Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 517.926

СЛЕД МАТРИЦЫ МОНОДРОМИИ ИРРЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А. А. Голубков

Аннотация. Формула для следа матрицы монодромии особой точки линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка типа полюса или алгебраической точки разветвления получена в виде абсолютно сходящегося ряда. В качестве примера общая формула конкретизирована для системы уравнений специального вида.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.104

Ключевые слова: метод Лаппо-Данилевского, иррегулярные особые точки, матрицы монодромии, циклические матрицы, интегральные подстановки.

1. Введение и основные результаты

Рассмотрим систему N линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для строки u:

$$\frac{du}{dz} = uH(z), \tag{1}$$

в окрестности полюса или алгебраической точки разветвления $z_s = 0$ матрицы $H(z)$, голоморфной в области $\Omega_z := \{z,\ 0 < |z| < R_0\}$. В этом случае матричную функцию $H(z)$ можно представить в виде абсолютно сходящегося в Ω_z ряда

$$H(z) = \sum_{p=-\epsilon}^{\infty} F_p z^{p/K} \quad (z \in \Omega_z,\ K \in \mathbf{N}). \tag{2}$$

Здесь F_p — постоянные матрицы порядка N, а $K-1$ — порядок точки разветвления. В частности, при $K = 1$ все элементы матрицы H являются однозначными функциями $z \in \Omega_z$. Заметим, что в настоящей работе нуль не считается натуральным числом.

Пусть спрямляемая кривая $\gamma \subset \Omega_z$ с началом и концом в точке h обходит K раз точку $z_s = 0$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Тогда в силу формулы (2) аналитическое продолжение матричной функции $H(z)$ вдоль кривой γ совпадает с исходной матричной функцией в окрестности точки h (процедура аналитического продолжения вдоль кривой описана, например, в [1, гл. 8, § 15]). Обозначим через $U_0(h|z)$ фундаментальную матрицу пространства голоморфных решений системы (1) в окрестности точки h, а через $U_1(h|z)$ — аналитическое продолжение U_0 вдоль кривой γ. По построению кривой γ матрицы U_0 и U_1 в окрестности точки h являются фундаментальными для одной и той же системы уравнений (1). Поэтому существует постоянная невырожденная *матрица монодромии* M *особой точки* z_s такая, что

$$U_1(h|z) = M(U_0)U_0(h|z). \tag{3}$$

Матрицы монодромии часто называют также циклическими матрицами [2] или интегральными подстановками [3–5].

В силу аналитичности матричной функции $H(z)$ в области Ω_z матрица монодромии точки z_s не зависит от формы кривой $\gamma \subset \Omega_z$, но зависит от выбора фундаментальной матрицы U_0. Действительно, рассмотрим аналитическое продолжение вдоль кривой γ фундаментальной матрицы $\widetilde{U}_0 := TU_0$, где T — произвольная постоянная невырожденная матрица. Тогда получим, что

$$\widetilde{U}_1(h|z) = TU_1(h|z) = TM(U_0)U_0(h|z) = TM(U_0)T^{-1}\widetilde{U}_0(h|z) = M(\widetilde{U}_0)\widetilde{U}_0(h|z),$$

где $M(\widetilde{U}_0) = TM(U_0)T^{-1}$. К аналогичному результату приводит также сдвиг начальной и конечной точки h замкнутой кривой γ, а для многозначной матричной функции H и изменение выбора ее «начальной» ветви, соответствующее изменению выбора значения величины $h^{1/K}$.

Таким образом, все матрицы монодромии точки z_s системы (1) с матричной функцией (2) подобны друг другу и, следовательно, имеют одинаковые след m_0 и определитель D [5]. Последний, как следует из формулы Лиувилля [6, часть 1, § 9] и соотношений (2), (3), может быть записан в виде

$$D = \exp\left\{\int\limits_\gamma \mathrm{Tr}(H(z))\,dz\right\} = \exp\{2\pi i K\,\mathrm{Tr}(F_{-K})\}$$

и заведомо отличен от нуля. Здесь и далее i — мнимая единица.

Сделав в системе уравнений (1) замену

$$z = x^K, \quad u(z) = y(x), \tag{4}$$

получим систему N линейных ОДУ для строки y:

$$\frac{dy}{dx} = yA(x), \tag{5}$$

где

$$A(x) = \sum_{p=-\tau}^{\infty} T_p x^p \quad (x \in \Omega). \tag{6}$$

В (6) ряд абсолютно сходится в области $\Omega := \{x, 0 < |x| < R\}$, $R = R_0^{1/K}$, $\tau = \epsilon + 1 - K$ и $T_p = KF_{p+1-K}$.

Таким образом, исследование системы (1) в окрестности алгебраической точки разветвления порядка $K - 1 \geq 1$ сводится к изучению системы (5) с однозначными коэффициентами в окрестности ее регулярной точки (при $\tau \leq 0$) или полюса (при $\tau \geq 1$). При этом если фундаментальная матрица $Y_0(b|x)$ решений системы (5) в окрестности точки b связана с фундаментальной матрицей $U_0(h|z)$ решений системы (1) в окрестности точки $h = b^K$ соотношением $Y_0(b|b) = U_0(h|h)$, то в силу вида замены (4) матрицы монодромии систем (1) и (5) соответствующие этим фундаментальным матрицам, будут совпадать. Значит, для этих систем следы любых матриц монодромии точек $z_s = 0$ и $x_s = 0$ также совпадают.

Большинство существующих методов решения систем линейных ОДУ [2–10] позволяют находить решения в виде сходящихся рядов только в окрестности регулярной особой точки, т. е. при $\tau = 1$ в разложении (6). Вероятно, единственным исключением является метод, предложенный И. А. Лаппо-Данилевским [3, 4]. Он приводит к формуле для фундаментальной матрицы $Y(b|x)$ голоморфных решений системы (5) с начальными условиями

$$Y(b|b) = I_N \quad (b \in \Omega), \tag{7}$$

где I_N — единичная матрица порядка N, в виде абсолютно сходящегося ряда

$$Y(b|x) = I_N + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1,\dots,p_\nu=-\tau}^{\infty} T_{p_1}\dots T_{p_\nu} L_{p_1,\dots,p_\nu}(b|x) \quad (x, b \in \Omega). \tag{8}$$

При этом существенно, что в матричном ряде (8) скалярные функции

$$L_{p_1,\dots,p_\nu}(b|x) := \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1+\dots+p_\mu+\mu} x^{p_{\mu+1}+\dots+p_\nu+\nu-\mu} \times \sum_{\lambda=0}^{\mu} \widetilde{\alpha}^{(\lambda)}_{p_1,\dots,p_\mu} \lg^\lambda b \sum_{\kappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\kappa)}_{p_{\mu+1},\dots,p_\nu} \lg^\kappa x \tag{9}$$

не зависят от элементов матриц T_p и числа уравнений N. Числовые коэффициенты $\alpha_{p_1,\dots,p_\mu}$ и $\widetilde{\alpha}_{p_1,\dots,p_\mu}$ в (9) определяются рекуррентными соотношениями [3, 4], вид которых на каждом шаге зависит от значения величины

$$S_j := j + \sum_{l=1}^{j} p_l \quad (j \geq 1). \tag{10}$$

Напомним также, что решения (5) дают строки матрицы Y, а не столбцы, как во многих работах, посвященных изучению систем линейных ОДУ.

