Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 512.5+510.6

ПОПОЛНЕНИЕ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ БАУМСЛАГА — СОЛИТЕРА. СТАБИЛЬНОСТЬ

Н. С. Романовский

Аннотация. Автор ранее определил делимое пополнение разрешимой группы Баумслага — Солитера, описал группы, элементарно эквивалентные ему, построил аксиоматику соответствующей теории, доказал разрешимость. В настоящей работе описываются элементарные подмодели моделей этой теории и устанавливается омега-стабильность.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.112

Ключевые слова: разрешимая группа, элементарная теория, стабильность.

1. Введение

Рассматривается разрешимая группа Баумслага — Солитера $\mathrm{BS}(1,n) = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^n\rangle$ $(n > 1)$. В работах [1, 2] было определено ее пополнение, оно обозначалось через $\mathrm{BSd}(1,n)$, и исследовалась элементарная теория этого пополнения (в [1] при некоторых дополнительных ограничениях на n, в [2] эти ограничения сняты). Были описаны группы, элементарно эквивалентные $\mathrm{BSd}(1,n)$, найдена аксиоматика соответствующей теории, доказана разрешимость теории. В настоящей работе продолжается изучение теоретико-модельных свойств группы $\mathrm{BSd}(1,n)$: установлена ω-стабильность и описаны элементарные подмодели в моделях теории этой группы. Отметим, что результаты и методы исследований похожи на те, которые были в работах автора и А. Г. Мясникова при изучении теоретико-модельных свойств делимых жестких групп. По этому поводу см. обзор автора, содержащийся в гл. 5 монографии [3].

Необходимые сведения по теории моделей читатель может найти в монографиях [4, 5].

2. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся определения классов 2-ступенно разрешимых групп $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{D}_2$ и $\mathscr{B}_n$. Прежде напомним, что если в группе G есть абелева нормальная подгруппа B и $A = G/B$, то действие группы G на B сопряжениями

$$b \to b^g = g^{-1}bg \quad (b \in B,\ g \in G)$$

определяет на B структуру правого модуля над групповым кольцом $\mathbb{Z}A$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2026-0017.

Говорят, что 2-ступенно разрешимая группа G *принадлежит классу* $\mathscr{R}_2$, если в ней есть нормальный ряд

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \rho_3(G) = 1$$

с абелевыми факторами $A = G/\rho_2(G)$, $\rho_2(G)$, причем группа A не имеет $\mathbb{Z}$-кручения, $\rho_2(G)$ не имеет R-кручения, где R — фактор-кольцо группового кольца $\mathbb{Z}A$ по аннулятору модуля $\rho_2(G)$ в $\mathbb{Z}A$, и группа A канонически вкладывается в мультипликативную группу обратимых элементов R^* кольца R. Указанный ряд, если существует, однозначно определяется группой и называется *жестким*, кольцо R является областью целостности, а централизатор любого нетривиального элемента из $\rho_2(G)$ совпадает с $\rho_2(G)$. С такой группой G ассоциируется пара (A, R). В ней по построению R — коммутативная область целостности, A — подгруппа без кручения из R^*, порождающая все R как кольцо.

Группа Баумслага — Солитера $\mathrm{BS}(1, n) = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^n\rangle$ $(n > 1)$ принадлежит классу $\mathscr{R}_2$, ей соответствует пара $(n^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}_n)$, где $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Z}[n^{\mathbb{Z}}]$ обозначает кольцо рациональных чисел, представимых в виде дробей, знаменатели которых являются степенями n. Эта группа может быть отождествлена с группой матриц

$$\begin{pmatrix} n^{\mathbb{Z}} & 0 \\ \mathbb{Q}_n & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть группам $G_1, G_2 \in \mathscr{R}_2$ соответствуют пары (A_1, R_1), (A_2, R_2). Если $G_1 \le G_2$, то A_1 — подгруппа в A_2, R_1 — подкольцо в R_2. Будем говорить, что G_1 — *независимая подгруппа* в G_2, если любая система элементов из $\rho_2(G_1)$, линейно независимая над кольцом R_1, остается линейно независимой и над большим кольцом R_2.

Группа $G \in \mathscr{R}_2$ называется *делимой*, если A — делимая абелева группа (она тогда представляется в виде прямой суммы копий $\mathbb{Q}$) и модуль $\rho_2(G)$ является делимым R-модулем, тогда на $\rho_2(G)$ можно смотреть как на векторное пространство над полем частных кольца R. Через $\mathscr{D}_2$ обозначается класс делимых групп из $\mathscr{R}_2$.

Пополнение группы Баумслага — Солитера $\mathrm{BS}(1, n)$ — группа $\mathrm{BSd}(1, n)$ принадлежит классу $\mathscr{D}_2$, она может быть отождествлена с группой матриц

$$\begin{pmatrix} n^{\mathbb{Q}} & 0 \\ \mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}}) & 1 \end{pmatrix}$$

над полем $\mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}})$. Ей соответствует пара $(n^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}])$.

Приведем несколько фактов о группах из класса $\mathscr{D}_2$, они следуют из теоремы 2 работы [6].

Пусть $G \in \mathscr{D}_2$, (A, R) — пара, ассоциированная с G.

