Так как $x \notin \mathrm{Ker}(R)$, то $\dim(\mathrm{Ker}(R) \cap \mathrm{Span}(x, y, z)) < 3$. Следовательно, $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(h, a, b, x', y', z')$, где $a = y + \alpha_1 x$, $b = z + \alpha_2 x$. Сопрягая автоморфизмами $\exp(\theta_1 D_{x,z'})$ (см. (11)) и $\exp(\theta_2 D_{x,z'})$ для подходящих значений параметров θ_1 и θ_2, окончательно получаем, что $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(h, x', y, y', z, z')$.

Случай 6.2. Предположим, что $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}(x)$. Рассмотрим $t = \alpha_1 h + \alpha_2 x + \alpha_3 x' + \alpha_4 y + \alpha_5 y' + \alpha_6 z + \alpha_7 z' \in \mathrm{Ker}(R)$. Тогда $[x, [x, t]] = -2\alpha_3 x$. Если $R(x) \neq 0$, то $\alpha_3 = 0$ и $\mathrm{Ker}(R) \subset \mathrm{Span}(h, x, y, y', z, z')$. А так как $\dim(\mathrm{Ker}(R)) = 6$, то $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(h, x, y, y', z, z')$; противоречие.

Предположим, что $R(h) \neq 0$. В этом случае $x' \notin \mathrm{Ker}(R)$. Следовательно, найдутся ненулевые скаляры $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ такие, что $\alpha h + \beta x' \in \mathrm{Ker}(R)$. Но тогда $[x, \alpha h + \beta x'] = -2\alpha x + \beta h \in \mathrm{Ker}(R)$. А так как $x \in \mathrm{Ker}(R)$, то $h \in \mathrm{Ker}(R)$; противоречие.

Таким образом, $R(h) = R(x) = 0$. Если в ядре $\mathrm{Ker}(R)$ не существует элемента вида $x' + \alpha_1 y + \alpha_2 y' + \alpha_3 z + \alpha_4 z'$ для $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, 4)$, то $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(h, x, y, y', z, z')$ и с точностью до умножения на скаляр $R(x') = x$.

Предположим, что $t = x' + \alpha_1 y + \alpha_2 y' + \alpha_3 z + \alpha_4 z' \in \mathrm{Ker}(R)$ для некоторых $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, 4)$. Дополним векторы h, x, t векторами q_1, q_2, q_3 до базиса $\mathrm{Ker}(R)$, где

$$q_i = \beta_i y + \gamma_i y' + \delta_i z + \mu_i z', \quad i = 1, 2, 3, \ \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \mu_i \in \mathbb{C}.$$

Если система векторов $\beta_i y + \delta_i z$ $(i = 1, 2, 3)$ имеет ранг 2, то система векторов $[x, q_i]$ $(i = 1, 2, 3)$ тоже будет иметь ранг 2. Следовательно, в $\mathrm{Ker}(R)$ будут лежать элементы y, y', z, z', x'. Противоречие, так как в этом случае $\mathrm{Ker}(R) = \mathbb{M}$.

Таким образом, можно считать, что $q_1 = \beta y + \delta z$, $q_2 = y'$, $q_3 = z'$ и $t = x' + \alpha_1 y + \alpha_3 z$. С точностью до сопряжения автоморфизмами $\exp(\theta D_{y,z'})$ и $\exp(\xi D_{y',z})$ (для подходящих $\theta, \xi \in \mathbb{C}$) можно считать, что $q_1 = y$ и $q_3 = x' + \alpha_3 z$. Окончательно, сопрягая автоморфизмом $\varphi = \exp\left(\frac{-\alpha_3}{4} D_{h,y'}\right)$, действующим как

$$\varphi(h) = h + 2\alpha_3 y', \quad \varphi(x) = x, \quad \varphi(x') = x' - \alpha_3 z, \quad \varphi(y) = y - \alpha_3 h,$$

$$\varphi(y') = y', \quad \varphi(z) = z, \quad \varphi(z') = z',$$

получаем $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Span}(h, x, x', y, y', z')$ и $R(z) = x$.

