Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 512.548+515.162.8

КОНСТРУКЦИИ КВАНДЛОВ НАД ГРУППАМИ, МОДУЛЯМИ И ПОЧТИ–КОЛЬЦАМИ

А. Н. Бородин,
М. В. Нещадим, А. А. Симонов

Аннотация. Рассмотрены различные варианты построения обобщенного квандла Александера. Доказано, что с точностью до изоморфизма они сводятся к двум типам. Найдены условия, когда такие квандлы будут абелевыми. Приведена конструкция расширения обобщенного квандла Александера на прямое произведение двух групп. Найдены условия для построения квандла над модулем и почти-кольцом.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.103

Ключевые слова: квандл, обобщенный квандл Александера, дистрибутивность, группа, автоморфизм, антиавтоморфизм, модуль, кольцо, почти-кольцо.

§ 1. Введение

Квандл — это непустое множество с бинарной операцией, удовлетворяющей трем алгебраическим аксиомам [1, 2], которые формализуют три преобразования Райдемайстера [3] плоских диаграмм узлов в трехмерном пространстве. Если рассматривать только второе и третье преобразования Райдемайстера, то получим алгебраическую структуру, которая называется *рэком*.

Исторически понятие *квандла* или *самодистрибутивного группоида* связывают с именами С. В. Матвеева и Джойса. В 1982 г. С. В. Матвеев [1] ввел алгебраическую систему, которую назвал *дистрибутивным группоидом*. Он доказал, что с каждым классическим узлом можно естественным образом связать *праводистрибутивную правую квазигруппу*, которая является его алгебраическим инвариантом и определяет узел с точностью до изотопии и зеркального отражения. В том же году к этому результату независимо пришел Джойс [2], давший найденной структуре название «*квандл*».

Одна из центральных задач теории узлов — задача классификации узлов с точностью до отношения эквивалентности. Построение инвариантов, различающих классы эквивалентности узлов, — основной инструмент решения этой задачи, в частности, построение алгебраических инвариантов и их производных структур, которые, в свою очередь, также являются инвариантами. В связи с этим одной из важных задач является построение новых примеров алгебраических систем, по которым можно строить инварианты узлов. В предлагаемой работе приводятся несколько новых алгебраических конструкций, которые позволяют строить квандлы над группой, модулем и почти-кольцом.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5.(проект FWNF-2026-0029).

Исследуя вопросы дифференцирумости решений функциональных уравнений, Рылль-Нардзевский [4] в 1949 г. ввел *симметричное среднее* и получил дистрибутивную квазигруппу. В 1953 г. Госсу рассмотрел [5] несимметричные средние, далее [6, 7] он не только выделил аксиоматически данный объект, но и построил его представление над произвольной группой. Построенный Госсу квандл над группой называют *обобщенным квандлом Александера.*

По каждому квандлу можно построить решение теоретико-множественного уравнения Янга — Бакстера, квандлы могут быть использованы для построения представлений групп (виртуальных) кос [8]. Конструкции квандлов, помимо теории узлов, появляются в различных областях математики в связи с изучением вопросов теории групп [1, 2, 9], поиском теоретико множественных решений уравнения Янга — Бакстера [10], строением симметрических римановых пространств [11], изучением алгебр Хопфа [12]. Основной целью работы является поиск алгебраических объектов, над которыми можно построить квандлы. Рассматриваются методы построения квандлов над такими объектами. Определяются свойства алгебраических объектов, допускающие построения квандлов. Статья является естественным продолжением работы авторов [13].

Статья имеет следующую структуру. В § 2 приведены основные определения, связанные с квандлами как алгебраическими объектами. Определены четыре типа обобщенных квандлов Александера. В теореме 1 рассмотрены условия, когда в обобщенных квандлах Александера типов (в) и (г) автоморфизм можно заменить антиавтоморфизмом. В теореме 3 доказано, что наборы квандлов типов (а) и (б), построенные над одной и той же группой, одинаковы с точностью до изоморфизма. В теореме 4 приводится конструкция обобщенного квандла Александера на прямом произведении двух групп. В теоремах 5 и 6 рассмотрены условия, когда квандлы Александера, построенные над некоммутативной группой, абелевы. В § 3 приведена конструкция построения квандла над модулем, а в § 4 над почти-кольцом.

Далее в статье везде под дистрибутивностью понимается правая дистрибутивность.

§ 2. Квандлы над группами

Приведем необходимые определения алгебраических объектов.

Определение 1. *Квандлом* называют алгебраическую систему $\langle Q; \circ, / \rangle$ с операциями умножения «$\circ$» и правого деления «$/$», в которой для произвольных $x, y, z \in Q$ выполняются условия:

1) $(x \circ y)/y = x$, $(x/y) \circ y = x$,

2) идемпотентности $x \circ x = x$,

3) дистрибутивности $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

Если $\langle Q; \circ, / \rangle$ является квандлом, то алгебраическая система $\langle Q; /, \circ \rangle$ также является квандлом, который называется *обратным квандлом* [1, пример 4].

Определение 2. Квандл $\langle Q; \circ, / \rangle$ называют *абелевым*, если для произвольных $x, y, z, t \in Q$ справедливо тождество $(x \circ y) \circ (z \circ t) = (x \circ z) \circ (y \circ t)$.

2.1. Обобщенные квандлы Александера. Госсу в работах [6, 7] показал, что над группой G при помощи произвольного автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ можно построить квандл с операцией

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G. \tag{1}$$

Если G — абелева группа, то получившийся квандл абелев. Квандл с операцией (1) называют *обобщенным квандлом Александера.* Более того, под обобщенным квандлом Александера часто понимают квандлы с операциями одного из следующих четырех типов:

$$\text{(а) } x \circ y = y\varphi(y^{-1}x), \quad \text{(б) } x \circ y = \varphi(xy^{-1})y,$$

$$\text{(в) } x \circ y = y\varphi(xy^{-1}), \quad \text{(г) } x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y,$$

где $\varphi : G \to G$ — автоморфизм группы G. Обратные операции строятся при помощи обратного автоморфизма $\varphi^{-1} : G \to G$:
(а) $x/y = y\varphi^{-1}(y^{-1}x)$,
(б) $x/y = \varphi^{-1}(xy^{-1})y$,
(в) $x/y = \varphi^{-1}(y^{-1}x)y$,
(г) $x/y = y\varphi^{-1}(xy^{-1})$.

В случаях (а) и (б) операция и ее обратная принадлежат одному и тому же типу. В случаях (в) и (г) — разным типам, т. е. для операции типа (в) ее обратная принадлежит типу (г) и наоборот. Известно, что если $\langle Q; \circ, / \rangle$ — квандл, то $\langle Q; /, \circ \rangle$ также является квандлом, по этой причине логично два последних типа объединить в один. Если группа коммутативна, то все типы совпадают.

Как было выяснено ранее [13], квандлы также можно построить заменой автоморфизма центральным антиавтоморфизмом в случаях, если они принадлежат типам (а) и (б).

Теорема 1. *Квандлы с операциями типов* (в), (г) *допускают замену автоморфизма на антиавтоморфизмы только в случае, если это нильпотентная группа ступени* 2.

Доказательство. Пусть σ — антиавтоморфизм и операция $x \circ y = y\sigma(xy^{-1})$ задает структуру квандла на группе G. Аксиомы идемпотентности и разрешимости очевидно выполняются.

Проверим дистрибутивность. С одной стороны, справедливо равенство

$$(x \circ y) \circ z = (y\sigma(xy^{-1})) \circ z = z\sigma(y\sigma(xy^{-1})z^{-1}) = z\sigma(z^{-1})\sigma^2(xy^{-1})\sigma(y).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}(x \circ z) \circ (y \circ z) &= (z\sigma(xz^{-1})) \circ (z\sigma(yz^{-1})) \\ &= z\sigma(yz^{-1})\sigma(z\sigma(xz^{-1})(z\sigma(yz^{-1}))^{-1}) \\ &= z\sigma(yz^{-1})\sigma(z\sigma(xz^{-1})(z\sigma(z^{-1})\sigma(y))^{-1}) = z\sigma(yz^{-1})\sigma(z\sigma(xz^{-1})\sigma(zy^{-1})z^{-1}) \\ &= z\sigma(z^{-1}yz^{-1})\sigma^2(zy^{-1}xz^{-1})\sigma(z).\end{aligned}$$

Следовательно, должно быть выполнено равенство

$$\sigma^2(xy^{-1})\sigma(y) = \sigma(z^{-1}y)\sigma^2(zy^{-1}xz^{-1})\sigma(z).$$

Подействуем на это равенство обратным антиавтоморфизмом σ^{-1}:

$$\sigma(xy^{-1}) = y^{-1}z\sigma(zy^{-1}xz^{-1})z^{-1}y,$$

и произведем замену $xy^{-1} \mapsto x$, $y \mapsto y$, $z \mapsto z$:

$$z^{-1}y\sigma(x)y^{-1}z = \sigma(zy^{-1}xyz^{-1}). \tag{2}$$

Это равенство выполнено при произвольных x, y, z. Положим $y = e$, тогда

$$y\sigma(x)y^{-1} = \sigma(y^{-1}xy). \tag{3}$$

Получили тождество, меняющее сопряжение. Сопрягая еще раз:

$$z^{-1}y\sigma(x)y^{-1}z = z^{-1}\sigma(y^{-1}xy)z = \sigma(zy^{-1}xyz^{-1}),$$

получим первоначальное равенство (2), значит, можно обойтись только равенством (3), которое перепишем в виде

$$\sigma(y^{-1})y\sigma(x) = \sigma(x)\sigma(y^{-1})y.$$

Из произвольности x, y следует, что $\sigma(y^{-1})y$ лежит в центре группы, следовательно, $\sigma(y) = c(y)y$, где $c(y) \in Z(G)$ — центр группы G.

Из равенства $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$ получаем $c(y)c(x)yx = c(xy)xy$ или

$$x^{-1}y^{-1}xy = [x, y] = c(xy)^{-1}c(y)c(x).$$

Следовательно, коммутатор любых двух элементов лежит в центре группы G и группа G нильпотентна ступени 2.

Как замечено в работе [13], антиавтоморфизм σ можно представить в виде $\sigma = \iota f$, где $\iota : x \mapsto x^{-1}$, $x \in G$, — инволюция и f — некоторый автоморфизм группы G. Если антиавтоморфизм σ удовлетворяет соотношению $\sigma(x) = c(x)x$, где $c(x) \in Z(G)$, то автоморфизм f удовлетворяет соотношению

$$f(x) = x^{-1}\gamma(x), \quad \text{где } \gamma(x) \in Z(G).$$

Теорема 2. *Пусть G — нильпотентная группа ступени нильпотентности 2 и задано отображение $\gamma : G \to Z(G)$ такое, что*

$$\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)[x, y], \quad x, y \in G.$$

Тогда отображение $f : G \to G$ такое, что

$$f(x) = x^{-1}\gamma(x), \quad x \in G,$$

является автоморфизмом группы G, причем

1) *сужение γ на $Z(G)$ — эндоморфизм центра $Z(G)$,*

2) *сужение γ на коммутант G' — тождественное отображение.*

Доказательство. Проверим, что f — автоморфизм группы G. Для произвольных $x, y \in G$ имеем

$$\begin{aligned} f(xy) = (xy)^{-1}\gamma(xy) = (xy)^{-1}\gamma(x)\gamma(y)[x, y] &= \gamma(x)\gamma(y)[x, y](xy)^{-1} \\ &= \gamma(x)\gamma(y)x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y). \end{aligned}$$

Проверим, что γ — эндоморфизм центра $Z(G)$. Для произвольных $x, y \in Z(G)$ имеем

$$\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)[x, y] = \gamma(x)\gamma(y).$$

Проверим, что сужение γ на коммутант G' — тождественное отображение. Для произвольных $x, y \in G$ имеем

$$\begin{aligned} \gamma([x, y]) &= \gamma(x^{-1}y^{-1}xy) = \gamma(x^{-1}y^{-1})\gamma(xy)[x^{-1}y^{-1}, xy] \\ &= \gamma(x^{-1})\gamma(y^{-1})[x^{-1}, y^{-1}]\gamma(x)\gamma(y)[x, y][x^{-1}y^{-1}, xy] \end{aligned}$$

$$= \gamma(x^{-1})\gamma(x)\gamma(y^{-1})\gamma(y)[x, y].$$

Так как $\gamma(e) = \gamma(e \cdot e) = \gamma(e)\gamma(e)[e, e] = (\gamma(e))^2$, то $\gamma(e) = e$. Следовательно,

$$e = \gamma(e) = \gamma(x^{-1}x) = \gamma(x^{-1})\gamma(x)[x^{-1}, x] = \gamma(x^{-1})\gamma(x).$$

Итак, $\gamma([x, y]) = [x, y]$.

Пример. Пусть группа G имеет следующее представление:

$$G = \langle x, y, z \| [x, z] = [y, z] = 1,\ [[x, y], g] = 1,\ \forall\, g \in G\rangle.$$

Тогда коммутант $G' = \langle [x, y]\rangle$ — бесконечная циклическая группа с порождающим $[x, y]$, центр $Z(G) = \langle [x, y]\rangle \times \langle z\rangle$ — свободная абелева группа ранга 2 и отображение

$$\gamma : Z(G) \to Z(G), \quad \gamma([x, y]) = [x, y], \quad \gamma(z) = z^{-1}$$

удовлетворяет условию теоремы 2.

Для дальнейших построений нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть G — группа, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ и задано произвольное биективное отображение h группы G на себя. Тогда операции*

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x * y = h^{-1}(\varphi(h(x)h(y)^{-1})h(y)), \quad x, y \in G,$$

определяют изоморфные структуры квандлов на группе G.

Доказательство. Действительно, $x * y = h^{-1}(h(x) \circ h(y))$, т. е. $h(x * y) = h(x) \circ h(y)$ и отображение $x \mapsto h(x)$, $x \in G$, задает изоморфизм квандлов $\langle G, *\rangle$, $\langle G, \circ\rangle$.

Пусть G — некоммутативная группа. Рассмотрим два множества квандлов

$$A = \{Q_a(\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(G)\}, \quad B = \{Q_b(\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(G)\},$$

где квандлы $Q_a(\varphi)$, $Q_b(\varphi)$ строятся над группой G и определяются операциями типа (а) и (б) соответственно по автоморфизму $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

Отвечая на вопрос, поставленный в [13, вопрос 1], докажем теорему.

Теорема 3. *Пусть G — группа, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Тогда имеют место следующие равенства:*

$$\iota(y\varphi(y^{-1}x)) = (\iota\varphi\iota)(\iota(x)\iota(y)^{-1})\iota(y), \quad \iota(\varphi(xy^{-1})y) = \iota(y)(\iota\varphi\iota)(\iota(y)^{-1}\iota(x))$$

для любых $x, y \in G$. Следовательно, каждому квандлу из множества A, построенному по автоморфизму $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, соответствует изоморфный ему квандл из множества B, построенный по автоморфизму $\iota\varphi\iota$ и, обратно, каждому квандлу из множества B, построенному по автоморфизму $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, соответствует изоморфный ему квандл из множества A, построенный по автоморфизму $\iota\varphi\iota$.

Если $\varphi_g : x \mapsto gxg^{-1}$, $x \in G$, — внутренний автоморфизм группы G, индуцированный элементом $g \in G$, то квандл $Q_a(\varphi_g)$ совпадает с некоторым квандлом $Q_b(\varphi)$, если и только если элемент g лежит во втором гиперцентре группы G. Обратно, квандл $Q_b(\varphi_g)$ совпадает с некоторым квандлом $Q_a(\varphi)$, если и только если элемент g лежит во втором гиперцентре группы G.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из приведенных равенств, которые проверяются непосредственными вычислениями.

Пусть $\varphi_g : x \mapsto gxg^{-1}$, $x \in G$, — внутренний автоморфизм группы G, индуцированный элементом $g \in G$, и квандл $Q_a(\varphi_g)$ совпадает с некоторым квандлом $Q_b(\varphi)$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Тогда для произвольных $x, y \in G$ выполнено равенство

$$yg(y^{-1}x)g^{-1} = \varphi(xy^{-1})y.$$

Полагая $x = ty$, получим

$$yg(y^{-1}ty)g^{-1} = \varphi(t)y$$

или

$$\varphi(t) = (ygy^{-1})t(ygy^{-1})^{-1}.$$

Так как t, y — произвольные элементы группы G, а левая часть равенства не зависит от y, то должно выполняться равенство

$$(ygy^{-1})t(ygy^{-1})^{-1} = gtg^{-1}$$

или

$$[g, y^{-1}]t = t[g, y^{-1}].$$

Из произвольности элемента t следует, что коммутатор $[g, y^{-1}]$ лежит в центре группы G, а из произвольности элемента y следует, что элемент g лежит во втором гиперцентре группы G.

Таким образом, в качестве ответа на [13, вопрос 1] можно сказать, что если группа G коммутативна, то операции типов (а) и (б) задают один и тот же квандл. Если группа некоммутативна, то эти операции над одной и той же группой G задают два набора квандлов, зависящие от действующих на группе автоморфизмов φ. Эти наборы не одинаковы. Их можно считать одинаковыми только с точностью до изоморфизма входящих квандлов.

В итоге вместо четырех типов обобщенных квандлов Александера независимыми можно считать только два типа. Далее под квандлом первого типа будем понимать квандлы типов (а) и (б), а под квандлом второго типа — квандлы типов (в) и (г).

2.2. Квандл на прямом произведении групп. Рассмотрим группы G и H, для которых существует гомоморфизм $f : G \to Z(H)$. Для такого гомоморфизма справедливо равенство $f(xy) = f(yx)$, для произвольных $x, y \in G$.

Для произвольных автоморфизмов $\varphi_1 \in \mathrm{Aut}(G)$ и $\varphi_2 \in \mathrm{Aut}(H)$ построим обобщенные квандлы Александера $x_i \circ_i y_i = y_i\varphi_i(y_i^{-1}x_i)$, где $i = 1, 2$, $x_1, y_1 \in G$, $x_2, y_2 \in H$. При помощи построенных квандлов и гомоморфизма f построим новую операцию

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = \big(x_1 \circ_1 y_1, f\big(y_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 y_2)\big). \tag{4}$$

Теорема 4. *Операция* (4) *задает структуру квандла на прямом произведении* $G \times H$, *если автоморфизм* φ_2 *на центре группы* H *действует тождественно,* $\varphi_2|_{Z(H)} = \mathrm{id}$.

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in G \times H$. Рассмотрим произведение

$$x \circ y = \big(y_1\varphi_1\big(y_1^{-1}x_1\big), f\big(y_1^{-1}x_1\big)y_2\varphi_2\big(y_2^{-1}x_2\big)\big) = \big(x_1 \circ_1 y_1, f\big(y_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 y_2)\big).$$

Имеем

$$x \circ x = \big(x_1\varphi_1\big(x_1^{-1}x_1\big), f\big(x_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 x_2)\big) = (x_1\varphi_1(e_1), f(e_1)x_2) = x.$$

Следовательно, выполнена инволютивность. Проверим разрешимость. Если

$$x \circ y = \big(y_1\varphi_1\big(y_1^{-1}x_1\big), f\big(y_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 y_2)\big) = (z_1, z_2) = z,$$

то

$$x_1 = z_1/_1y_1, \quad x_2 = z_2\big(f\big(y_1^{-1}x_1\big)\big)^{-1}/_2y_2,$$

где $/_1$, $/_2$ — операции деления в первом и втором кандлах.

Проверим теперь выполнение дистрибутивности. С одной стороны, выполняется

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= \big(x_1 \circ_1 y_1, f\big(y_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 y_2)\big) \circ z \\ &= \big((x_1 \circ_1 y_1) \circ_1 z_1, f\big(z_1^{-1}(x_1 \circ_1 y_1)\big)\big(f\big(y_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 y_2) \circ_2 z_2\big)\big).\end{aligned}$$

Распишем вторую компоненту:

$$\begin{aligned}&f\big(z_1^{-1}(x_1 \circ_1 y_1)\big)\big(f\big(y_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 y_2) \circ_2 z_2\big) \\ &\quad= f\big(z_1^{-1}y_1\varphi_1\big(y_1^{-1}x_1\big)\big)\big(z_2\varphi_2\big(z_2^{-1}f\big(y_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 y_2)\big)\big) \\ &\quad= f\big(z_1^{-1}y_1\varphi_1\big(y_1^{-1}x_1\big)\big)\varphi_2\big(f\big(y_1^{-1}x_1\big)\big)((x_2 \circ_2 y_2) \circ_2 z_2) \\ &\quad= f\big(\varphi_1\big(y_1^{-1}x_1\big)\big)f\big(z_1^{-1}x_1\big)((x_2 \circ_2 z_2) \circ_2 (y_2 \circ_2 z_2)).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}(x \circ z) \circ (y \circ z) &= \big(x_1 \circ_1 z_1, f\big(z_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 z_2)\big) \circ \big(y_1 \circ_1 z_1, f\big(z_1^{-1}y_1\big)(y_2 \circ_2 z_2)\big) \\ &= ((x_1 \circ_1 z_1) \circ_1 (y_1 \circ_1 z_1)),\end{aligned}$$

$$f((y_1 \circ_1 z_1)^{-1}(x_1 \circ_1 z_1))\big(f\big(z_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 z_2) \circ_2 f\big(z_1^{-1}y_1\big)(y_2 \circ_2 z_2)\big).$$

Распишем вторую компоненту:

$$\begin{aligned}&f((y_1 \circ_1 z_1)^{-1}(x_1 \circ_1 z_1))\big(f\big(z_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 z_2) \circ_2 f\big(z_1^{-1}y_1\big)(y_2 \circ_2 z_2)\big) \\ &\quad= f\big(\big(z_1\varphi_1\big(z_1^{-1}y_1\big)\big)^{-1}\big(z_1\varphi_1(z_1^{-1}x_1)\big)\big) \\ &\quad\times f\big(z_1^{-1}y_1\big)(y_2 \circ_2 z_2)\varphi_2\big(\big(f\big(z_1^{-1}y_1\big)(y_2 \circ_2 z_2)\big)^{-1}f\big(z_1^{-1}x_1\big)(x_2 \circ_2 z_2)\big) \\ &\quad= f\big(\varphi_1\big(y_1^{-1}z_1\big)\varphi_1\big(z_1^{-1}x_1\big)\big)f\big(z_1^{-1}y_1\big)f\big(y_1^{-1}z_1\big)f\big(z_1^{-1}x_1\big)\big((x_2 \circ_2 z_2) \circ_2 (y_2 \circ_2 z_2)\big) \\ &\quad= f\big(\varphi_1\big(y_1^{-1}x_1\big)\big)f\big(z_1^{-1}x_1\big)((x_2 \circ_2 z_2) \circ_2 (y_2 \circ_2 z_2)).\end{aligned}$$

Обе части совпадают, следовательно, дистрибутивность выполняется.

Можно показать, что для кандла второго типа конструкция из теоремы 4 не приводит к построению нового кандла.

В случае $\varphi_1 = \mathrm{id}$ результат частично совпадает с результатом [13, теорема 1][1)] тривиального кандла с кручением.

2.3. Абелевы кандлы. Известно, что над абелевой группой G обобщенный кандл Александера является абелевым.

[1)]Заметим, что в [13, теорема 1] без изменения самого доказательства условие теоремы можно расширить так, что вместо «группы с абелевой подгруппой» можно рассматривать «полугруппу с абелевой подгруппой».

Теорема 5. *Обобщенный квандл Александера над некоммутативной группой G с умножением $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$ задает абелев квандл тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in G$ выполнено равенство $\psi(x)\psi(y) = \psi(y)\psi(x)$, где отображение ψ задается формулой $\psi(x) = \varphi(x^{-1})x$.*

Доказательство. Пусть квандл с операцией $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$ абелев, тогда, с одной стороны, запишем

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ (z \circ t) &= (\varphi(xy^{-1})y) \circ (\varphi(zt^{-1})t) \\ &= (\varphi(\varphi(xy^{-1})y(\varphi(zt^{-1})t)^{-1})(\varphi(zt^{-1})t)) \\ &= \varphi(\varphi(xy^{-1})yt^{-1}\varphi(tz^{-1}))\varphi(zt^{-1})t = \varphi^2(xy^{-1})\varphi(yt^{-1})\varphi^2(tz^{-1})\varphi(zt^{-1})t.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(x \circ z) \circ (y \circ t) = \varphi^2(xz^{-1})\varphi(zt^{-1})\varphi^2(ty^{-1})\varphi(yt^{-1})t.$$

С учетом абелевости квандла приравняем правые части. Сокращая справа на t, придем к равенству

$$\varphi^2(xy^{-1})\varphi(yt^{-1})\varphi^2(tz^{-1})\varphi(zt^{-1}) = \varphi^2(xz^{-1})\varphi(zt^{-1})\varphi^2(ty^{-1})\varphi(yt^{-1}).$$

Сделав замену $x \mapsto xt$, $y \mapsto yt$, $z \mapsto zt$ и сначала действуя на обе части равенства обратным автоморфизмом φ^{-1}, а потом сокращая полученное выражение слева на $\varphi(x)$, придем к равенству

$$\varphi(y^{-1})y\varphi(z^{-1})z = \varphi(z^{-1})z\varphi(y^{-1})y,$$

откуда следует, что $\psi(z)$ и $\psi(y)$ коммутируют.

В обратную сторону утверждение очевидно, так как все проведенные рассуждения обратимы.

Замечание 1. Если отображение $\psi(x) = \varphi(x^{-1})x$ принадлежит $Z(G)$ для любых $x \in G$, то ψ — эндоморфизм. Действительно,

$$\psi(xy) = \varphi((xy)^{-1})xy = \varphi(y^{-1})\varphi(x^{-1})xy = \varphi(x^{-1})x\varphi(y^{-1})y = \psi(x)\psi(y).$$

Пример. Рассмотрим некоммутативную группу $G = \mathbb{R}^* \leftthreetimes \mathbb{R}$ с умножением $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2)$ и автоморфизмом $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, ax_2)$ для некоторого $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Отображение $\psi(x_1, x_2) = \big(1, \frac{x_2}{x_1}(1 - a)\big)$ не задает никакого эндоморфизма. Полученный обобщенный квандл Александера и отображение ψ удовлетворяют условию теоремы 5, следовательно, квандл с операцией $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = \big(x_1, (1 - a)x_1y_1^{-1}y_2 + ax_2\big)$ абелев.

Теорема 6. *Обобщенный квандл Александера над некоммутативной группой G с умножением $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$ задает абелев квандл тогда и только тогда, когда группа G нильпотентна ступени 2, а автоморфизм φ на коммутанте G' действует тождественно, $\varphi|_{G'} = \mathrm{id}$.*

Доказательство. Пусть квандл с операцией $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$ абелев. Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ (z \circ t) &= (\varphi(y^{-1}x)y) \circ (\varphi(t^{-1}z)t) = \varphi((\varphi(t^{-1}z)t)^{-1}\varphi(y^{-1}x)y)\varphi(t^{-1}z)t \\ &= \varphi(t^{-1}\varphi(z^{-1}t)\varphi(y^{-1}x)y)\varphi(t^{-1}z)t = \varphi(t^{-1})\varphi^2(z^{-1}t)\varphi^2(y^{-1}x)\varphi(y)\varphi(t^{-1}z)t\end{aligned}$$

и, с другой,

$$(x \circ z) \circ (y \circ t) = \varphi(t^{-1})\varphi^2(y^{-1}t)\varphi^2(z^{-1}x)\varphi(z)\varphi(t^{-1}y)t.$$

Приравнивая оба выражения и сокращая справа на t, а слева на $\varphi(t^{-1})$ и действуя на обе части равенства обратным автоморфизмом φ^{-1}, придем к равенству

$$\varphi(z^{-1}t)\varphi(y^{-1}x)yt^{-1}z = \varphi(y^{-1}t)\varphi(z^{-1}x)zt^{-1}y.$$

Перепишем его в виде

$$\varphi(x^{-1}zt^{-1}yz^{-1}ty^{-1}x) = zt^{-1}yz^{-1}ty^{-1}. \tag{5}$$

Обозначая слово

$$zt^{-1}yz^{-1}ty^{-1} = w, \tag{6}$$

перепишем равенство (5):

$$\varphi(x^{-1}wx) = w \quad \text{или} \quad \varphi^{-1}(w) = x^{-1}wx.$$

Так как это равенство выполняется для произвольного элемента $x \in Q$, то

$$\varphi(w) = w \quad \text{и} \quad x^{-1}wx = w, \quad x \in Q.$$

Следовательно, w принадлежит центру группы G. Полагая $y = e$, получаем, что коммутатор произвольных элементов $z, t \in G$ также лежит в центре группы G, т. е. группа G нильпотентна ступени 2. Так как

$$w = zt^{-1}yz^{-1}ty^{-1} = [z^{-1}, y^{-1}t][t, y^{-1}],$$

то слово w лежит в коммутанте группы G и любой коммутатор получается из слова w подходящим выбором элементов $y, z, t \in G$. Следовательно, автоморфизм φ на коммутанте G' группы G действует тождественно. Поскольку все проведенные рассуждения обратимы, справедливо и обратное утверждение.

§ 3. Квандлы над модулем

В [13] была рассмотрена конструкция построения квандлов над свободными модулями. Покажем, что квандл можно построить над произвольным модулем M, определенным над коммутативным кольцом R, если для него можно определить билинейную кососимметрическую функцию $f : M \times M \to R$.

Теорема 7. *Пусть M — модуль, определенный над коммутативным кольцом R, и $f : M \times M \to R$ — билинейная кососимметрическая функция. Для произвольных $x, y \in M$ определим операции $x \circ y = x + f(x, y)y$ и $x/y = x - f(x, y)y$, тогда алгебра $\langle M; \circ, / \rangle$ является квандлом.*

Доказательство. Действительно, операция $x/y = x - f(x, y)y$ является обратной:

$$\begin{aligned}(x \circ y)/y = x \circ y - f(x \circ y, y)y &= x + f(x, y)y - f(x + f(x, y)y, y)y \\ &= x + f(x, y)y - f(x, y)y - f(x, y)f(y, y)y = x.\end{aligned}$$

Справедливо выполнение идемпотентности: $x \circ x = x + f(x, x)x = x$.

Проверим выполнение дистрибутивности. Левую часть равенства можно представить в виде

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z = x \circ y + f(x \circ y, z)z &= x + f(x, y)y + f(x + f(x, y)y, z)z \\ &= x + f(x, y)y + f(x, z)z + f(x, y)f(y, z)z,\end{aligned}$$

правую часть — в виде

$$
\begin{gathered}
(x \circ z) \circ (y \circ z) = x \circ z + f(x \circ z, y \circ z)(y \circ z) \\
= x + f(x,z)z + f(x + f(x,z)z, y + f(y,z)z)(y + f(y,z)z) \\
= x + f(x,z)z + f(x, y + f(y,z)z) \\
\times (y + f(y,z)z) + f(x,z)f(z, y + f(y,z)z)(y + f(y,z)z) \\
= x + f(x,z)z + f(x,y)(y + f(y,z)z) + f(y,z)f(x,z)(y + f(y,z)z) \\
+ f(x,z)f(z,y)(y + f(y,z)z) + f(x,z)f(y,z)f(z,z)(y + f(y,z)z) \\
= x + f(x,z)z + f(x,y)(y + f(y,z)z) + f(y,z)f(x,z)(y + f(y,z)z) \\
- f(x,z)f(y,z)(y + f(y,z)z) = x + f(x,z)z + f(x,y)(y + f(y,z)z).
\end{gathered}
$$

Обе части совпадают, дистрибутивность выполнена.

§ 4. Квандлы над почти-кольцами

Определение 3. *Правым почти-кольцом* будем называть [14, § 2] алгебраическую систему $\langle R; +, \cdot, -, 0\rangle$ с двумя бинарными операциями, в которой $\langle R; +, -, 0\rangle$ является группой, а $\langle R; \cdot, 0\rangle$ — полугруппой с нулем, т. е. для произвольного $x \in R$ справедливо $0 \cdot x = 0$. Обе операции связаны соотношением так, что для произвольных $x, y, z \in R$ выполнена правосторонняя дистрибутивность

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Для уменьшения скобок по традиции будем считать, что полугрупповая операция имеет больший приоритет по сравнению с аддитивной. Операция $(-) : R \to R$ является унарной операцией взятия обратного элемента в группе R. Так же введем упрощение для уменьшения скобок, считая $x + (-y) = x - y$.

Далее будем рассматривать почти-кольца R, в которых фиксировано некоторое непустое подмножество $R^* \subset R \setminus \{0\}$ такое, что R^* — группа относительно полугрупповой операции умножения.

Если для произвольного $a \in R^*$ определить операции $x \circ y = (x - y)a + y$ и $x/y = (x - y)a^{-1} + y$, то они задают обобщенный квандл Александера $\langle R; \circ, /\rangle$.

Теорема 8. *Операция $x \circ y = a(x - y) + y$ и $x/y = a^{-1}(x - y) + y$ для $a \in R^*$ задает квандл $\langle R; \circ, /\rangle$ тогда и только тогда, когда выполнено тождество*

$$a(a(u - t) + t) = a(au - at) + at \tag{7}$$

для произвольных $u, t \in R$.

Доказательство. Идемпотентность и разрешимость легко проверяются. Проверим выполнение дистрибутивности. С одной стороны, справедливо равенство

$$
\begin{aligned}
(x \circ y) \circ z = a((x \circ y) - z) + z = a((a(x - y) + y) - z) + z \\
= a(a(x - y) + y - z) + z.
\end{aligned}
$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
(x \circ z) \circ (y \circ z) = (a(x - z) + z) \circ (a(y - z) + z) \\
= a((a(x - z) + z) - (a(y - z) + z)) + (a(y - z) + z) \\
= a(a(x - z) - a(y - z)) + a(y - z) + z.
\end{aligned}
$$

Таким образом, для выполнения дистрибутивности должно выполняться равенство

$$a(a(x-y)+y-z) = a(a(x-z)-a(y-z)) + a(y-z).$$

Сделав замены $y - z = t$ и $x - z = u$, придем к выражению (7). В обратную сторону утверждение очевидно, так как все преобразования обратимы.

Замечание 2. Если справедлива левосторонняя дистрибутивность, то равенство (7) выполнено автоматически.

Пример. Рассмотрим почти-кольцо $\langle \mathbb{R}^3; \oplus, \odot, \ominus, 0\rangle$ с операцией в мультипликативной полугруппе:

$$x \odot y = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2, x_1y_3 + x_2(1 - y_1) + x_3y_1),$$

и операцией в аддитивной некоммутативной группе:

$$x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_1y_2 - x_2y_1),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Построим квандл с операцией

$$\begin{aligned} x \circ y &= a \odot (x \ominus y) \oplus y \\ &= (a_1(x_1 - y_1) + y_1, a_1(x_2 - y_2) + y_2, a_1(x_3 - y_3) + y_3 + a_3(x_1 - y_1)), \end{aligned}$$

где $a = (a_1, 0, a_3)$ и $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a_3 \in \mathbb{R}$. Прямым вычислением можно убедиться, что квандл является абелевым, левосторонняя дистрибутивность в почти-кольце не выполняется, кроме того,

$$a \odot (x \oplus y) \neq (a \odot x) \oplus (a \odot y),$$

но выполнено равенство (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев С. В.* Дистрибутивные группоиды в теории узлов // Мат. сб. 1982. Т. 119, № 1. С. 78–88.
2. *Joyce D.* A classifying invariant of knots: the knot quandle // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 23. P. 37–65.
3. *Reidemeister K.* Elementare Begründung der Knotentheorie // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1926. V. 5. P. 24–32.
4. *Ryll-Nardzewski C.* Sur les moyennes // Studia Math. 1949. V. 11. P. 31–37.
5. *Hosszu M.* On the functional equation of distributivity // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. 1953. V. 4, N 1–2. P. 159–167.
6. *Госсу М.* Несимметричные средние // Colloq. Math. 1957. V. 5. P. 32–42.
7. *Hosszu M.* Nonsymmetric means // Math. Debrecen. 1959. V. 6. P. 1–9.
8. *Bardakov V., Nasybullov T.* Multi-switches and representations of braid groups // J. Algebra Appl. 2024. V. 23, N 3. 2430003.
9. *Nelson S.* The combinatorial revolution in knot theory // Notices Am. Math. Soc. 2011. V. 58, N 1. P. 1553–1561.
10. *Eisermann M.* Yang–Baxter deformations of quandles and racks // Algebr. Geom. Topol. 2005. V. 5. P. 537–562.
11. *Loos O.* Reflexion spaces and homogeneous symmetric spaces // Bull. Am. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 250–253.
12. *Andruskiewitsch N., Grana M.* From racks to pointed Hopf algebras // Adv. Math. 2003. V. 178, N 2. P. 177–243.
13. *Симонов А. А., Нещадим М. В., Бородин А. Н.* Конструкции квандлов над группами и кольцами // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 577–590.

14. *Плоткин Б. И.* Лекции по общей алгебре. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 27 июня 2025 г.
После доработки 8 августа 2025 г.
Принята к публикации 20 августа 2025 г.

Бородин Александр Николаевич ORCID 0009-0004-4067-5608)
Горно-алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 659700
`serajsova@yandex.ru`

Нещадим Михаил Владимирович (ORCID 0000-0002-9463-7496)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`neshch@math.nsc.ru`

Симонов Андрей Артёмович (ORCID 0000-0002-8619-6766)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск 630090
`a.simonov@g.nsu.ru`