Абсолютная сходимость ряда (8) открывает широкие возможности по исследованию асимптотик решений системы (5) вдоль произвольных кривых в окрестности особой точки, включая зависимость этих решений от параметра, входящего в коэффициенты T_p разложения (6). В этом отношении в окрестности иррегулярной особой точки предложенный И. А. Лаппо-Данилевским метод решения систем линейных ОДУ имеет существенное преимущество по сравнению с другими известными методами [2, 5–10]. Последние, как правило, приводят к асимптотическим (расходящимся) рядам, причем часто разным в разных секторах комплексной плоскости переменной x и (или) параметра, входящего в коэффициенты уравнений. И хотя в последние годы использование ресургентного анализа [11] позволило находить равномерные асимптотики решений, не требующие деления плоскости переменной на сектора (см., например, работы [10, 12, 13] и библиографические ссылки в них), остальные недостатки асимптотичности получаемых решений при этом сохраняются. В частности, эти решения не позволяют находить след матрицы монодромии иррегулярной особой точки, который, как указывалось выше, не зависит от выбора начальной точки h замкнутой кривой γ.

Однако в литературе идеи работ И. А. Лаппо-Данилевского, несмотря на предоставляемые ими потенциальные преимущества абсолютной сходимости получающихся рядов, редко используются [14–18] или хотя бы частично излагаются [5, 7]. Скорее всего, это связано с двумя важными обстоятельствами, которые значительно усложняют применение многих результатов работ [3, 4]. Во-первых, они, как правило, получены в «алгорифмической» форме — искомая величина выражается рядом, числовые коэффициенты которого вычисляются последовательно. При этом использование некоторых формул дополнительно осложняется тем, что соответствующие рекуррентные соотношения достаточно сложно «ветвятся». Во-вторых, и это, вероятно, главное, ряды в (8) и (9) содержат в общей сложности пять последовательных суммирований. Причем при каждом фиксированном ν сумма по композициям матриц T_p в формуле (8) может содержать до N_0^{ν} слагаемых, где N_0 — число отличных от нуля матриц T_p в разложении (6) матричной функции $A(x)$. Первая сложность была устранена в работе [18], в которой были получены явные формулы для коэффициентов α и $\widetilde{\alpha}$.

В настоящей работе произведена группировка членов ряда (8), существенно упрощающая его дальнейший анализ. Это позволило найти след матрицы монодромии полюса любого порядка системы уравнений (5) в виде абсолютно сходящегося ряда (13). Члены этого ряда определяются собственными значениями матрицы T_{-1} и тех композиций $T_{p_1}T_{p_2}\dots T_{p_k}$ $(k \ge 2)$ матриц коэффициентов T_p из разложения (6), для которых определенная формулой (10) величина S_k равна нулю. До настоящего времени аналогичная формула была известна только для полюса первого порядка (см., например, [5, гл. 15, § 10] или [18, п. 5]). Заметим, что след матрицы монодромии, в частности, играет важную роль при исследовании характеристик роста элементов регулярной циклической матрицы особой точки уравнения Штурма — Лиувилля как целой функции спектрального параметра [19], вида его решений в окрестности симметричной особой точки [20], а также при изучении класса его квазибезмонодромных потенциалов [21].

В заключительном разделе статьи в качестве примера общая формула (13) для следа матрицы монодромии конкретизирована для системы уравнений (5) с матричной функцией $A(x)$ специального вида (43) с двумя нильпотентными матрицами коэффициентов с индексом два.

Определение 1. Последовательность чисел $j_1, \dots, j_k$ будем называть *периодической с периодом* k_1, если существуют такие натуральные числа $n \ge 2$ и $k_1 \ge 1$, что $k = nk_1$ и $j_l = j_{l-k_1}$ для любых $l = \overline{k_1+1, k}$.

Лемма 1. *Пусть в системе уравнений* (5) *матрица* $A(x)$ *представима в виде ряда* (6), *абсолютно сходящегося в области* $\Omega := \{x, 0 < |x| < R\}$. *Тогда ряд* (8), *абсолютно сходящийся при* $x, b \in \Omega$ [3, 4], *можно записать в виде*

$$Y(b|x) = I_N + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p_1,\dots,p_k=-\tau}^{\infty,*} W_{p_1,\dots,p_k}(T_{p_1}T_{p_2}\dots T_{p_k}; x, b), \tag{11}$$

где

$$W_{p_1,\dots,p_k}(q; x, b) := \sum_{n=1}^{\infty} q^n L_{p_1,\dots,p_{nk}}(b|x) \quad (p_j = p_{j-k},\ \text{если } j > k). \tag{12}$$

В формуле (11) *знак* $*$ *над суммой означает, что суммирование ведется только по непериодическим последовательностям индексов* $p_1, \dots, p_k$. *Все скалярные функции* $W_{p_1,\dots,p_k}(q; x, b)$ *являются целыми по переменной* q *и голоморфными по переменным* b *и* x *при любых их конечных и отличных от нуля значениях.*

Лемма 1 доказана в разд. 2 настоящей статьи. Главное преимущество описанной в ней группировки ряда (8) состоит в том, что, как показано в разд. 4, определенные в (12) функции $W_{p_1,\dots,p_k}(q; x, b)$ могут быть найдены с помощью относительно легко решаемых вспомогательных систем вида (5) с матрицами $T_{p_j}^{(k)}$ $(j = \overline{1,k})$ в разложении (6), имеющими порядок k и специальный вид.

Определение 2. Две последовательности k чисел будем называть *существенно различными*, если они не получаются друг из друга с помощью любого числа циклических перестановок.

Основной результат настоящей работы сформулирован в следующей теореме, которая доказана в разд. 5 с использованием полученных в разд. 4 свойств функций $W_{p_1,\dots,p_k}(q;x,b)$.

Теорема 1. *Для следа m_0 матрицы монодромии особой точки $x_s = 0$ системы N уравнений первого порядка (5) с матричной функцией $A(x)$, представимой в виде ряда (6), справедлива формула*

$$m_0 = \mathrm{Tr}\{\exp(2\pi i T_{-1})\} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p_1,\dots,p_k=-\tau,\, S_k=0}^{\infty,**} M_{p_1,\dots,p_k}. \tag{13}$$

Знак $**$ над суммой означает, что суммирование ведется только по существенно различным непериодическим последовательностям индексов $p_1,\dots,p_k$ $(k \ge 2)$, для которых хотя бы одно собственное значение матрицы $T_{p_1}T_{p_2}\dots T_{p_k}$ отлично от нуля. При этом

$$M_{p_1,\dots,p_k} = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{j=1}^{k} \Bigl\{\exp\bigl(2\pi i \lambda_{p_1,\dots,p_k}^{(j,\nu)}\bigr) - 1\Bigr\} \quad (k \ge 2).$$

Здесь $\lambda_{p_1,\dots,p_k}^{(j,\nu)}$ $(j = \overline{1,k})$ — корни уравнения

$$(\lambda + S_1)(\lambda + S_2)\dots(\lambda + S_{k-1})\lambda = q_{p_1,\dots,p_k}^{(\nu)}, \tag{14}$$

величины S_l определены в (10), $q_{p_1,\dots,p_k}^{(\nu)}$ $(\nu = \overline{1,N})$ — собственные значения матрицы $T_{p_1}\dots T_{p_k}$, каждое из которых берется столько раз, какова его кратность. Это же относится и к корням уравнения (14).

Ряд в формуле (13) абсолютно сходится при всех конечных значениях матриц T_p из разложения (6).

Заметим, что при $\tau = 1$ второе слагаемое (сумма) в соотношении (13) обращается в нуль и из него следует известная формула для следа матрицы монодромии регулярной особой точки (см., например, [5, гл. 15, § 10] или [18, п. 5]).

2. Доказательство леммы 1

Прежде всего заметим, что скалярные коэффициенты L при любых одинаковых композициях матриц T_p в рядах (8) и (11) совпадают и любое слагаемое вида

$$(T_{p_1}T_{p_2}\dots T_{p_\nu})^n L_{p_1,\dots,p_{n\nu}}(b|x) \quad (\nu, n \in \mathbf{N},\ p_j = p_{j-\nu},\ \text{если } j > \nu)$$

из ряда (11) входит в ряд (8), причем ровно один раз. Обратное также справедливо: по условию леммы, если последовательность индексов $p_1,\dots,p_\nu$ не является периодической, то композиция $T_{p_1}\dots T_{p_\nu}$ из ряда (8) входит в ряд (11) через функцию $W_{p_1,\dots,p_k}$ только при $k = \nu$ и $n = 1$. Если же композиция $T_{p_1}\dots T_{p_\nu}$ представима в виде $(T_{p_1}\dots T_{p_r})^m$, где последовательность индексов $p_1,\dots,p_r$ не является периодической, то только при $k = r$ и $n = m$.

Таким образом, ряд (11) получается из ряда (8) перестановкой членов и, следовательно, по теореме Коши о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда [22, гл. 1, § 3] эти два ряда являются абсолютно сходящимися одновременно, т. е. при $0 < |x|, |b| < R$ [3, 4], и при этом их суммы совпадают.

Далее, для любого набора индексов $p_1, \dots, p_k$ определенная соотношением (12) функция $W_{p_1,\dots,p_k}(q; x, b)$ является скалярным коэффициентом, произведение которого на единичную матрицу равно частичной сумме ряда вида (8), соответствующего случаю, когда в разложении (6) отличны от нуля только матрицы $T_{p_1}, \dots, T_{p_k}$, которые при этом пропорциональны единичным матрицам. Но в этом случае радиус R сходимости ряда в (6) (и, значит, ряда (8)) равен бесконечности. Поэтому функция $W_{p_1,\dots,p_k}(q; x, b)$ является целой по переменной q и голоморфной по переменным b и x при $0 < |b|, |x| < \infty$. Лемма 1 доказана.

3. Вспомогательные утверждения

Для удобства дальнейшего изложения введем функцию $\theta(j, r, k)$ сдвига целого числа $j = \overline{1, k}$ на целое число r с переходом к 1 при достижении $k+1$, если $r > 0$, и с переходом к k при достижении нуля, если $r < 0$:

$$\theta(j, nk+d, k) := \begin{cases} j+d \text{ при } j = \overline{1, k-d} & (d = \overline{0, k-1}), \\ j+d-k \text{ при } j = \overline{k-d+1, k} & (d = \overline{1, k-1}) \end{cases} \quad (n \in \mathbf{Z}). \quad (15)$$

Функция θ, очевидно, принимает значения от 1 до k, и

$$\theta(\theta(j, r_1, k), r_2, k) = \theta(j, r_1 + r_2, k), \quad (16)$$

так как сдвиг вначале на r_1, а потом еще на r_2, эквивалентен сдвигу на $r_1 + r_2$.

Лемма 2. *Пусть $J(n) := \theta(j, n, k)$ $(n \in \mathbf{Z})$, $k \geq 2$ и для последовательности чисел $p_1, \dots, p_k$ существуют числа $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $\omega \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ такие, что $p_{J(\lambda)} = p_{J(\lambda+\omega)}$ для любых $\lambda = \overline{0, k-1}$. Тогда набор чисел $p_1, \dots, p_k$ является периодическим с периодом k_1, равным наибольшему общему делителю чисел k и ω.*

Доказательство. В силу формулы (16) $J(\lambda + \omega) = L(\omega)$, где $L(\omega) := \theta(l, \omega, k)$, $l := J(\lambda)$. При этом если λ пробегает все значения от 0 до $k-1$, то l при любом фиксированном j принимает все значения от 1 до k. Поэтому условие леммы можно записать в виде $p_l = p_{L(\pm\omega)}$ для любого $l = \overline{1, k}$. Применяя n раз последнюю формулу и соотношение (16), получим, что $p_l = p_{L(n\omega)}$ для любого $n \in \mathbf{Z}$. Пусть k_1 — наибольший общий делитель чисел k и ω, т. е. $k = N_k k_1$, $\omega = N_\omega k_1$, где N_k и N_ω — взаимно простые числа. Тогда диофантово уравнение $nN_\omega = 1 + mN_k$ имеет бесконечно много решений [23]. Домножая его на k_1, получим, что $n\omega = k_1 + mk$ при некоторых целых n и m. Итак, $k = N_k k_1$ и при некоторых $n \in \mathbf{Z}$ будет $p_l = p_{L(n\omega)} = p_{L(k_1)}$ для любого $l = \overline{1, k}$. Это доказывает лемму.

В настоящей работе, как и в работах [3, 4], используется обычная нумерация элементов матриц: первый индекс указывает номер строки, а второй — номер столбца. Введем вспомогательные матрицы $B_j^{(k)}$ $(j = \overline{1, k})$ порядка k, каждая из которых имеет единственный ненулевой элемент, расположенный в строке с номером j, столбце с номером $J(1) := \theta(j, 1, k)$ и равный единице:

$$\left(B_j^{(k)}\right)_{il} := \delta_{ij}\delta_{lJ(1)} \quad (j, i, l = \overline{1, k}). \quad (17)$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, т. е. $\delta_{\alpha\beta} = 1$, если $\alpha = \beta$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$.