Теорема 5. *Пусть $R : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ — оператор Роты — Бакстера веса 0 такой, что $\dim(\mathrm{Im}(R)) = 1$. Тогда с точностью до сопряжения автоморфизмами и умножения на скаляр оператор R имеет один из следующих видов:*

1) $R(h) = h$, $R(\mathrm{Span}(x, y, z, x', y', z')) = 0$,
2) $R(x) = h$, $R(\mathrm{Span}(h, x', y, y', z, z')) = 0$,
3) $R(x') = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, y, y', z, z')) = 0$,
4) $R(z) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, x', y, y', z')) = 0$.

При этом операторы типа 1–4 не сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$.

Доказательство. Осталось показать, что операторы 1–4 не сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$. Оператор R_1 типа 1 является единственным оператором, у которого $[\mathrm{Im}(R_1), \mathrm{Ker}(R_1)] = \mathrm{Ker}(R_1)$. Для оператора R_2 типа 2 справедливо $\dim([\mathrm{Im}(R_2), \mathrm{Ker}(R_2)]) = 5$. Для оператора R_3 имеем

$$\dim([\mathrm{Im}(R_3), \mathrm{Ker}(R_3)]) = 3.$$

Для оператора R_4 типа 4 будет

$$\dim([\mathrm{Im}(R_4), \mathrm{Ker}(R_4)]) = 4.$$

Следовательно, эти операторы не могут быть сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$. Теорема доказана.

7. Основная теорема

Из теорем 1–5 следует основной результат данной работы.

Теорема 6. *Пусть $R : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ — ненулевой оператор Роты — Бакстера веса 0. Тогда с точностью до сопряжения автоморфизмами и умножения на скаляр оператор R имеет один из следующих видов:*

1) $R(h) = x$, $R(x') = Cx - \frac{1}{2}h$, $R(y) = -z$, $R(z') = y'$, $R(\mathrm{Span}(x, y', z)) = 0$, $C \in \mathbb{C}$,
2) $R(h) = y'$, $R(y) = Cy' - \frac{1}{2}h$, $R(x') = -z$, $R(z') = x$, $R(\mathrm{Span}(x, y', z)) = 0$, $C \in \mathbb{C}$,
3) $R(x') = z'$, $R(y) = Cx$, $R(z) = h$, $R(\mathrm{Span}(h, x, z', y')) = 0$, $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
4) $R(x') = z'$, $R(y) = h$, $R(z) = Cx$, $R(\mathrm{Span}(h, x, z', y')) = 0$, $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
5) $R(x') = h + Cz'$, $R(y) = -2z'$, $R(z) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, z', y')) = 0$, $C \in \mathbb{C}$,
6) $R(h) = h$, $R(x') = z$, $R(z) = -x$, $R(\mathrm{Span}(x, z', y, y')) = 0$,
7) $R(x') = x$, $R(y') = z'$, $R(z) = C_1x - y + C_2z'$, $R(\mathrm{Span}(h, x, y, z')) = 0$, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$,
8) $R(y) = h$, $R(z) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, x', y', z')) = 0$,
9) $R(z') = h$, $R(y) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, x', y', z)) = 0$,
10) $R(z') = -2x$, $R(y) = h$, $R(\mathrm{Span}(h, x, x', z, y')) = 0$,
11) $R(x') = h$, $R(y) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, y', z, z')) = 0$,
12) $R(h) = -2x$, $R(x') = h$, $R(\mathrm{Span}(x, y, z, y', z')) = 0$,
13) $R(x') = y'$, $R(y) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, y', z, z')) = 0$,
14) $R(y) = x$, $R(z') = y'$, $R(\mathrm{Span}(h, x, x', y', z)) = 0$,
15) $R(h) = h$, $R(\mathrm{Span}(x, y, z, x', y', z')) = 0$,
16) $R(x) = h$, $R(\mathrm{Span}(h, x', y, y', z, z')) = 0$,
17) $R(x') = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, y, y', z, z')) = 0$,
18) $R(z) = x$, $R(\mathrm{Span}(h, x, x', y, y', z')) = 0$.

