Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 517.983:517.986

ГИПОНОРМАЛЬНЫЕ ИЗМЕРИМЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА. IV

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$. Для нормального оператора A из $\mathscr{M}$ найдено условие на τ-интегрируемый оператор B, при выполнении которого оператор $A+B$ нормален. Для τ-интегрируемого с квадратом оператора в терминах следовых неравенств установлены эквивалентные условия его нормальности. Для оператора из $\mathscr{M}$ найден критерий гипонормальности в терминах следовых неравенств. Показано, что произвольная натуральная степень произведения PQ проекторов P и Q из $\mathscr{M}$ гипонормальна тогда и только тогда, когда $PQ = QP$. Получены операторные неравенства для степеней гипонормальных сжатий. Показано, что любая натуральная степень гипонормальной частичной изометрии является гипонормальной частичной изометрией с тем же начальным пространством.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.102

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, гипонормальный оператор.

1. Введение

Гипонормальным ограниченным операторам в гильбертовом пространстве посвящены работы многих исследователей (см., например, [1–10] и библиографию в них). В контексте полуконечных алгебр фон Неймана автором были опубликованы работы [11–19] о свойствах (неограниченных) τ-измеримых гипонормальных операторов (см. также [20]). Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов в $\mathscr{M}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$. Перечислим основные результаты статьи; некоторые из них являются новыми даже в случае алгебры $\mathscr{M} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ с $\tau = \mathrm{tr}$. Пусть оператор $A \in \mathscr{M}$ нормален и $B \in L_1(\mathscr{M}, \tau) \cap L_2(\mathscr{M}, \tau)$. Если оператор $T := A + B$ гипонормален, то T нормален (теорема 1). Для оператора $A \in L_2(\mathscr{M}, \tau)$ следующие условия эквивалентны: (i) A нормален; (ii) $\tau(PA^*AP) \geq \tau(PAA^*P)$ для всех $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$; (iii) $\tau(PA^*AP) \leq \tau(PAA^*P)$ для всех $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ (теорема 2). Оператор $A \in \mathscr{M}$ гипонормален тогда и только тогда, когда $\tau(PA^*AP) \geq \tau(PAA^*P)$ для всех $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ с $\tau(P) < +\infty$. Если оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})_1$ гипонормален, то для всех $3 \leq n \in \mathbb{N}$ имеем $(A^{*n}A^n)^{1/4} \geq (A^*)^{n-2}A^{n-2}$ (теорема 4). Пусть $P, Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$, $n \in \mathbb{N}$. Оператор $(PQ)^n$ гипонормален тогда и только тогда, когда $PQ = QP$

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

(теорема 5). Если частичная изометрия $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ гипонормальна, то оператор U^n также является гипонормальной частичной изометрией и $U^{*n}U^n = U^*U$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ (следствие 5). По-видимому, некоторые наши утверждения переносятся и на локально измеримые операторы из [21].

2. Определения и обозначения

Пусть $\mathscr{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathscr{M}$, I — единица $\mathscr{M}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$. Пусть $\mathscr{M}^+$ — конус положительных элементов из $\mathscr{M}$, $\|\cdot\|$ — C^*-норма на $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_1 = \{X \in \mathscr{M} : \|X\| \le 1\}$ — единичный шар алгебры $\mathscr{M}$. Для $P, Q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ пишем $P \sim Q$ (эквивалентность Мюррея — фон Неймана), если $P = U^*U$ и $Q = UU^*$ для некоторого $U \in \mathscr{M}$. Для $(P_n)_{n=1}^\infty \subset \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ точная нижняя грань $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} P_n \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ определяется равенством

$$\left(\bigwedge_{n=1}^{\infty} P_n\right)\mathscr{H} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n\mathscr{H}.$$

Оператор $V \in \mathscr{M}$ называется *изометрией*, если $V^*V = I$; *коизометрией*, если V^* является изометрией. Отображение $\varphi : \mathscr{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathscr{M}^+$, $\lambda \ge 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathscr{M}$. След φ называется

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathscr{M}^+$, $X \ne 0$;
- *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathscr{M}^+) \Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$;
- *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathscr{M}^+, Y \le X, \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathscr{M}^+$ (см. [22, гл. V, § 2; 23, гл. 1, § 1.15]).

Оператор в $\mathscr{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathscr{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathscr{M}'$ алгебры $\mathscr{M}$. Далее всюду τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}} = \{P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}, \tau(P) < +\infty\}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathscr{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathscr{H}$ область определения $\mathscr{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathscr{H} \subset \mathscr{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathscr{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций (см. [24, гл. IX; 23, гл. 2, § 2.3]). Для семейства $\mathscr{L} \subset S(\mathscr{M}, \tau)$ обозначим через $\mathscr{L}^+$ и $\mathscr{L}^{\mathrm{h}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathscr{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\le$. Если $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение X, то $U \in \mathscr{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$. Оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ называется *гипонормальным*, если $A^*A \ge AA^*$; *когипонормальным*, если оператор A^* гипонормален. Через $\mu(t; X)$ обозначим *функцию сингулярных значений* оператора $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(\cdot; X) : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, заданную формулой $\mu(t; X) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}, \tau(P^\perp) \le t\}$, $t > 0$.

Лемма 1 [25]. *Пусть $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $A, B \in \mathscr{M}$. Тогда*
(i) $\mu(t; X) = \mu(t; |X|) = \mu(t; X^*)$ *для всех* $t > 0$;
(ii) *если* $|X| \le |Y|$, *то* $\mu(t; X) \le \mu(t; Y)$ *для всех* $t > 0$;
(iii) $\mu(t; AXB) \le \|A\|\,\|B\|\,\mu(t; X)$ *для всех* $t > 0$;

(iv) $\mu(t; f(|X|)) = f(\mu(t; X))$ *для всех непрерывных функций* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *с* $f(0) = 0$ *и* $t > 0$.

Множество $S_0(\mathscr{M}, \tau) = \{X \in S(\mathscr{M}, \tau) : \ \mu(\infty; X) := \lim\limits_{t\to\infty} \mu(t; X) = 0\}$ τ-компактных операторов является идеалом в $S(\mathscr{M}, \tau)$. Пусть m — линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Ассоциированное с $(\mathscr{M}, \tau)$ некоммутативное L_p-пространство Лебега ($1 \le p < +\infty$) может быть определено как $L_p(\mathscr{M}, \tau) = \{X \in S(\mathscr{M}, \tau) : \mu(\cdot; X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$ с нормой $\|X\|_p = \|\mu(\cdot; X)\|_p$, $X \in L_p(\mathscr{M}, \tau)$. Продолжение следа τ на все банахово пространство $L_1(\mathscr{M}, \tau)$ будем обозначать той же буквой τ.

Если $\mathscr{M} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ — *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathscr{H}$ и $\tau = \mathrm{tr}$ — канонический след, то $S(\mathscr{M}, \tau)$ совпадает с $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, $S_0(\mathscr{M}, \tau)$ совпадает с идеалом компактных операторов $\mathscr{S}(\mathscr{H})$. Имеем

$$\mu(t; X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1,n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s-чисел компактного оператора X; χ_A — индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$ [26, гл. II]. Тогда пространство $L_p(\mathscr{M}, \tau)$ есть идеал Шаттена — фон Неймана $\mathscr{S}_p(\mathscr{H})$, $1 \le p < +\infty$.

3. Основные результаты

Лемма 2 [24, гл. IX, теорема 2.13]. *Если* $X \in \mathscr{M}$ *и* $Y \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, *то* $XY, YX \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$.

Лемма 3 [27, теорема 17]. *Если* $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$ *и* $XY, YX \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, *то* $\tau(XY) = \tau(YX)$.

Теорема 1. *Пусть оператор* $A \in \mathscr{M}$ *нормален и* $B \in L_1(\mathscr{M}, \tau) \cap L_2(\mathscr{M}, \tau)$. *Если оператор* $T := A + B$ *гипонормален, то* T *нормален.*

Доказательство. Поскольку $T^*T \ge TT^*$ и $A^*A = AA^*$, имеем

$$A^*B + B^*A + B^*B \ge AB^* + BA^* + BB^*.$$

Поэтому

$$D := A^*B + B^*A + B^*B - AB^* - BA^* - BB^* \ge 0.$$

Слагаемые A^*B, B^*A, AB^*, BA^* лежат в $L_1(\mathscr{M}, \tau)$ в силу леммы 2, а $B^*B, BB^* \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ ввиду определения пространства $L_2(\mathscr{M}, \tau)$. Значит, $D \in L_1(\mathscr{M}, \tau)^+$. В силу леммы 3 получаем

$$\tau(A^*B) = \tau(BA^*), \quad \tau(B^*A) = \tau(AB^*), \quad \tau(B^*B) = \tau(BB^*),$$

поэтому в силу линейности продолжения следа τ на все банахово пространство $L_1(\mathscr{M}, \tau)$ получаем $\tau(D) = 0$. Так как это продолжение является точным на конусе $L_1(\mathscr{M}, \tau)^+$, имеем $D = 0$. Таким образом, $T^*T = TT^*$ и оператор T нормален. Теорема доказана. $\square$

Переходя к сопряженным операторам, получаем

Следствие 1. *Пусть оператор* $A \in \mathscr{M}$ *нормален и* $B \in L_1(\mathscr{M}, \tau) \cap L_2(\mathscr{M}, \tau)$. *Если оператор* $T := A + B$ *когипонормален, то* T *нормален.*

Следствие 2 [28]. *Пусть оператор* $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *нормален и* $B \in \mathscr{S}_2(\mathscr{H})$. *Если оператор* $T := A + B$ *гипонормален (или когипонормален), то* T *нормален.*

Доказательство. Имеем $\mathscr{S}_2(\mathscr{H}) \subset \mathscr{S}_1(\mathscr{H})$.

Теорема 2. *Для оператора $A \in L_2(\mathscr{M}, \tau)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *A нормален;*

(ii) *$\tau(PA^*AP) \geq \tau(PAA^*P)$ для всех $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$;*

(iii) *$\tau(PA^*AP) \leq \tau(PAA^*P)$ для всех $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$.*

Доказательство. (i)⇒(ii). Нормальный оператор $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ гипонормален. Поэтому из неравенства $A^*A \geq AA^*$ получаем

$$PA^*AP \geq PAA^*P \quad \text{для всех} \quad P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}.$$

Отсюда в силу монотонности на конусе $L_1(\mathscr{M}, \tau)^+$ продолжения следа τ на все банахово пространство $L_1(\mathscr{M}, \tau)$ имеем (ii).

(ii)⇒(i). Предположим, что выполнено условие (ii), но оператор A не является нормальным. Поскольку $L_2(\mathscr{M}, \tau) \subset S_0(\mathscr{M}, \tau)$, оператор A не является гипонормальным в силу [11, теорема 2.2]. Поэтому в разложении Жордана оператора

$$X := A^*A - AA^* = X_+ - X_- \tag{1}$$

с $X_+, X_- \in L_1(\mathscr{M}, \tau)^+$ и $X_+X_- = 0$ имеем $X_- \neq 0$. Умножив обе части равенства (1) слева и справа на проектор $P = \mathrm{supp}(X_-)$, получаем

$$PA^*AP - PAA^*P = -X_-. \tag{2}$$

Следовательно, $\tau(PA^*AP) - \tau(PAA^*P) = -\tau(X_-) < 0$ в силу точности на конусе $L_1(\mathscr{M}, \tau)^+$ продолжения следа τ на все банахово пространство $L_1(\mathscr{M}, \tau)$. Получили противоречие с (ii).

Поскольку оператор $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ нормален $\Leftrightarrow$ X^* нормален, получаем (i)⇔(iii). Теорема доказана. □

В силу полуконечности следа τ в алгебре $\mathscr{M}$ существует ненулевой подпроектор Q проектора P такой, что $Q \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ и $QX_-Q \neq 0$ (см. (2)). Поэтому каждое из условий 1) $\tau(PA^*AP) \geq \tau(PAA^*P)$ для всех $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ или 2) $\tau(PA^*AP) \leq \tau(PAA^*P)$ для всех $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$, влечет, что оператор $A \in L_2(\mathscr{M}, \tau)$ нормален.

Оператор $T \in S(\mathscr{M}, \tau)$ гипонормален (когипонормален) тогда и только тогда, когда $\mu(t; TP) \geq \mu(t; T^*P)$ (соответственно $\mu(t; T^*P) \geq \mu(t; TP)$) для всех $t > 0$ и $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ [17, теорема 6]. Отсюда в силу пп. (i) и (iv) леммы 1 получаем, что оператор $T \in S(\mathscr{M}, \tau)$ гипонормален (когипонормален) тогда и только тогда, когда $\mu(t; PT^*TP) \geq \mu(t; PTT^*P)$ (соответственно $\mu(t; PTT^*P) \geq \mu(t; PT^*TP)$) для всех $t > 0$ и $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$. Аналогично теореме 2 проверяется утверждение: *для оператора $A \in \mathscr{M}$ следующие условия эквивалентны:* (i) *A гипонормален;* (ii) *$\tau(PA^*AP) \geq \tau(PAA^*P)$ для всех $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$.*

Теорема 3. *Пусть оператор $A \in \mathscr{M}$ является изометрией, $B \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ и $T := A + B$. Если $TT^* \geq I$ и оператор T гипонормален, то T нормален.*

Доказательство. По условию $P := AA^* \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$. Так как $T^*T \geq TT^* \geq I$, имеем

$$A^*B + B^*A + B^*B \geq AB^* - BA^* - BB^* - P^\perp \geq 0. \tag{3}$$

В частности, $P^\perp \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. Если $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$, $Y \neq 0$ и $X \geq \mu(\infty; X)I$, то существует такое число $s > 0$, что $\mu(s; X) < \mu(s; X + Y)$ [29, предложение 2.2]. Оператор $X := AB^* - BA^* - BB^* - P^\perp$ лежит в $S_0(\mathscr{M}, \tau)^+$ и $X \geq \mu(\infty; X)I = 0 \cdot I = 0$. Положим

$$X + Y := A^*B + B^*A + B^*B,$$

см. левую часть неравенства (3). Предположим, что оператор T не является нормальным, т. е. $Y \neq 0$. Для произвольного оператора $Z \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$ имеем

$$\mu(t; I + Z) = 1 + \mu(t; Z) \quad \text{для всех} \quad t > 0,$$

см. доказательство теоремы 7 в [30]. В силу пп. (i) и (iv) леммы 1 получаем

$$\mu(t; T^*T) = \mu(t; |T|^2) = \mu(t; |T|)^2 = \mu(t; T)^2 = \mu(t; T^*)^2 = \mu(t; |T^*|)^2 \\ = \mu(t; |T^*|^2) = \mu(t; TT^*) \quad (4)$$

для всех $t > 0$. Теперь для числа $s > 0$ имеем

$$\mu(s; T^*T) = \mu(s; I+X+Y) = 1+\mu(s; X+Y) > 1+\mu(s; X) = \mu(s; I+X) = \mu(s; TT^*).$$

Получили противоречие с (4). Следовательно, $Y = 0$ и оператор T является нормальным. Теорема доказана. $\square$

Переходя к сопряженным операторам, получаем

Следствие 3. *Пусть оператор $A \in \mathscr{M}$ является коизометрией, $B \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ и $T := A + B$. Если $TT^* \geq I$ и оператор T когипонормален, то T нормален.*

Лемма 4. *Функция $f(t) = t^p$ операторно монотонна на полуоси $[0, +\infty)$ при $0 < p \leq 1$.*

Лемма 5 [31]. *Если $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^+$ и $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})_1$, то $Bf(A)B^* \leq f(BAB^*)$ для каждой операторно монотонной на $[0, +\infty)$ функции f с $f(0) \leq 0$.*

Теорема 4. *Пусть оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})_1$ гипонормален. Тогда для всех $3 \leq n \in \mathbb{N}$ имеем $(A^{*n}A^n)^{1/4} \geq (A^*)^{n-2}A^{n-2}$.*

Доказательство. Умножив обе части неравенства $A^*A \geq AA^*$ слева на оператор A^* и справа на оператор A, получаем

$$A^{*2}A^2 \geq (A^*A)^2. \quad (5)$$

Тогда $(A^{*2}A^2)^{1/2} \geq A^*A$ в силу леммы 4. Умножив обе части последнего неравенства слева на оператор A^* и справа на оператор A, в силу лемм 4, 5 и неравенства (5) имеем

$$(A^{*3}A^3)^{1/2} \geq A^*(A^{*2}A^2)^{1/2}A \geq A^{*2}A^2 \geq (A^*A)^2,$$

поэтому $(A^{*3}A^3)^{1/4} \geq A^*A$. Умножив обе части последнего неравенства слева на оператор A^* и справа на оператор A, в силу лемм 4, 5 получаем $(A^{*4}A^4)^{1/4} \geq A^*(A^{*3}A^3)^{1/4}A \geq A^{*2}A^2$; отсюда аналогичным образом выводим

$$(A^{*5}A^5)^{1/4} \geq A^*(A^{*4}A^4)^{1/4}A \geq A^{*3}A^3.$$

Продолжая такой процесс, имеем $(A^{*n}A^n)^{1/4} \geq (A^*)^{n-2}A^{n-2}$, т. е. $|A^n|^{1/2} \geq |A^{n-2}|^2$ для всех $3 \leq n \in \mathbb{N}$. $\square$

Следствие 4. *Пусть оператор $A \in \mathscr{M}_1$ гипонормален и $A^n \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ для некоторого $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Тогда A принадлежит $S_0(\mathscr{M}, \tau)$ и нормален.*

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что число n нечетно (если n четно, рассмотрим $A^{n+1} = A \cdot A^n \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$). Для любого $t > 0$ в силу пп. (i), (ii) и (iv) леммы 1 имеем

$$\mu(t; A^n)^{1/2} = \mu(t; A^{*n}A^n)^{1/4} = \mu(t; (A^{*n}A^n)^{1/4}) \\ \geq \mu(t; (A^*)^{n-2}A^{n-2}) = \mu(t; |A^{n-2}|^2) = \mu(t; A^{n-2})^2.$$

Поскольку для любого $t > 0$ в силу п. (iii) леммы 1

$$\mu(t; A^n) = \mu(t; A \cdot A^{n-2} \cdot A) \leq \|A\|^2 \mu(t; A^{n-2}) \leq \mu(t; A^{n-2}),$$

получаем $\mu(t; A^{n-2}) \geq \mu(t; A^n) \geq \mu(t; A^{n-2})^4$, $t > 0$, тем самым $A^{n-2} \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. Продолжая процесс понижения степени оператора A, имеем $A \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. В силу [11, теорема 2.2] оператор A нормален. В частности, $\mu(t; A^k) = \mu(t; A)^k$ для всех $t > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ в силу [11, п. (ii) теоремы 3.1]. $\square$

Напомним, что в п. (i) теоремы 3.3 из [16] было установлено, что если оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ паранормален и $A^n \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $A \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$.

Теорема 5. *Пусть $P, Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$, $n \in \mathbb{N}$ и $A := (PQ)^n$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *A гипонормален;*

(ii) *$PQ = QP$ (тем самым $A = P \wedge Q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$).*

Доказательство. (i)⇒(ii). Имеем $(QP)^n(PQ)^n \geq (PQ)^n(QP)^n$, т. е.

$$(QPQ)^{2n-1} \geq (PQP)^{2n-1}.$$

Используя лемму 4 с $p = (2n-1)^{-1} \in (0, 1]$, получаем $QPQ \geq PQP$. Умножив обе части этого неравенства слева и справа на проектор P, имеем $PQPQP = (PQP)^2 \geq PQP$. Поскольку $PQP \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^+ \cap \mathscr{B}(\mathscr{H})_1$, получаем $PQP \geq (PQP)^2$. Следовательно,

$$PQP = (PQP)^2 \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}.$$

По теореме фон Неймана [32, задача 122] (ее новое доказательство приведено в [33, теорема 2.2]) последовательность $(PQP)^k$ не возрастает и сходится в сильной операторной топологии $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ к проектору $P \wedge Q$. Таким образом, $PQP = P \wedge Q$ и оператор $V := QP$ является частичной изометрией. Тогда и оператор $V^* = (QP)^* = PQ$ является частичной изометрией [32, следствие 2 из задачи 127], $VV^* = QPQ \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$. Еще раз применяя теорему фон Неймана [32, задача 122], имеем $QPQ = P \wedge Q$. Значит, $PQP = QPQ = P \wedge Q$. Поскольку $\|PQ - P \wedge Q\| = \sqrt{\|PQP - P \wedge Q\|} = 0$ (см. [33, с. 6]), получаем $PQ = P \wedge Q$ и $A = (PQ)^n = P \wedge Q$. Теорема доказана. $\square$

Лемма 6. *Пусть $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^+$, $P \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ и $I \geq A \geq P$. Тогда*

(i) *$AP = PA$;*

(ii) *если $AP = A$, то $A = P$.*

Доказательство. (i). Поскольку $P^\perp \geq I - A \geq 0$, операторы $P^\perp \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ и $I - A$ коммутируют в силу [34, гл. 2, п. 2.17]. Поэтому $AP = PA$.

(ii). Имеем $B := A - P \geq 0$ и $A = P + B$. Умножив обе части этого равенства слева на проектор $P^\perp$, получаем $BP^\perp = AP^\perp = 0$. Умножив обе части неравенства $I \geq P + B$ слева и справа на проектор P, получаем $P \geq P + PBP$. Поскольку $PBP \geq 0$, имеем $PBP = |B^{1/2}P|^2 = 0$. Следовательно, $B^{1/2}P = 0$ и $BP = B^{1/2} \cdot B^{1/2}P = 0$. Таким образом, $B = BP + BP^\perp = 0 + 0 = 0$ и $A = P$. $\square$

Теорема 6. *Пусть $P, Q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$. Тогда*

(i) *$\mu(t; PQ^\perp)^2 = \mu(t; P - PQP) \leq \mu(t; P - Q)$ для всех $t > 0$;*

(ii) *если $P \sim Q$ и $V \in \mathscr{M}$ с $V^*V = P$ и $VV^* = Q$, то*

$$\mu(t; P - V) = \mu(t; Q - V) \leq \mu(t; I - V) \quad \text{для всех} \quad t > 0;$$

(iii) *если частичная изометрия $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ гипонормальна, то*

$$\ldots \geq U^{*n}U^n \geq \ldots \geq U^{*2}U^2 \geq U^*U \geq UU^* \geq U^2U^{*2} \geq \ldots \geq U^nU^{*n} \geq \ldots .$$

Доказательство. (i). Для любого $t > 0$ в силу пп. (i), (iii) и (iv) леммы 1

$$\mu(t; PQ^{\perp})^2 = \mu(t; Q^{\perp}P)^2 = \mu(t; PQ^{\perp}P) = \mu(t; P - PQP) = \mu(t; P(P-Q)P) \\ \leq \|P\|^2\mu(t; P-Q) = \mu(t; P-Q).$$

(ii). Если $P \sim Q$ с $V \in \mathscr{M}$, то оператор V является частичной изометрией и $V = VV^*V$ [32, следствие 3 из задачи 127]. Поэтому в силу пп. (i) и (iii) леммы 1 для любого $t > 0$ имеем

$$\mu(t; P - V) = \mu(t; V^*V - VV^*V) = \mu(t; (V^* - VV^*)V) \\ \leq \|V\|\mu(t; V^* - VV^*) = \mu(t; V^* - Q) = \mu(t; Q - V).$$

Аналогичным образом получаем $\mu(t; Q - V) \leq \mu(t; P - V)$ для любого $t > 0$. В силу пп. (i) и (iii) леммы 1 для любого $t > 0$

$$\mu(t; Q - V) = \mu(t; VV^* - V) = \mu(t; V(V^* - I)) \leq \|V\|\mu(t; V^* - I) = \mu(t; I - V).$$

(iii). Умножив обе части неравенства $U^*U \geq UU^*$ слева на оператор U и справа на оператор U^*, с учетом равенства $U = UU^*U$ получаем $UU^* \geq U^2U^{*2}$. Умножив все части неравенства $U^*U \geq UU^* \geq U^2U^{*2}$ слева на оператор U и справа на оператор U^*, с учетом равенства $U = UU^*U$ имеем $UU^* \geq U^2U^{*2} \geq U^3U^{*3}$. Продолжая такой процесс, получаем $U^*U \geq UU^* \geq U^2U^{*2} \geq \ldots \geq U^nU^{*n} \geq U^{n+1}U^{*(n+1)} \geq \ldots$.

Умножив обе части неравенства $U^*U \geq UU^*$ слева на оператор U^* и справа на оператор U, с учетом равенства $U = UU^*U$ получаем $U^{*2}U^2 \geq U^*U$. Умножив все части неравенства $U^{*2}U^2 \geq U^*U \geq UU^*$ слева на оператор U^* и справа на оператор U, с учетом равенства $U = UU^*U$ имеем $U^{*3}U^3 \geq U^{*2}U^2 \geq U^*U$. Продолжая такой процесс, получаем

$$\ldots \geq U^{*(n+1)}U^{n+1} \geq U^{*n}U^n \geq \ldots \geq U^{*2}U^2 \geq U^*U \geq UU^*.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 5. *Если частичная изометрия $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ гипонормальна, то оператор U^n также является гипонормальной частичной изометрией и $U^{*n}U^n = U^*U$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Поскольку $I \geq U^{*n}U^n \geq U^*U \geq UU^* \geq U^nU^{*n} \geq 0$, оператор U^n гипонормален для каждого $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и положим $A := U^{*n}U^n$, $P := U^*U$. Тогда $I \geq A \geq P$ и

$$AP = U^{*n}U^n \cdot U^*U = U^{*n}U^{n-1} \cdot UU^*U = U^{*n}U^n = A$$

в силу равенства $UU^*U = U$. Теперь из п. (ii) леммы 6 получаем $U^{*n}U^n = U^*U = P$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, оператор U^n также является частичной изометрией; значит, и оператор U^{*n} является частичной изометрией для каждого $n \in \mathbb{N}$. Последовательность проекторов $(Q_n)_{n=1}^{\infty} = (U^nU^{*n})_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает и в силу теоремы Вижье (см. [35, теорема 4.1.1] или [36, гл. 1, теорема 4.5]) она сходится в сильной операторной топологии $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ к некоторому неотрицательному оператору из $\mathscr{B}(\mathscr{H})_1$. Поскольку решетка $\mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ монотонно полна, предельным оператором будет проектор $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Akhmadiev M., Alhasan H., Bikchentaev A., Ivanshin P.* Commutators and hyponormal operators on a Hilbert space // J. Iran. Math. Soc. 2023. V. 4, N 1. P. 67–78.

2. *Bogdanović K.* A class of norm inequalities for operator monotone functions and hyponormal operators // Complex Anal. Oper. Theory. 2024. V. 18, N 2. Paper No. 32, 12 p.

3. *Fu Y., Cui P., Zu Ch., Lu Y.* The hyponormal block dual Toeplitz operators // J. Math. Res. Appl. 2025. V. 45, N 3. P. 377–394.

4. *Uchiyama A.* Decomposition of hyponormal operator // Nihonkai Math. J. 2023. V. 34, N 2. P. 91–102.

5. *Ramesh G., Sequeira S. S.* Representation and normality of hyponormal operators in the closure of AN-operators // Acta Math. Hung. 2024. V. 174, N 2. P. 341–359.

6. *Bala N., Ramesh G.* A representation of hyponormal absolutely norm attaining operators // Bull. Sci. Math. 2021. V. 171. Paper No. 103020, 15 pp.

7. *Gu C., Hendricks J., Rutherford D.* Hyponormality of block Toeplitz operators // Pacif. J. Math. 2006. V. 223, N 1. P. 95–111.

8. *Chõ M., Itoh M.* Putnam's inequality for p-hyponormal operators // Proc. Am. Math. Soc. 1995. V. 123, N 8. P. 2435–2440.

9. *Curto R. E., Hwang I. S., Lee W. Y.* Hyponormality and subnormality of block Toeplitz operators // Adv. Math. 2012. V. 230. P. 2094–2151.

10. *Duggal B. P.* On p-hyponormal contractions // Proc. Am. Math. Soc. 1995. V. 123, N 1. P. 81–86.

11. *Бикчентаев А. М.* О нормальных τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 3. С. 350–360.

12. *Bikchentaev A. M.* Paranormal measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39, N 6. P. 731–741.

13. *Bikchentaev A.* Paranormal measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra. II // Positivity. 2020. V. 24, N 5. P. 1487–1501.

14. *Бикчентаев А. М.* К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана. II // Математика и теоретические компьютерные науки. 2023. Т. 1, № 2. С. 3–11.

15. *Bikchentaev A. M.* Concerning the theory of τ-measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra. II // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 10. P. 4507–4511.

16. *Bikchentaev A.* Hyponormal measurable operators, affiliated to a semifinite von Neumann algebra // Adv. Oper. Theory. 2024. V. 9, N 4. Paper No. 83, 17 pp.

17. *Бикчентаев А. М.* Гипонормальные измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 3. С. 396–405.

18. *Bikchentaev A.* Hyponormal measurable operators, affiliated to a semifinite von Neumann algebra. III // Methusalem Seminars at Ghent Analysis and PDE Center. Extended Abstracts 2023/2024. Basel: Birkhäuser, 2026.

19. *Бикчентаев А. М.* Неравенства для следа и измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана // Изв. вузов. Математика. 2025. № 1. С. 99–104.

20. *Dehimi S., Mortad M. H.* Unbounded operators having self-adjoint, subnormal, or hyponormal powers // Math. Nachr. 2023. V. 296, N 9. P. 3915–3928.

21. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Топологические алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 61. С. 115–163.

22. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. Encyclopaedia of mathematical sciences, 124. Operator algebras and non-commutative geometry, 5. Berlin: Springer-Verl., 2002.

23. *Dodds P. G., de Pagter B., Sukochev F. A.* Noncommutative integration and operator theory. Cham: Birkhäuser, 2023. (Progress in Mathematics. V. 349).

24. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. II. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Berlin: Springer-Verl., 2003.

25. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacific J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.

26. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

27. *Brown L. G., Kosaki H.* Jensen's inequality in semifinite von Neumann algebra // J. Operator Theory. 1990. V. 23, N 1. P. 3–19.

28. *Kittaneh F.* A note on hyponormal operators // Math. Rep. Toyama Univ. 1986. V. 9. P. 105–107.

29. *Chilin V. I., Krygin A. V., Sukochev Ph. A.* Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators // Integral Equations Operator Theory. 1992. V. 15, N 2. P. 186–226.

30. *Бикчентаев А. М.* След и интегрируемые коммутаторы измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 455–468.

31. *Hansen F.* An operator inequality // Math. Ann. 1979/80. V. 246, N 3. P. 249–250.

32. *Halmos P. R.* A Hilbert space problem book. Sec. Ed.. Berlin: Springer-Verl., 1982.

33. *Bikchentaev A. M., Moslehian M. S.* On pairs of projections // Positivity. 2025. V. 29, N 4. Paper No. 47. 13 pp.

34. *Strătilă S. V., Zsidó L.* Lectures on von Neumann algebras. 2nd edition. Delhi: Camb. Univ. Press, 2019. (Cambridge IISc Series).

35. *Мерфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.

36. *Шерстнев А. Н.* Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М.: Физматлит, 2008.

Поступила в редакцию 27 июля 2025 г.
После доработки 2 сентября 2025 г.
Принята к публикации 26 сентября 2025 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович (ORCID 0000-0001-5992-3641)
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Airat.Bikchentaev@kpfu.ru