Лемма 3. *Элементы произведения* $r+1$ $(r \geq 0)$ *вспомогательных матриц* (17) *удовлетворяют соотношениям*

$$\bigl(B_j^{(k)} B_{j_1}^{(k)} \dots B_{j_r}^{(k)}\bigr)_{il} = \delta_{ij}\delta_{lJ(r+1)} \prod_{\mu=0}^{r} \delta_{j_\mu J(\mu)}, \tag{18}$$

где $j, j_1, \dots, j_r = \overline{1,k}$; $J(\mu) := \theta(j,\mu,k)$; $j_0 := j$, *а функция* θ *определена формулой* (15).

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $r = 0$ лемма справедлива в силу формулы (17). Предположим, что лемма выполняется при некотором $r \geq 0$. Тогда, пользуясь соотношениями (17), (18) и подразумевая суммирование по повторяющимся индексам ξ, для элементов произведения $r+2$ матриц вида (17) получим

$$\bigl(B_j^{(k)} B_{j_1}^{(k)} \dots B_{j_r}^{(k)} B_{j_{r+1}}^{(k)}\bigr)_{il} = \delta_{ij}\delta_{\xi J(r+1)}\delta_{\xi j_{r+1}}\delta_{lJ_{r+1}(1)} \prod_{\mu=0}^{r} \delta_{j_\mu J(\mu)}$$

$$= \delta_{ij}\delta_{j_{r+1}J(r+1)}\delta_{lJ_{r+1}(1)} \prod_{\mu=0}^{r} \delta_{j_\mu J(\mu)} = \delta_{ij}\delta_{lJ(r+2)} \prod_{\mu=0}^{r+1} \delta_{j_\mu J(\mu)},$$

где $J_{r+1}(1) = \theta(j_{r+1},1,k)$ и учтено, что $\theta(J(r+1),1,k) = J(r+2)$ в силу (16). Полученное равенство доказывает лемму.

4. Функции $W_{p_1,\dots,p_k}(q;x,b)$

Функцию $W_p(q;x,b)$, $p \in \mathbf{Z}$, можно найти с помощью явных формул для коэффициентов α и $\widetilde{\alpha}$, полученных в работе [18]. Однако для иллюстрации общего метода сделаем это иначе.

Для скалярной функции Y_p рассмотрим вспомогательную задачу вида (5), (7) при $N=1$ и с единственным ненулевым скалярным коэффициентом $T_p^{(1)} = q$ в разложении (6):

$$\frac{dY_p}{dx} = Y_p q x^p, \quad Y_p(b|b) = 1.$$

Решение этой задачи выписывается сразу:

$$Y_p(b|x) = \exp(\sigma q), \tag{19}$$

где $\sigma = (x^{1+p} - b^{1+p})/(1+p)$ при $p \neq -1$ и $\sigma = \ln(x/b)$ при $p = -1$.

С другой стороны, в рассматриваемом случае ряд (8) принимает вид

$$Y_p(b|x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n L_{p_1,\dots,p_n}(b|x) \quad (p_j = p,\ j \in \mathbf{N}).$$

Сравнивая последнюю формулу с определением (12) при $k=1$, имеем

$$Y_p(b|x) \equiv 1 + W_p(q;x,b). \tag{20}$$

Перейдем к получению формулы для $W_{p_1,\dots,p_k}(q;x,b)$ при $k \geq 2$, обобщая подход, использованный при $k=1$.

Пусть среди индексов $p_1,\dots,p_k$ имеется ровно $m \leq k$ различных $\mu_1,\dots,\mu_m$. Рассмотрим вспомогательную задачу вида (5)–(7) для системы k уравнений первого порядка

$$\frac{dY_{p_1,\dots,p_k}}{dx} = Y_{p_1,\dots,p_k} \sum_{j=1}^{m} T_{\mu_j}^{(k)} x^{\mu_j}, \qquad Y_{p_1,\dots,p_k}(b|b) = I_k, \tag{21}$$

где

$$T_{\mu_j}^{(k)} = \sum_{l=1}^{k} \delta_{\mu_j p_l} a_l B_l^{(k)}, \quad a_l \neq 0 \ (l = \overline{1,k},\ j = \overline{1,m}). \tag{22}$$

В силу формул (17), (22) каждая из матриц $\{T_{\mu_j}^{(k)}\}_{j=1}^{m}$ имеет столько ненулевых элементов, сколько раз ее нижний индекс μ_j встречается в наборе индексов $p_1, \ldots, p_k$ функции $W_{p_1,\ldots,p_k}$. Заметим, что вид матриц $T_{\mu_1}^{(k)}, \ldots, T_{\mu_m}^{(k)}$ однозначно определяет две последовательности чисел $\{p_l\}_1^k$ и $\{a_l\}_1^k$, и наоборот.

Лемма 4. *Произведение $r+1$ $(r \geq 0)$ матриц вида (22) можно представить в виде*

$$T_{\mu_{j^{(0)}}}^{(k)} T_{\mu_{j^{(1)}}}^{(k)} \ldots T_{\mu_{j^{(r)}}}^{(k)} = \sum_{l=1}^{k} \prod_{\lambda=0}^{r} \delta_{\mu_{j^{(\lambda)}} p_{L(\lambda)}} a_{L(\lambda)} B_{L(\lambda)}^{(k)}. \tag{23}$$

Здесь $j^{(0)}, \ldots, j^{(r)} = \overline{1,m}$, $L(\lambda) := \theta(l, \lambda, k)$, а функция θ определена в (15).

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $r = 0$ лемма выполняется в силу соотношения (22). Предположим, что она справедлива при некотором $r \geq 0$. Тогда, пользуясь формулами (22) и (23), для произведения $r+2$ матриц вида (22) получим

$$\begin{aligned} T_{\mu_{j^{(0)}}}^{(k)} T_{\mu_{j^{(1)}}}^{(k)} \ldots T_{\mu_{j^{(r)}}}^{(k)} T_{\mu_{j^{(r+1)}}}^{(k)} &= \left(\sum_{l=1}^{k} \prod_{\lambda=0}^{r} \delta_{\mu_{j^{(\lambda)}} p_{L(\lambda)}} a_{L(\lambda)} B_{L(\lambda)}^{(k)} \right) \sum_{\chi=1}^{k} \delta_{\mu_{j^{(r+1)}} p_\chi} a_\chi B_\chi^{(k)} \\ &= \sum_{l=1}^{k} \left(\prod_{\lambda=0}^{r} \delta_{\mu_{j^{(\lambda)}} p_{L(\lambda)}} a_{L(\lambda)} B_{L(\lambda)}^{(k)} \right) \delta_{\mu_{j^{(r+1)}} p_{L(r+1)}} a_{L(r+1)} B_{L(r+1)}^{(k)} \\ &= \sum_{l=1}^{k} \prod_{\lambda=0}^{r+1} \delta_{\mu_{j^{(\lambda)}} p_{L(\lambda)}} a_{L(\lambda)} B_{L(\lambda)}^{(k)}, \end{aligned}$$

где при переходе к третьей строке учтено, что в силу леммы 3 и формулы (16) произведение матриц $B_{L(r)}^{(k)} B_\chi^{(k)}$ отлично от нуля, только если $\chi = L(r+1)$. Полученное равенство доказывает лемму.

Следствие 1. *Элементы произведения $r+1$ $(r \geq 0)$ матриц вида (22) удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\big(T_{\mu_{j^{(0)}}}^{(k)} T_{\mu_{j^{(1)}}}^{(k)} \ldots T_{\mu_{j^{(r)}}}^{(k)}\big)_{j\varepsilon} = \delta_{\varepsilon J(r+1)} \prod_{\lambda=0}^{r} \delta_{\mu_{j^{(\lambda)}} p_{J(\lambda)}} a_{J(\lambda)}. \tag{24}$$

Здесь $j^{(0)}, j^{(1)}, \ldots, j^{(r)} = \overline{1,m}$, $J(\lambda) := \theta(j, \lambda, k)$, а функция θ определена в (15).

Доказательство. Утверждение следствия получим, переписав формулу (23) в виде

$$\big(T_{\mu_{j^{(0)}}}^{(k)} T_{\mu_{j^{(1)}}}^{(k)} \ldots T_{\mu_{j^{(r)}}}^{(k)}\big)_{j\varepsilon} = \sum_{l=1}^{k} \big(B_l^{(k)} B_{L(1)}^{(k)} \ldots B_{L(r)}^{(k)}\big)_{j\varepsilon} \prod_{\lambda=0}^{r} \delta_{\mu_{j^{(\lambda)}} p_{L(\lambda)}} a_{L(\lambda)}$$

и воспользовавшись формулой (18).

Лемма 5. *Произведение $r+1$ ($r \geq 0$) матриц типа (22) имеет ненулевые диагональные элементы, если и только если имеет вид*

$$T_k^{(j,n)} := \big(T^{(k)}_{p_{J(0)}} \ldots T^{(k)}_{p_{J(k-1)}}\big)^n \quad (j = \overline{1,k},\ J(\mu) := \theta(j,\mu,k),\ \mu \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}),$$

где функция θ задана в (15).

При этом если последовательность $p_1, \ldots, p_k$ не является периодической, то $\big(T_k^{(j,n)}\big)_{il} = q^n \delta_{ij}\delta_{lj}$, где $q = \prod\limits_{\mu=1}^{k} a_\mu$.

Доказательство. Для отличия от нуля правой части соотношения (24) при $\varepsilon = j$ необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, $j = J(r+1)$, т. е. $r+1 = nk$, и, во-вторых, чтобы $\mu_{j(\lambda)} = p_{J(\lambda)}$ при всех $\lambda = \overline{0,r}$. Поскольку в силу определения (15) $J(mk+d) = J(d)$ для $d = \overline{0,k-1}$ и $m \in \mathbf{Z}$, получаем первое утверждение леммы.

Пусть теперь последовательность индексов $p_1, \ldots, p_k$ не является периодической, индексы $p_{J(l_1)}, \ldots, p_{J(l_\alpha)}$ $(1 \leq \alpha < k)$ совпадают между собой и равны p_j, все остальные индексы отличны от p_j и $0 = l_1 < \ldots < l_\alpha < k$. Тогда в силу леммы 4 имеем (в нашем случае $\mu_{j(\lambda)} = p_{J(\lambda)}$, $\lambda = \overline{0,r}$):

$$T_k^{(j,n)} = \sum_{l=1}^{k} \prod_{\lambda=0}^{r} \delta_{p_{J(\lambda)} p_{L(\lambda)}} a_{L(\lambda)} B^{(k)}_{L(\lambda)}.$$

Но $\delta_{p_{J(0)} p_{L(0)}} \equiv \delta_{p_j p_l} \neq 0$, если и только если $l = J(l_1), \ldots, J(l_\alpha)$. Поэтому

$$T_k^{(j,n)} = \prod_{\lambda=0}^{r} \delta_{p_{J(\lambda)} p_{J(\lambda)}} a_{J(\lambda)} B^{(k)}_{J(\lambda)} + \sum_{\beta=2}^{\alpha} \prod_{\lambda=0}^{r} \delta_{p_{J(\lambda)} p_{L_\beta(\lambda)}} a_{L_\beta(\lambda)} B^{(k)}_{L_\beta(\lambda)}, \tag{25}$$

где $L_\beta(\lambda) := \theta(J(l_\beta), \lambda, k) = J(l_\beta + \lambda)$ в силу соотношения (16). Первое слагаемое в формуле (25) соответствует $l = J(l_1) = J(0) = j$. Если $\alpha = 1$, то второе слагаемое в (25) равно нулю. Пусть $\alpha > 1$. Допустим, что при некотором $\beta = \overline{2,\alpha}$

$$\prod_{\lambda=0}^{r} \delta_{p_{J(\lambda)} p_{L_\beta(\lambda)}} a_{L_\beta(\lambda)} B^{(k)}_{L_\beta(\lambda)} \neq 0.$$

Тогда $p_{J(\lambda)} = p_{L_\beta(\lambda)} = p_{J(l_\beta+\lambda)}$ при всех $\lambda = \overline{0,r}$, причем $r = nk-1 \geq k-1$, $0 < l_\beta < k$. В силу леммы 2 это означает, что последовательность индексов $p_1, \ldots, p_k$ является периодической, что противоречит условию доказываемой леммы. Значит, второе слагаемое (сумма) в формуле (25) равно нулю, и второе утверждение леммы вытекает из формул (18), (25) и того, что $r+1 = nk$. Лемма доказана.

Из леммы 5 и формул (8), (12) следует, что если последовательность $p_1, \ldots, p_k$ не является периодической, среди индексов $p_1, \ldots, p_k$ имеется ровно $m \leq k$ различных $\mu_1, \ldots, \mu_m$, а матрицы $T^{(k)}_{\mu_1}, \ldots, T^{(k)}_{\mu_m}$ имеют вид (22), то для решения задачи (21) справедливо следующее соотношение:

$$(Y_{p_1,\ldots,p_k}(b|x))_{jj} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\big(T^{(k)}_{p_j} T^{(k)}_{p_{J(1)}} \ldots T^{(k)}_{p_{J(k-1)}}\big)^n\Big)_{jj} L_{p_j, p_{J(1)}, \ldots, p_{J(kn-1)}}(b|x)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n L_{p_j, p_{J(1)}, \ldots, p_{J(kn-1)}}(b|x) = 1 + W_{p_j, \ldots, p_{J(k-1)}}(q; x, b) \quad (j = \overline{1,k}), \tag{26}$$

где $q = \prod\limits_{\mu=1}^{k} a_\mu$.

С другой стороны, систему (21) можно привести к более простому виду. Пусть

$$y_\alpha^{(i)} := (Y_{p_1,\dots,p_k})_{i\alpha} \quad (\alpha, i = \overline{1,k}).$$

Тогда из соотношений (21), (22) получим

$$\frac{dy_\alpha^{(i)}}{dx} = \sum_{\nu=1}^{k} y_\nu^{(i)} \sum_{j=1}^{m} \bigl(T_{\mu_j}^{(k)}\bigr)_{\nu\alpha} x^{\mu_j} = \sum_{\nu=1}^{k} y_\nu^{(i)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{k} \delta_{\mu_j p_l} a_l \bigl(B_l^{(k)}\bigr)_{\nu\alpha} x^{\mu_j}.$$

По условию $p_l \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$, где $l = \overline{1,k}$ и все индексы $\mu_1, \dots, \mu_m$ различны. Поэтому каждый индекс p_l совпадает ровно с одним индексом μ_j $(j = \overline{1,m})$ (обратное может не выполняться). Пользуясь также соотношением (17) для матриц $B_l^{(k)}$, имеем

$$\frac{dy_\alpha^{(i)}}{dx} = \sum_{\nu=1}^{k} y_\nu^{(i)} \sum_{l=1}^{k} a_l \delta_{\nu l} \delta_{\alpha L(1)} x^{p_l} = \sum_{l=1}^{k} y_l^{(i)} a_l x^{p_l} \delta_{\alpha L(1)},$$

где $L(1) := \theta(l,1,k)$. Положим $\alpha \equiv J(1) := \theta(j,1,k)$ $(j = \overline{1,k})$ и учтем, что $\delta_{J(1)L(1)} = \delta_{jl}$. В результате получим, что задача (21) для матрицы $Y_{p_1,\dots,p_k}$ равносильна следующей задаче для $y_j^{(i)} \equiv (Y_{p_1,\dots,p_k})_{ij}$:

$$\frac{dy_{J(1)}^{(i)}}{dx} = a_j y_j^{(i)} x^{p_j}, \quad y_j^{(i)}(b) = \delta_{ij} \quad (i, j = \overline{1,k}). \tag{27}$$

Сделав в системе (27) замену неизвестных функций:

$$y_j^{(i)} = v_j^{(i)} \left(\frac{x}{b}\right)^{\varphi_j} \quad (i, j = \overline{1,k}), \tag{28}$$

где φ_j — произвольные числа, получим

$$\frac{dv_{J(1)}^{(i)}}{dx} = -\varphi_{J(1)} \frac{v_{J(1)}^{(i)}}{x} + \widetilde{a}_j v_j^{(i)} x^{p_j + \varphi_j - \varphi_{J(1)}}, \quad \widetilde{a}_j = a_j b^{\varphi_{J(1)} - \varphi_j} \quad (i, j = \overline{1,k}). \tag{29}$$

Положим

$$\varphi_{j+1} = \varphi_1 + S_j \quad (j = \overline{1,k-1}), \tag{30}$$

где φ_1 — любое число, а величины S_j определены в (10). Тогда, поскольку $J(1) = j+1$ при $j = \overline{1,k-1}$ и $J(1) = 1$ при $j = k$, то

$$p_j + \varphi_j - \varphi_{J(1)} = -1 \ (j = \overline{1,k-1}), \quad p_k + \varphi_k - \varphi_1 = S_k - 1.$$

Поэтому систему (29) можно записать в виде

$$\frac{dv_j^{(i)}}{dx} = \frac{-\varphi_j v_j^{(i)} + \widetilde{a}_{J(-1)} v_{J(-1)}^{(i)} (1 - \delta_{j1})}{x} + \delta_{j1} \widetilde{a}_k v_k^{(i)} x^{S_k - 1} \quad (i, j = \overline{1,k}) \tag{31}$$

или в матричной форме

$$\frac{dV_{p_1,\dots,p_k}}{dx} = V_{p_1,\dots,p_k} \left(\frac{P_{-1}^{(k)}}{x} + \frac{P^{(k)}}{x^{1-S_k}} \right). \tag{32}$$

Здесь $(V_{p_1,\dots,p_k})_{il} = v_l^{(i)}$, $(P^{(k)})_{lj} = \delta_{lk} \delta_{j1} \widetilde{a}_k$, $\bigl(P_{-1}^{(k)}\bigr)_{lj} = -\delta_{lj}\varphi_j + \delta_{L(1)j} \widetilde{a}_l (1 - \delta_{j1})$, $L(1) = \theta(l,1,k)$ $(i, j, l = \overline{1,k})$. При этом соотношения (28) в матричном виде имеют вид

$$Y_{p_1,\dots,p_k}(b|x) = V_{p_1,\dots,p_k}(b|x)\Omega(b|x), \quad (\Omega)_{ij}(b|x) = \delta_{ij} \left(\frac{x}{b}\right)^{\varphi_j} \quad (i, j = \overline{1,k}). \tag{33}$$

Поэтому в силу соотношений (21), (33) систему (32) следует дополнить начальными условиями

$$V_{p_1,\dots,p_k}(b|b) = Y_{p_1,\dots,p_k}(b|b) = I_k. \tag{34}$$

5. Доказательство теоремы 1

Как отмечалось во введении, для однозначной матричной функции $A(x)$ матрицы монодромии, соответствующие различным фундаментальным матрицам решений системы уравнений (5), подобны между собой, а следы всех подобных матриц совпадают [5]. Поэтому след матрицы монодромии системы (5) не зависит от выбора точки b задания начальных условий, а также и от самих начальных условий. Но при $x = \widetilde{b} := b\exp(2\pi i)$ определенные в (9) скалярные функции $L_{p_1,\dots,p_\nu}(b|x)$ можно записать в виде

$$L_{p_1,\dots,p_\nu}(b|\widetilde{b}) = b^{S_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\widetilde{\alpha}^{(\lambda)}_{p_1,\dots,p_\mu}\lg^\lambda b\sum_{\kappa=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(\kappa)}_{p_{\mu+1},\dots,p_\nu}\left(2\pi i + \lg b\right)^\kappa,$$

где величина S_ν была определена в (10). Поэтому вклад в след матрицы монодромии системы (5) могут давать только такие слагаемые в рядах (8) и (11), в которые входят только функции $L_{p_1,\dots,p_\nu}(b|x)$ с $S_\nu = 0$. С учетом этого обстоятельства из (11) имеем

$$\mathrm{Tr}\{Y(b|\widetilde{b})\} = N + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p_1,\dots,p_k=-\tau,\, S_k=0}^{\infty,*}\mathrm{Tr}\{W_{p_1,\dots,p_k}(T_{p_1}\dots T_{p_k};\widetilde{b},b)\}. \tag{35}$$

В силу известных свойств функции от матрицы (см., например, [5, гл. V, § 1]) и формул (19), (20)

$$N + \mathrm{Tr}\{W_{-1}(T_{-1};\widetilde{b},b)\} = N + \sum_{\nu=1}^{N}W_{-1}\bigl(q^{(\nu)}_{-1};\widetilde{b},b\bigr) = \sum_{\nu=1}^{N}Y_{-1}\bigl(q^{(\nu)}_{-1};\widetilde{b},b\bigr)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N}\exp\bigl(2\pi i q^{(\nu)}_{-1}\bigr) = \mathrm{Tr}\left\{\exp(2\pi i T_{-1})\right\}, \tag{36}$$

где $q^{(\nu)}_{-1}$ $(\nu = \overline{1,N})$ — собственные значения матрицы T_{-1}.

При $k \geq 2$ и $S_k = 0$ решение задачи (32), (34) выписывается сразу:

$$V_{p_1,\dots,p_k}(b|x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{R_k}, \quad R_k = P^{(k)}_{-1} + P^{(k)}. \tag{37}$$

Решение системы (27) для элементов матрицы $Y_{p_1,\dots,p_k}$, очевидно, не зависит от выбора величины φ_1 при замене (28), (30). В дальнейшем будем полагать $\varphi_1 = 0$. В этом случае, поскольку все числа S_ν целые, из второй формулы в (33) получим, что $\Omega(b|\widetilde{b}) = I_k$. Поэтому из соотношений (33), (37) имеем

$$Y_{p_1,\dots,p_k}(b|\widetilde{b}) = \exp(2\pi i R_k), \quad R_k = P^{(k)}_{-1} + P^{(k)}. \tag{38}$$

Из формул для $P^{(k)}$ и $P^{(k)}_{-1}$, приведенных сразу после системы уравнений (32), следует, что $(R_k)_{il} = -\delta_{il}\varphi_l + \delta_{I(1)l}\widetilde{a}_i$, где $I(1) = \theta(i,1,k)$. Поэтому при $\varphi_1 = 0$, учитывая также соотношение (30), получим, что характеристическое уравнение $\det(R_k - \lambda I_k)$ для матрицы R_k можно записать в виде

$$(\lambda + S_1)(\lambda + S_2)\dots(\lambda + S_{k-1})\lambda = q, \tag{39}$$

где $q = \prod\limits_{\mu=1}^{k} a_\mu$.

Обозначим

$$Q_j := T_{p_{J(0)}} \dots T_{p_{J(k-1)}} \ (j = \overline{1,k}),\ A_l := T_{p_1} \dots T_{p_{l-1}},\ B_l := T_{p_l} \dots T_{p_k}\ (l = \overline{2,k}).$$

Здесь $J(\mu) := \theta(j,\mu,k)$, а функция θ определена формулой (15). Тогда для любых $l = \overline{2,k}$ имеем $Q_1 = A_l B_l$, $Q_l = B_l A_l$. Но, как известно, все собственные значения и их кратности для матриц $A_l B_l$ и $B_l A_l$ совпадают (см., например, [24, гл. 1, § 2, п. 1.42]). Значит, все матрицы Q_j $(j = \overline{1,k})$ имеют одинаковые собственные значения. Поэтому, используя известные свойства функции от матрицы (см., например, [5, гл. V, § 1]), имеем

$$\operatorname{Tr}\{W_{p_j,\dots,p_{J(k-1)}}(Q_j;\widetilde{b},b)\} = \sum_{\nu=1}^{N} W_{p_j,\dots,p_{J(k-1)}}\bigl(q^{(\nu)}_{p_1,\dots,p_k};\widetilde{b},b\bigr). \tag{40}$$

Здесь $q^{(\nu)}_{p_1,\dots,p_k}$ $(\nu = \overline{1,N})$ — собственные значения матрицы $Q_1 := T_{p_1} \dots T_{p_k}$. Аналогично, учитывая соотношение (38), получим

$$\operatorname{Tr}\{Y_{p_1,\dots,p_k}\}(q;b|\widetilde{b}) = \sum_{j=1}^{k} \exp\bigl(2\pi i \lambda^{(j)}_{p_1,\dots,p_k}(q)\bigr), \tag{41}$$

где $\lambda^{(j)}_{p_1,\dots,p_k}(q)$ $(j = \overline{1,k})$ — собственные значения матрицы R_k, т. е. корни уравнения (39). При этом в обоих случаях каждое из собственных значений берется столько раз, какова его кратность.

С другой стороны, в силу формулы (26)

$$W_{p_j,\dots,p_{J(k-1)}}(q;x,b) = \left(Y_{p_1,\dots,p_k}\right)_{jj}(q;b|x) - 1 \quad (k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}). \tag{42}$$

Из соотношений (40)–(42) имеем

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Tr}\{W_{p_j,\dots,p_{J(k-1)}}(Q_j;\widetilde{b},b)\} = \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} W_{p_j,\dots,p_{J(k-1)}}\bigl(q^{(\nu)}_{p_1,\dots,p_k};\widetilde{b},b\bigr)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} \bigl(\operatorname{Tr}\{Y_{p_1,\dots,p_k}\}\bigl(q^{(\nu)}_{p_1,\dots,p_k};b|\widetilde{b}\bigr) - k\bigr) = \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}\bigl\{\exp\bigl(2\pi i \lambda^{(j)}_{p_1,\dots,p_k}\bigl(q^{(\nu)}_{p_1,\dots,p_k}\bigr)\bigr) - 1\bigr\}.$$

Левая часть последнего формулы содержит все циклические перестановки в композиции матриц $T_{p_1} \dots T_{p_k}$, поэтому, подставляя его вместе с (36) в соотношение (35), получим формулу (13). Абсолютная сходимость рядов (35) и (13) следует из абсолютной сходимости ряда (11). Если при некотором значении ν собственное значение $q^{(\nu)}_{p_1,\dots,p_k}$ матрицы $T_{p_1} \dots T_{p_k}$ $(k \geq 2)$ равно нулю, то все решения $\lambda^{(j,\nu)}_{p_1,\dots,p_k}$ уравнения (14) будут целыми числами и соответствующие им слагаемые в формуле для $M_{p_1,\dots,p_k}$ равны нулю. Поэтому в (13) суммирование можно вести только по таким последовательностям индексов $p_1, \dots, p_k$, для которых хотя бы одно собственное значение матрицы $T_{p_1} T_{p_2} \dots T_{p_k}$ отлично от нуля. Теорема доказана.

6. След матрицы монодромии системы (5) специального вида

В качестве примера конкретизируем формулу (13) для следа матрицы монодромии особой точки $x = 0$ системы (5) с матрицей

$$A(x) = T_{p_1} x^{p_1} + T_{p_2} x^{p_2} \quad (p_1 \neq p_2), \tag{43}$$

где T_{p_1} и T_{p_2} — нильпотентные матрицы с индексом два, т. е.

$$T_{p_1}^2 = T_{p_2}^2 = O_N. \tag{44}$$

Здесь O_N — нулевая матрица порядка N. При выполнении условий (44) в ряде (8), дающем решение рассматриваемой системы, могут быть отличны от нуля только следующие композиции матриц T_{p_1} и T_{p_2}:

$$T_{p_1}, \quad (T_{p_1}T_{p_2})^\nu, \quad (T_{p_1}T_{p_2})^\nu T_{p_1}, \quad T_{p_2}, \quad (T_{p_2}T_{p_1})^\nu, \quad (T_{p_2}T_{p_1})^\nu T_{p_2} \quad (\nu \in \mathbf{N}).$$

При этом, однако, все собственные значения матрицы $(T_{p_1}T_{p_2})^\nu T_{p_1}$ совпадают с собственными значениями матрицы $T_{p_1}(T_{p_1}T_{p_2})^\nu$ (см., например, [24, гл. 1, § 2, п. 1.42]). Но при $\nu \neq 0$ последняя матрица в силу условия (44) равна нулевой матрице. Значит, все собственные значения матрицы $(T_{p_1}T_{p_2})^\nu T_{p_1}$ равны нулю. Это относится и к матрице $(T_{p_2}T_{p_1})^\nu T_{p_2}$. Поэтому в соответствии с теоремой 1 в формуле (13) из перечисленных композиций можно учитывать только

$$T_{p_1}, \quad (T_{p_1}T_{p_2})^\nu, \quad T_{p_2}, \quad (T_{p_2}T_{p_1})^\nu \quad (\nu \in \mathbf{N}), \tag{45}$$

отобрав те, для которых $S_k = 0$. Последние существуют только при выполнении одного из следующих условий:

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -1, \quad p_1 + p_2 = -2. \tag{46}$$

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Пусть $p_j = -1$ ($j = 1$ или $j = 2$). Тогда, поскольку $p_1 \neq p_2$, то из всех возможных композиций (45) $S_k = 0$ только для T_{p_j} и по теореме 1 формула для следа m_0 матрицы монодромии имеет вид

$$m_0 = \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(T_{-1})).$$

Если $p_1 + p_2 = -2$, то $p_{1,2} \neq -1$, и из всех композиций (45) $S_k = 0$ только для $(T_{p_1}T_{p_2})^\nu$ и $(T_{p_2}T_{p_1})^\nu$. Поскольку при этом $T_{-1} = O_N$, то из теоремы 1 имеем

$$m_0 = N + \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{j=1}^{2}(\exp(2\pi i \lambda^{(j,\mu)}) - 1).$$

Здесь $\lambda^{(j,\mu)}$ ($j = 1, 2$) — корни квадратного уравнения

$$(\lambda + S_1)\lambda = q^{(\mu)} \quad (\mu = \overline{1, N}),$$

где $q^{(\mu)}$ — собственные значения матрицы $T_{p_1}T_{p_2}$.

В остальных случаях, когда не выполнено ни одно из соотношений (46), $m_0 = N$ в силу теоремы 1.

К сожалению, полученные в этом разделе простые формулы для следа матрицы монодромии системы линейных ОДУ с иррегулярной особой точкой являются исключением. Оно обусловлено тем, что в рассмотренном примере имеется лишь небольшое число отличных от нуля непериодических композиций матриц коэффициентов T_p, удовлетворяющих условию $S_k = 0$. В общем случае ряд (13) является бесконечным абсолютно сходящимся.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркушевич А. М.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968. Т. 2.

2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.

3. *Lappo-Danilevsky J. A.* Memoires sur la theorie des systemes des equations differentielles lineaires. Vol. I // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1934. V. 6. P. 1–256.

4. *Лаппо-Данилевский И. А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1957.

5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971.

7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. III. Ч. 2. СПб.: БХВ-Петербург, 2010.

8. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

9. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.

10. *Sternin B. Yu., Shatalov V. E.* Borel–Laplace transform and asymptotic theory. Introduction to resurgent analysis. Boca Raton, FL.: CRC Press, 1996.

11. *Ecalle J.* Les fonctions resurgentes. Vol. I, II, III. Paris: Publ. Math. Orsay, 1981–1985.

12. *Коровина М. В., Матевосян О. А.* О равномерных асимптотиках решений дифференциальных уравнений второго порядка с мероморфными коэффициентами в окрестности особых точек // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. Т. 20, № 1. С. 251–261.

13. *Коровина М. В., Матевосян О. А., Смирнов И. Н.* Асимптотики решений уравнений 3-го порядка в окрестности иррегулярной особой точки // Владикавк. мат. журн. 2024. Т. 26, № 1. С. 106–122.

14. *Еругин Н. П.* О показательной подстановке системы линейных дифференциальных уравнений (проблема Пуанкаре) // Мат. сб. 1938. Т. 45, № 3. С. 509–526.

15. *Еругин Н. П.* Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во ЛГУ, 1956.

16. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск: Изд-во АН БССР, 1963.

17. *Еругин Н. П.* О поведении решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 11. С. 1950–1959.

18. *Голубков А. А.* Явные формулы для коэффициентов в решении Лаппо-Данилевского линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 4. С. 435–447.

19. *Голубков А. А.* Регулярная циклическая матрица изолированной особой точки уравнения Штурма — Лиувилля стандартного вида // Материалы Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXX». Воронеж, 3–9 мая 2019 г. Часть 4. Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ РАН, 2024. Т. 233. С. 3–13.

20. *Голубков А. А.* Асимптотика решений уравнения Штурма — Лиувилля вдоль произвольной кривой в окрестности симметричной особой точки // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 4. С. 621–634.

21. *Голубков А. А.* Квазибезмонодромные особые точки уравнения Штурма — Лиувилля стандартного вида на комплексной плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 8. С. 1032–1038.

22. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во МГУ, 1987.

23. *Гельфонд А. О.* Решение уравнений в целых числах. М.: Наука, 1978.

24. *Дробышевич В. И., Дымников В. П., Ривин Г. С.* Задачи по вычислительной математике.

М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 18 июня 2025 г.
После доработки 18 сентября 2025 г.
Принята к публикации 26 сентября 2025 г.

Голубков Андрей Александрович (ORCID 0000-0002-5265-1310)
Университет МГУ-ППИ в Шеньчжене, 518172, Китай,
Провинция Гуандун, г. Шэньчжэнь, район Лунган, Даюньсиньчэн,
ул. Гоцзидасюеюань, 1;
Специализированный учебно-научный центр МГУ имени М. В. Ломоносова,
ул. Кременчугская, 11, Москва 121352
andrej2501@yandex.ru