1. Группа G расщепляется в полупрямое произведение $A \cdot \rho_2(G)$ подгруппы A, изоморфной $G/\rho_2(G)$, и нормальной подгруппы $\rho_2(G)$.

2. Любое другое подобное расщепление сопряжено с данным с помощью элемента из $\rho_2(G)$, т. е. имеет вид $A^t \cdot \rho_2(G)$, где $t \in \rho_2(G)$.

3. Всякий элемент $g \in G \setminus \rho_2(G)$ сопряжен с элементом из A, т. е. принадлежит некоторой подгруппе A^t, где $t \in \rho_2(G)$, и эта подгруппа совпадает с централизатором g в G.

4. Если $H \le G$, $H \in \mathscr{D}_2$, $A' = H/\rho_2(H)$, то всякое расщепление $A' \cdot \rho_2(H)$ подгруппы H согласовано с некоторым (единственным) расщеплением $A \cdot \rho_2(G)$

группы G, т. е. для этих расщеплений $A' \leq A$. В качестве A нужно взять централизатор в G любого нетривиального элемента из A'.

Напомним еще одно утверждение (см. предложение 2 из [6]).

5. Пересечение любого множества делимых подгрупп группы $G \in \mathscr{R}_2$ само является делимой подгруппой. В частности, если $G \in \mathscr{D}_2$, то можно говорить о делимом замыкании какого-либо подмножества группы.

Назовем *размерностью* группы $G \in \mathscr{D}_2$ с соответствующей парой (A, R) набор кардиналов $\dim G = (\lambda_1, \lambda_2)$, где λ_1 — размерность A над $\mathbb{Q}$, λ_2 — размерность векторного пространства $\rho_2(G)$ над полем частных кольца R. Аналогично определяется коразмерность $\operatorname{codim} G/H$ группы G над независимой подгруппой $H \in \mathscr{D}_2$.

Через $\mathscr{B}_n$ обозначается класс групп $G \in \mathscr{D}_2$, содержащих в качестве подгруппы $\mathrm{BSd}(1, n)$ и удовлетворяющих требованию: если (A, R) — ассоциированная с G пара и множество $\{n\} \cup Y$ составляет базу A как $\mathbb{Q}$-группы, то элементы из Y алгебраически независимы (над $\mathbb{Z}$ в R). Полезно заметить, что в этом случае R представляет из себя кольцо многочленов от элементов Y в рациональных степенях с коэффициентами из Q_n. Или, по другому, R можно отождествить с групповой алгеброй над кольцом Q_n свободной абелевой $\mathbb{Q}$-группы с базой Y. Из теорем 1 и 2 работы [2] вытекает важный факт: класс $\mathscr{B}_n$ в точности состоит из групп, элементарно эквивалентных группе $\mathrm{BSd}(1, n)$.

Назовем *базой группы* $G \in \mathscr{B}_n$ набор подмножеств $(\{n\} \cup B_1, B_2)$ такой, что существует расщепление $A \cdot \rho_2(G)$ группы G, для которого $\{n\} \cup B_1$ содержится в A и составляет базу A над $\mathbb{Q}$, а B_2 составляет базу векторного пространства $\rho_2(G)$ над полем частных кольца R. Понятно, что база порождает G как делимую группу и $\dim G = (1 + |B_1|, |B_2|)$. Пусть имеется другая база группы G и она связана с расщеплением $A^t \cdot \rho_2(G)$, $t \in \rho_2(G)$. Тогда эта база имеет вид $(\{n^t\} \cup B_1', B_2')$. Любая биекция $B_1 \to B_1'$ определяет изоморфизм групп $A \to A^t$ (предполагается $n \to n^t$), автоморфизм кольца R, а дополнительно биекция $B_2 \to B_2'$ определяет автоморфизм группы G. Произвольный автоморфизм группы G получается таким образом. Аналогично замечается, что две группы из класса $\mathscr{B}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность. Таким образом своей размерностью (λ_1, λ_2) группа из класса $\mathscr{B}_n$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Обозначим такую группу через $B(\lambda_1, \lambda_2)$. Несложно доказывается, что всякая группа $B(\lambda_1, \lambda_2)$ независимо вкладывается в любую группу $B(\lambda_1', \lambda_2')$, где $\lambda_1' \geq \lambda_1$, $\lambda_2' \geq \lambda_2$.

Лемма 1. *Пусть группа G принадлежит классу $\mathscr{D}_2$, (A, R) — ассоциированная пара, $A \cdot \rho_2(G)$ — расщепление, C — некоторое подмножество из G. Тогда в группе G существует независимая делимая подгруппа H, которая содержит C, в случае конечного C имеет конечную размерность, в случае бесконечного C имеет мощность, не превосходящую мощности C, и для нее есть расщепление, согласованное с данным расщеплением G.*

Доказательство. Укажем способ построения H. Сначала расщепим множество C в соответствии с расщеплением группы $A \cdot \rho_2(G)$, после чего предполагаем, что $C = C_1 \cup C_2$, где $C_1 \subseteq A$, $C_2 \subseteq \rho_2(G)$. Можно также предполагать, что множества C_1 и C_2 непустые. