Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 514.113

СТРОЕНИЕ И КРИВИЗНЫ МАЛОГО КУБОКУБООКТАЭДРА И ПОЛЯРНО–ДВОЙСТВЕННОГО К НЕМУ МНОГОГРАННИКА

Л. А. Антипова

Аннотация. Дается динамика построения простейшей пары взаимно полярных невыпуклых звездчатых многогранников. Первым в этой паре является однородный малый кубокубооктаэдр Коксетера, а вторым — полярный ему многогранник малый гексакронный икосотетраэдр. Изучаются структура этих многогранников и их кривизны. Для многогранных углов малого кубокубооктаэдра получен аналог теоремы Гаусса — Александрова.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.101

Ключевые слова: однородный многогранник, полярно двойственный многогранник, сферическое изображение, кривизна.

1. Введение

Изучение невыпуклых многогранников в традициях Ленинградской геометрической школы А. Д. Александрова началось в Герценовском Университете с работ А. Л. Вернера и его учениц М. В. Васильевой и О. Г. Даниловой (Голоковой) с изучения геометрии многогранников Кеплера — Пуансо. Итогом этой работы стала книга [1]. В ней были уже намечены направления дальнейших исследований по однородным многогранникам, число которых — многие десятки.

Такие исследования с 2019-го г. Л. А. Антипова стала вести вместе с А. Л. Вернером. Выяснилось, что тогда для однородных многогранников не были изучены даже вопросы об их ориентируемости, роде поверхности, ими определенной, их кривизнах. Поэтому в первой совместной книге [2] был решен вопрос об ориентируемости однородных многогранников с выпуклыми гранями, их строении, был найден род их поверхности.

Если выпуклые многогранники из любой их внутренней точки, т. е. точки, принадлежащей внутренним областям всех двугранных углов, полностью видны, то для невыпуклых звездчатых многогранников это неверно — они как бы многослойны.

Аналогично если сферическое отображение выпуклых поверхностей однолистно и просто строится с помощью опорных плоскостей, то сферическое отображение звездчатых поверхностей многолистно и его построение непросто. Оказалось, что для однородных многогранников между изучаемым многогранником M и гауссовой сферой удобно построить полярный ему многогранник $\pi(M)$, который как бы расслаивает сферический образ M^*: проекцией $\pi(M)$ на сферу и является M^*. Такой подход был сделан в работе [3]. Следует отметить, что пары двойственных многогранников, один из которых получен как полярный образ второго многогранника этой пары, рассматриваются в статьях [4, 5], но структура граней двойственного многогранника, кривизны многогранников и их сферические изображения там не определяются.

Продолжая работу в этом направлении в работах [6–8], автор статьи выделил пары взаимно полярных многогранников, первым из которых является однородный ориентируемый многогранник с выпуклыми гранями, а вторым — многогранник каталанова типа. Эти пары имеют общую наглядную динамику построения, идущую от платоновых многогранников, и допускают изучение их кривизн вплоть до аналогов теоремы Гаусса — Александрова.

Таких пар оказалось 7: три пары, у которых многогранные углы не имеют особенностей, и 4 пары с особенностями типа «складки». Самой простой из пар многогранников четверки является пара: малый кубокубооктаэдр (МККО) — малый гексакронный икосотетраэдр (МГАИТ). Об этой паре и рассказано в настоящей статье.

Основные результаты статьи.

1. Описывается пошаговое построение однородного многогранника МККО с использованием одномерного остова архимедова многогранника ромбокубооктаэдр, часть его граней и его восьмиугольные сечения.

2. Выполнено построение полярно-двойственного многогранника к многограннику МККО, основанное на определении полярного образа однородного многогранника, сформулированное автором статье в книге [7]. Описана структура полученного многогранника, его многогранных углов в вершинах.

3. Введены понятия кривизны реализации и сферического изображения многогранного угла МККО. Известно, что сферическое изображение выпуклого многогранного угла определяется через опорные плоскости, но такой подход не применим для случая многогранного угла с самопересечениями. В статье сферическое изображение многогранного угла МККО определяется как проекция его полярного образа на единичную сферу при центральном проектировании из центра многогранника МККО. Такой подход к определению сферического изображения многогранного угла позволяет обобщить понятие сферического изображения выпуклого многогранного угла на случай многогранного угла с самопересечениями, что впервые было сделано в статье [8] и позднее уточнено в книге [7].

4. Доказана теорема о равенстве площади сферического изображения многогранного угла МККО и его кривизны реализации. Эта теорема является обобщением теоремы Гаусса — Александрова для выпуклых многогранных углов.

5. Многогранники с самопересечениями трудно мысленно представить, увидеть все их переплетения и тем более на их основе провести построения дополнительных конструкций. Даже построение полярного образа многогранника, которое в выпуклом случае вполне очевидно, в невыпуклом звездчатом случае уже без серии рисунков представить крайне сложно. В статье все результаты и построения иллюстрируются изображениями, которые часто не только помогают создать образ изучаемого объекта, но и наглядно демонстрируют доказательства сформулированных утверждений.

2. Построение однородных многогранников — ромбокубооктаэдра РКО и малого кубокубооктаэдра МККО

Фиксируем правую прямоугольную систему координат x, y, z с началом в точке O и рассмотрим в ней куб K, у которого вершины имеют координаты ± 1.

Для построения архимедова ромбокубооктаэдра РКО грани куба K раздвигаются (рис. 1).

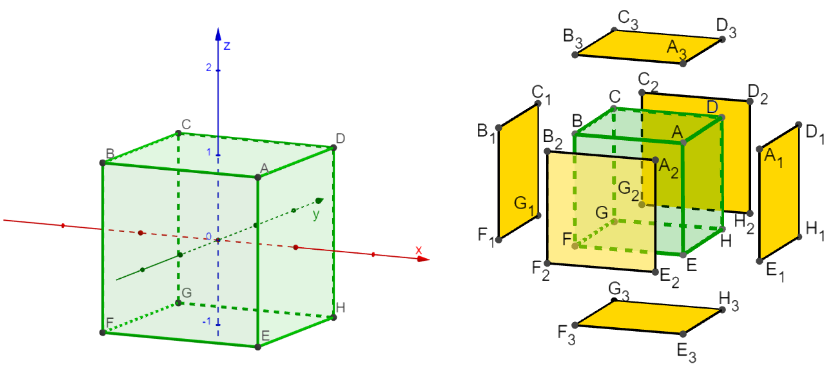


Рис. 1. Построение многогранника РКО из куба K.

Затем строится выпуклая оболочка этих раздвинутых граней. Если ребра куба K равны 2, то раздвинуть грани куба K надо на $\sqrt{2}$, и тогда получим архимедов ромбокубооктаэдр РКО (рис. 2).

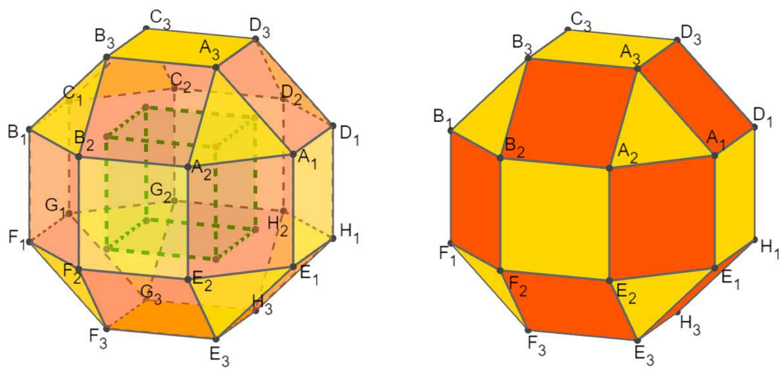


Рис. 2. Архимедов ромбокубоокаэдр.

Одномерный остов РКО составляют 48 отрезков, которые являются сторонами шести правильных восьмиугольных сечений ромбокубооктаэдра. Плоскости этих восьмиугольников суть плоскости граней исходного куба K, который лежал в основе построения РКО. Эти правильные восьмиугольники будут шестью гранями однородного многогранника — малого кубокубооктаэдра МККО (рис. 3).

К каждому из 48 отрезков сейчас подходит по одному многоугольнику — правильному восьмиугольнику. Добавим к этому набору многоугольников треугольные грани РКО и квадратные его грани, полученные переносом граней куба K. Построенную замкнутую многогранную поверхность будем называть *малым кубокубооктаэдром* и обозначать МККО (рис. 4).

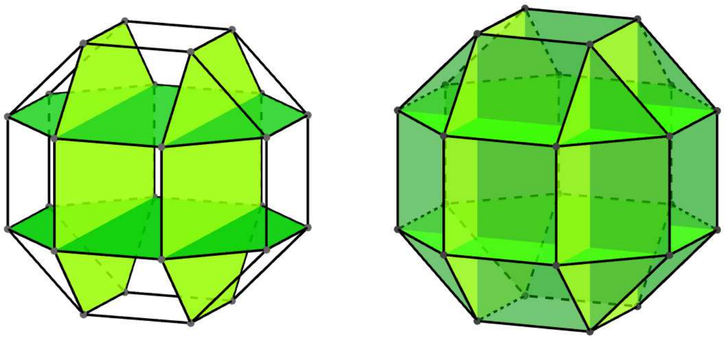


Рис. 3. Восьмиугольные грани малого кубокубооктаэдра.

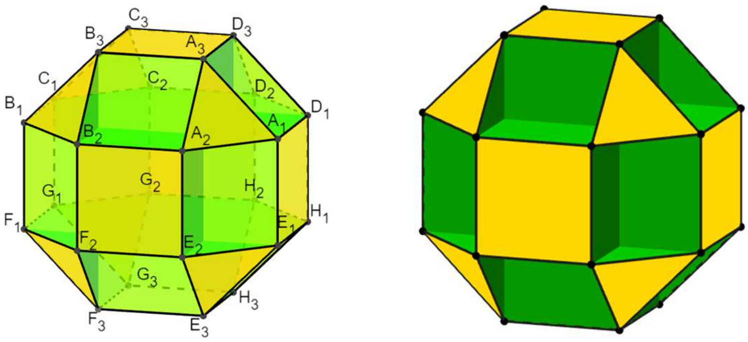


Рис. 4. Малый кубокубооктаэдр.

3. Структура малого кубокубооктаэдра

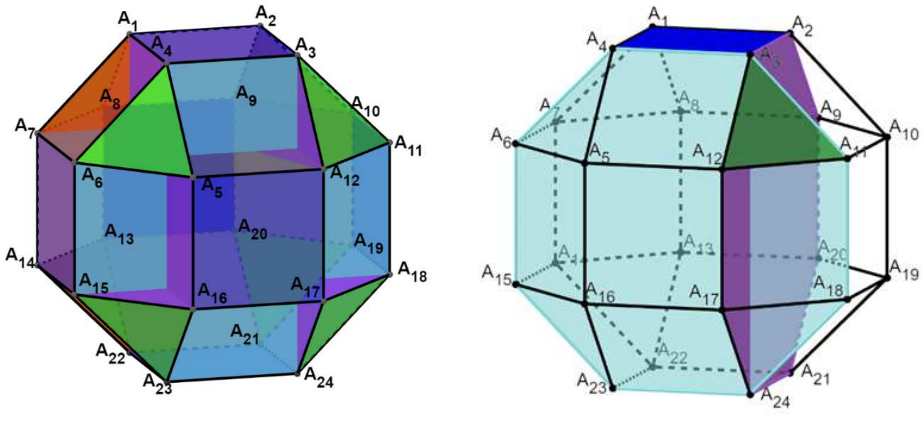
Введем новые обозначения вершин построенного МККО $A_1A_2\dots A_{24}$ так, что $A_3(1,1,1+\sqrt{2})$, $A_2(-1,1,1+\sqrt{2})$, $A_1(-1,-1,1+\sqrt{2})$, $A_4(1,-1,1+\sqrt{2})$, $A_{24}(1,1,-1-\sqrt{2})$, $A_{21}(-1,1,-1-\sqrt{2})$, $A_{22}(-1,-1,-1-\sqrt{2})$, $A_{23}(1,-1,-1-\sqrt{2})$ (рис. 5).

Гранями многогранника МККО являются: 1) шесть квадратов — раздвинутые грани куба K; 2) восемь правильных треугольников, соответствующих вершинам исходного куба K; 3) шесть правильных восьмиугольников. Всего у многогранника МККО 20 граней. Ребер у многогранника МККО — 48: из каждого ребра куба K получилось два ребра многогранника МККО — $12\cdot 2=24$, к ним добавляются 24 ребра — стороны восьми треугольников.

Многогранный угол в вершине МККО состоит из четырех граней: треугольник, квадрат и два восьмиугольника.

Под каждой квадратной (темной) гранью в многограннике МККО лежит параллельная ей восьмиугольная грань. От квадратной грани к параллельной ей восьмиугольной грани идут четыре треугольника. Такой шестигранник, в котором есть *крыша* — квадрат, четыре *ската* — треугольники, а также *основание* — восьмиугольник, назовем *куполом* (рис. 6, 7).

В МККО шесть куполов. Они сцеплены друг с другом треугольными гранями. Каждая треугольная грань сцепляет три купола (рис. 8).



(а) (б)

Рис. 5. (а) МККО; (б) Многогранный угол МККО в вершине A_3.

На восьми треугольниках лежат все 24 вершины многогранника МККО. Эйлерова характеристика $\chi(\text{МККО}) = 24 - 48 + 20 = -4$.

Многогранник МККО ориентируем, это доказано в [2], а потому род g поверхности, определенной им, вычисляется из равенства $-4 = 2(1-g)$, т. е. $g(\text{МККО}) = 3$.

В вершине A_3 сходятся две восьмиугольные грани г$_1$ — передняя, светлая и г$_3$ — правая, темная, являющиеся гранями перегиба, одна квадратная грань г$_4$ — вершинная грань — верхний квадрат и одна треугольная грань г$_2$, которая вместе с пересекающимися восьмиугольными гранями образует складку. Многогранный угол в вершине A_3 будем обозначать через $V(A_3)$ (рис. 9).

4. Построение малого гексакронного икосотетраэдра МГАИТ — многогранника, полярного к МККО

Далее многогранник МККО иногда называется многогранником M, а его полярный образ $\pi(M)$ — многогранником МГ.

Рассмотрим две концентрические сферы с центром в точке O: единичную сферу S и сферу $S(M)$, описанную около многогранника МККО. Определим многогранник, полярный многограннику МККО относительно сферы $S(M)$.

Однородный многогранник МККО обладает одинаковыми с точностью до движения многогранника углами в вершинах. Рассмотрим многогранный угол $\mathrm{V}(A_3)$ в вершине A_3 многогранника МККО, грани которого два восьмиугольника, треугольник и квадрат занумерованы в циклическом порядке: г$_1$, г$_2$, г$_3$, г$_4$, соответствующем одному из обходов вокруг прямой OA_3. Полярой вершины A_3 относительно сферы $S(M)$ будет плоскость α_A, касательная в точке A_3 к сфере $S(M)$. Полюсы плоскостей граней многогранного угла $\mathrm{V}(A_3)$ лежат в плоскости α_A. Обозначим их через H_1 — полюс треугольной грани, Γ_1' — полюс восьмиугольной грани г$_1$, Γ_2' — полюс восьмиугольной грани г$_3$, P_z — полюс квадратной грани. Полюсы смежных граней соединяем отрезками: $\Gamma_1' H_1$, $H_1 \Gamma_2'$, $\Gamma_2' P_z$, $P_z \Gamma_1'$.

В соответствии с определением полярного образа многогранного угла, сформулированным в книге [7], совокупность треугольников $\Gamma_1' A_3 H_1$, $H_1 A_3 \Gamma_2'$, $\Gamma_2' A_3 P_z$, $P_z A_3 \Gamma_1'$ определяет грань полярного к МККО многогранника, соответ-

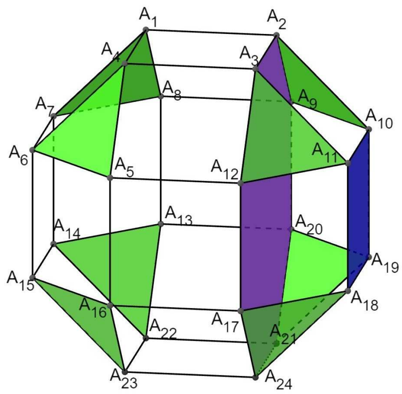


Рис. 6. Купол МККО: квадрат $A_{10}A_{11}A_{18}A_{19}$, четыре треугольника $A_{11}A_3A_{12}$, $A_{10}A_2A_9$, $A_{19}A_{20}A_{21}$, $A_{18}A_{17}A_{24}$ и восьмиугольник $A_2A_3A_{12}A_{17}A_{24}A_{21}A_{20}A_9$.

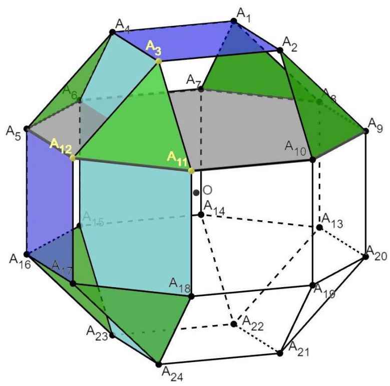


Рис. 7. Два купола МККО с квадратами $A_3A_2A_1A_4$, $A_{12}A_5A_{16}A_{17}$.

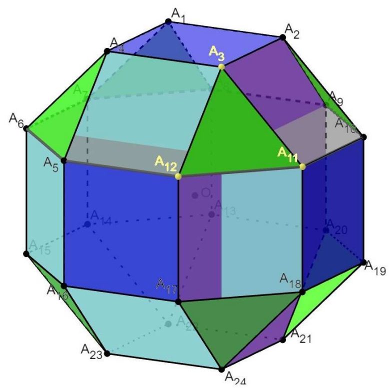


Рис. 8. Три купола МККО, сцепленных по треугольнику $A_3A_{11}A_{12}$.

ствующую вершине A_3. Эту грань-стрелку будем называть *полярным образом многогранного угла* $V(A_3)$ и обозначать через $p(A_3)$.

На рис. 10 изображен полярный образ многогранного угла $V(A_3)$ малого кубокубооктаэдра.

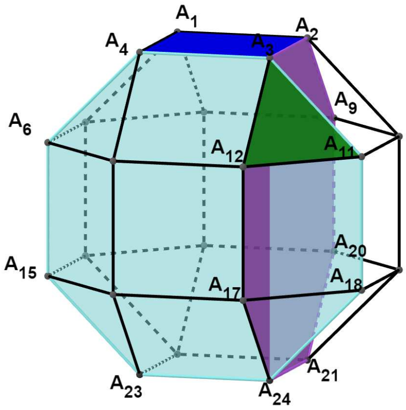


Рис. 9. Многогранный угол многогранника МККО в вершине A_3.

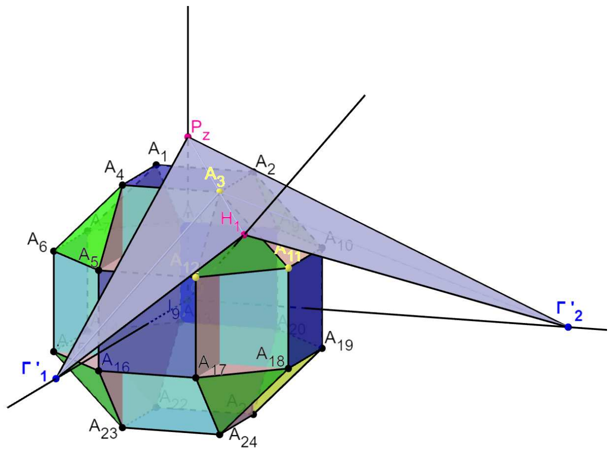


Рис. 10. $\mathrm{p}(A_3) = \Gamma_1' H_1 \Gamma_2' P_z$ — полярный образ четырехгранного угла в вершине A_3 малого кубокубооктаэдра.

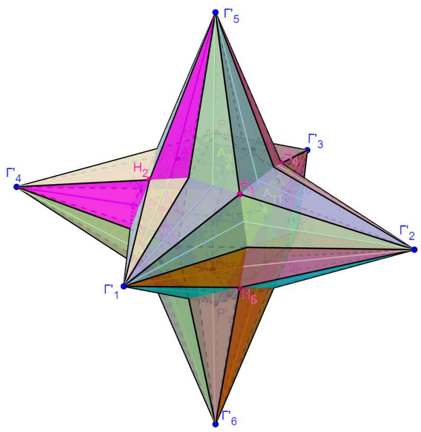


Рис. 11. Малый гексакронный икосотетраэдр, полярный к многограннику МККО.

Получившиеся 24 стрелки лежат в касательных плоскостях сферы $S(M)$ и образуют многогранник, полярный к МККО, который называется *малым гексакронным икосотетраэдром* (МГАИТ) (рис. 11). Его ребрами являются стороны стрелок, на рис. 11 они изображены черными отрезками. Вершинами многогранника являются вершины стрелок.

Двадцать вершин многогранника МГ будут трех типов, соответствующих трем типам граней многогранника M. Назовем многогранные углы в этих вершинах, а также их число и расположение. Будем использовать следующие обозначения:

1) R — радиус сферы $S(M)$, описанной вокруг M, и $R^2 = 5 + 2\sqrt{2}$;

2) h_1 — расстояние квадратных граней многогранника M от точки O, $h_1 = 1 + \sqrt{2}$;

3) h_2 — расстояние восьмиугольных граней многогранника M от точки O, $h_2 = 1$;

4) h_3 — расстояние треугольных граней многогранника M от точки O, $h_3 = \sqrt{3} + \sqrt{2}/\sqrt{3}$.

(a) Шесть правильных четырехгранных углов с вершинами на полуосях координат на расстоянии $d_1 = R^2/h_1$ от начала координат, $d_1 = (5+2\sqrt{2})/(\sqrt{2}+1) = 3\sqrt{2} - 1$.

На рис. 12 изображен нижний колпак, в который перешла при поляритете крыша купола — квадратная грань г$_4$ = $A_1A_2A_3A_4$, и четыре многогранных угла в ее вершинах.

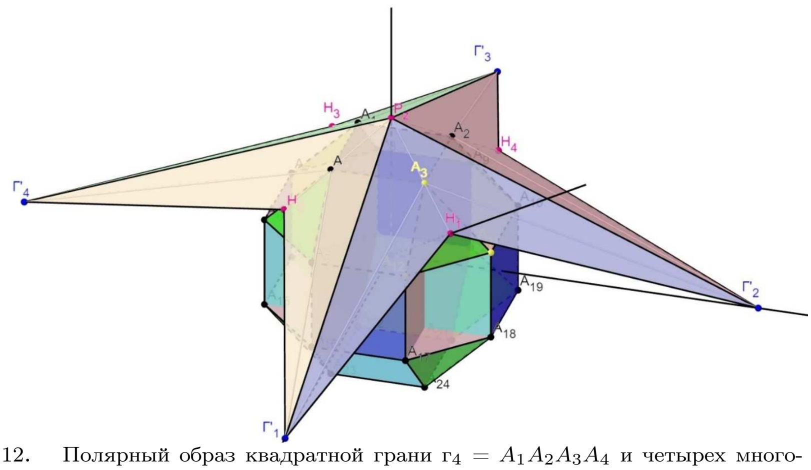


Рис. 12. Полярный образ квадратной грани г$_4$ = $A_1A_2A_3A_4$ и четырех многогранных углов в ее вершинах — четыре грани-стрелки, сходящиеся в полюсе P_z плоскости грани г$_1$.

(b) Шесть правильных восьмигранных углов с вершинами на полуосях координат на расстоянии $d_2 = R^2/h_2$, $d_2 = 5 + 2\sqrt{2}$. На рис. 13 изображен верхний колпак, являющийся полярным образом основания купола — восьмиугольника $A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ и многогранных углов в его вершинах. Рис. 14 иллюстрирует конфигурацию двух описанных ранее колпаков.

(c) Восемь правильных трехгранных углов (антиуглов) с невыпуклыми гранями, вершины которых расположены на лучах, с началом в точке O, со-

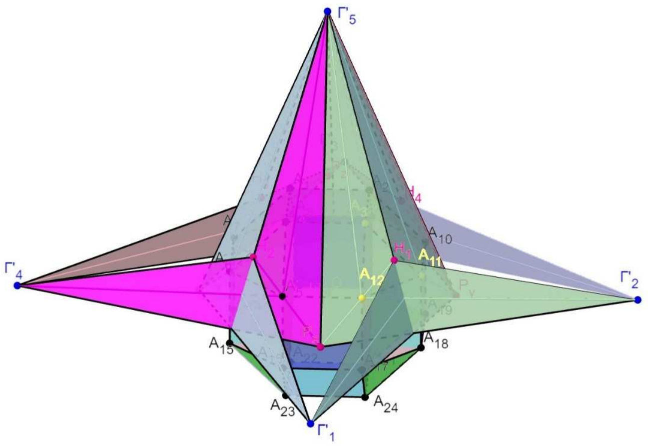


Рис. 13. Полярный образ восьмиугольной грани $A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ и многогранных углов в ее вершинах — восемь граней стрелок, сходящиеся в полюсе Γ_5' плоскости данной грани.

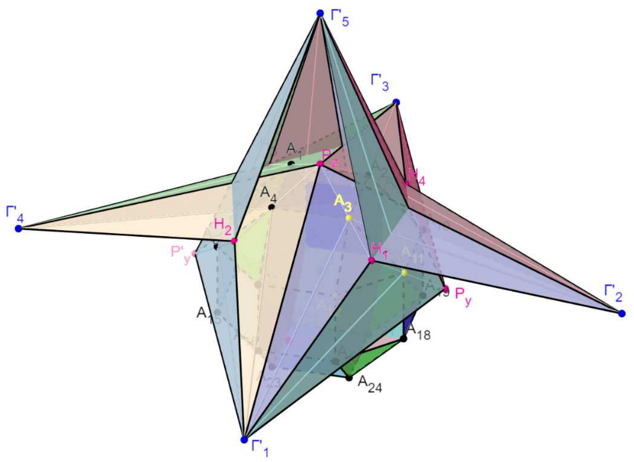


Рис. 14. Нижний и верхний колпаки — полярные образы квадратной грани и параллельной ей восьмиугольной грани многогранника МГАИТ.

держащими вершины куба K, на расстоянии $d_3 = R^2/h_3$ от точки O, $d_3 = (5+2\sqrt{2})/(\sqrt{3}+\sqrt{2}/\sqrt{3})$.

На рис. 15 изображен трехгранный угол — полярный образ треугольной грани $A_3A_{11}A_{12}$ и многогранных углов в ее вершинах.

5. Аналог теоремы Гаусса — Александрова для МККО

Всякий многогранный угол МККО — четырехгранный, состоящий из двух восьмиугольных граней, одной квадратной и одной треугольной граней. Количество его обходов вокруг своей оси, т. е. прямой, содержащей вершину этого

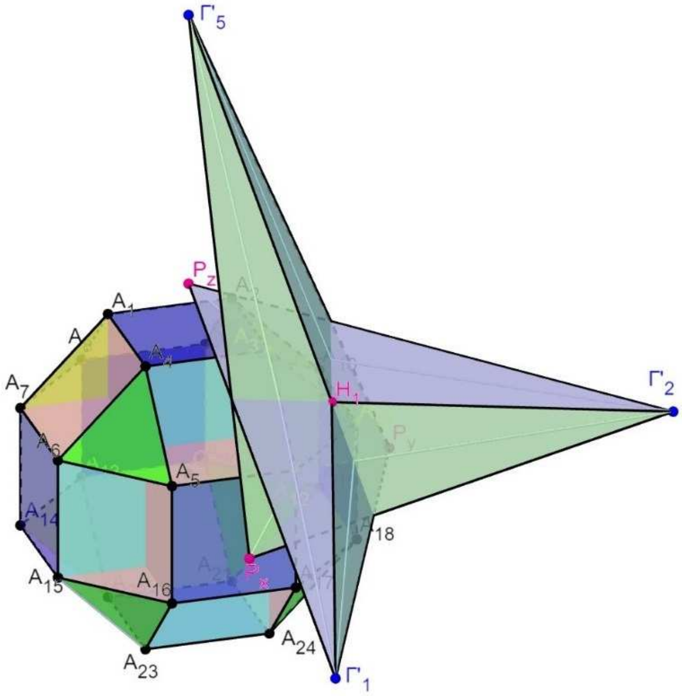


Рис. 15. Полярный образ треугольной грани $A_3A_{11}A_{12}$ и многогранных углов в ее вершинах — три грани-стрелки, сходящиеся в полюсе H_1 плоскости данной грани.

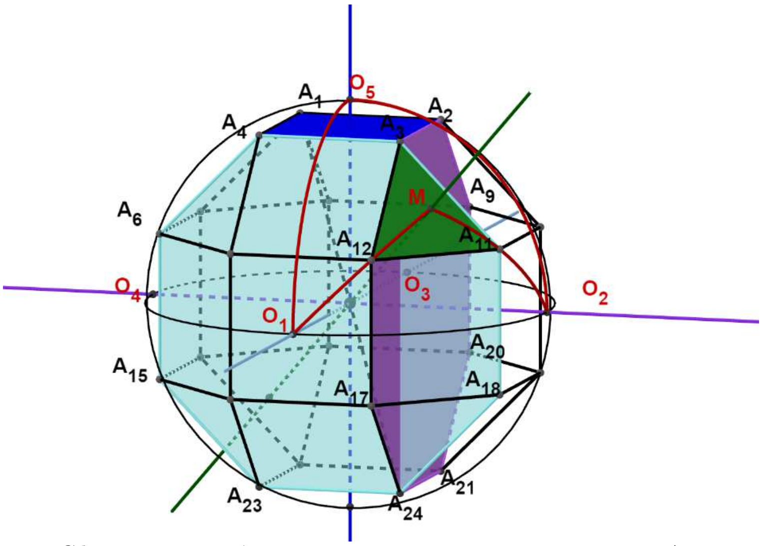


Рис. 16. Сферическое изображение многогранного угла в вершине A_3 многогранника МККО.

угла и центр многогранника, равно единице. Определим кривизну реализации такого угла как число, равное $2\pi \cdot 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)$, где α_1 и α_2 — радианные меры плоских углов восьмиугольных граней; α_3 — радианная мера угла квадрата и α_4 — радианная мера треугольной грани, т. е. кривизна реализации многогранного угла МККО равна

$$2\pi \cdot 1 - \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

В соответствии с определением сферического изображения однородного многогранника, сформулированным в [7, с. 36], *сферическим изображением многогранника* МККО называем проекцию полярно-двойственного к нему многогранника МГАИТ на единичную сферу S при центральном проектировании из центра O этой сферы. Таким образом, сферическим изображением многогранного угла малого кубокубооктаэдра будет проекция грани МГАИТ, являющаяся полярным образом этого угла, на единичную сферу S при центральном проектировании из центра O. *Площадью* сферического изображения многогранного угла называем суммарную площадь проекций треугольников, образующих соответствующую грань полярного многогранника, на единичную сферу S.

Теорема. *Площадь сферического изображения многогранного угла малого кубокубооктаэдра равна его кривизне реализации.*

Доказательство. На рис. 16 для удобства изображения рассмотрена проекция грани $\Gamma_1' P_z\ \Gamma_2' H_1$ на сферу $S(M)$, описанную около МККО.

Сумма площадей полученных сферических треугольников $O_1A_3O_5$, $O_5A_3O_2$, O_2A_3M, MA_3O_1 равна площади сферического четырехугольника $O_5O_2MO_1$, которая в случае проекции на единичную сферу равна разности восьмой и двадцать четвертой частей площади сферы, т. е. $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)4\pi = \frac{\pi}{3}$, что доказывает равенство кривизны реализации многогранного угла МККО и его площади сферического изображения.

Теорема доказана.

6. Заключение

В статье на примере одной пары полярно-двойственных многогранников — однородного многогранника малого кубокубооктаэдра и полуправильного равногранного многогранника малого гексакронного икосотетраэдра — продемонстрировано применение созданной А. Л. Вернером и автором статьи теории построения таких пар, определения кривизны реализации и сферического изображения однородного многогранника этой пары, а также доказательство равенства кривизны реализации многогранного угла однородного многогранника и площади его сферического изображения.

Благодарность. Автор статьи выражает благодарность своему Учителю, Алексею Леонидовичу Вернеру, за актуальную во все времена и бесспорно красивую тему исследования, за регулярные геометрические беседы и оптимизм.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вернер А. Л., Васильева М. Н., Данилова О. Г.* Геометрия правильных звездчатых многогранников. СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2018.
2. *Вернер А. Л., Антипова Л. А.* Строение невыпуклых однородных многогранников с выпуклыми гранями. СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2021.
3. *Антипова Л. А.* Конфигурации полярно-двойственных многогранников. Каталановы звезды // Современные проблемы математики и математического образования: Герценовские чтения, 76: сборник научных статей Международной научной конференции. СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2023. Т. 76. С. 326–332.

4. *Messer P. W.* Closed-form expressions for uniform polyhedra and their duals // Discrete & Comput. Geometry. 2002. V. 27. P. 353–375.

5. *Шерстобитов А. В.* Полуоднородные многогранники // Вестн. КГПУ им. В. П. Астафьева. 2012. № 2. С. 158–163.

6. *Антипова Л. А.* Аналоги теоремы Гаусса — Александрова для однородных ориентируемых невыпуклых многогранников с выпуклыми гранями // Мат. структуры и моделирование. 2022. Т. 62, № 2. С. 76–107.

7. *Антипова Л. А., Вернер А. Л.* Пары взаимно полярных звездчатых многогранников и их кривизны. СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2024. Т. 1.

8. *Антипова Л. А.* Аналог теоремы Гаусса — Александрова о площади сферического изображения для невыпуклого многогранного угла без особенностей // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. Т. 221. С. 10–19.

Поступила в редакцию 19 июня 2025 г.
После доработки 23 июля 2025 г.
Принята к публикации 27 июля 2025 г.

Антипова Любовь Александровна (ORCID 0009-0009-8836-3407)
РГПУ им. А. И. Герцена,
кафедра геометрии факультета математики,
Набережная реки Мойки, 48, Санкт-Петербург 191186
pridoroga31@yandex.ru