При этом операторы типа 1–18 не сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$. Кроме того, операторы типов 1–5 при различных значениях параметра C

также не сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$. Операторы типа 7, отвечающие скалярам C_1 и C_2, сопряжены автоморфизмами алгебры $\mathbb{M}$ тогда и только тогда, когда $C_1 = \pm C_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baxter G.* An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity // Pacific J. Math. 1960. V. 10. P. 731–742.
2. *Rota G.-C.* Baxter algebras and combinatorial identities. I // Bull. Am. Math. Soc. 1969. V. 75. P. 325–329.
3. *Семенов-Тян-Шанский М. А.* Что такое классическая r-матрица // Функцион. анализ и его прил. 1983. Т. 17, № 4. С. 17–33.
4. *Guo L.* An introduction to Rota–Baxter algebra. Somerville, Massachusetts: International Press, 2012. (Surveys of Modern Mathematics; V. 4).
5. *Kolesnikov P. S.* Homogeneous averaging operators on simple finite conformal Lie algebras // J. Math. Phys. 2015. V. 56. 071702.
6. *Pei J., Bai C., Guo L.* Rota–Baxter operators on $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ and solutions of the classical Yang–Baxter equation // J. Math. Phys. 2014. V. 55. 021701.
7. *Benito P., Gubarev V., Pozhidaev A.* Rota–Baxter operators on quadratic algebras // Mediterr. J. Math. 2018. V. 15. P. 189.
8. *Tang X., Zhang Y., Sun Q.* Rota–Baxter operators on 4-dimensional complex simple associative algebras // Appl. Math. Comp. 2014. V. 229. P. 173–186.
9. *Sokolov V. V.* Classification of constant solutions of the associative Yang–Baxter equation on Mat_3 // Theor. Math. Phys. 2013. V. 176, N 3. P. 1156–1162.
10. *Goncharov M., Gubarev V.* Rota–Baxter operators of nonzero weight on the matrix algebra of order three // Linear and Multilinear Algebra. 2020. V. 70, N 6. P. 1055–1080.
11. *Gubarev V.* Rota–Baxter operators of weight zero on upper-triangular matrices of order three // Mediterr. J. Math. 2024. V. 21, N 7. P. 200.
12. *Bardakov V. G., Nikonov I. M., Zhelaybin V. N.* Lie Rota–Baxter operators on the Sweedler algebra H_4 // Intern. J. Algebra Comput. 2024. V. 34, N 8. P. 1159–1189.
13. *Болотина Т. А., Губарев В. Ю.* Операторы Роты — Бакстера на простой йордановой супералгебре D_t // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 768–782.
14. *Мальцев А. И.* Аналитические лупы // Мат. сб. 1955. Т. 3. С. 569–575.
15. *Кузьмин Е. Н., Шестаков И. П.* Неассоциативные структуры // Алгебра-6. М.: ВИНИТИ, 1990. (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 57).
16. *Sagle A. A.* Simple Malcev algebras over felds of characteristic zero // Pacific J. Math. 1962. V. 12, N 3. P. 1057–1078.
17. *Кузьмин Е. Н.* Структура и представления конечномерных алгебр Мальцева // Исследования по теории колец и алгебр. Новосибирск: Наука, 1989. С. 75–101. (Тр. Ин-та математики СО АН СССР; Т. 16)
18. *Fulton W., Harris J.* Representation theory: a first course. New York: Springer-Verl., 1991.
19. *Stitzinger E.* On nilpotent and solvable Malcev algebras // Proc. Am. Math. Soc. 1984. V. 92. P. 157–163.
20. *Elduque A.* On maximal subalgebras of central simple Malcev algebras // J. Algebra. 1986. V. 103. P. 216–227.
21. *Goncharov M. E.* Structures of Malcev bialgebras on a simple son-Lie Malcev algebra // Commun. Algebra. 2012. V. 40, N 8. P. 3071–3094.

Поступила в редакцию 9 августа 2025 г.
После доработки 26 августа 2025 г.
Принята к публикации 3 сентября 2025 г.

Гончаров Максим Евгеньевич (ORCID 0000-0002-0893-8541)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
goncharov.gme@gmail.com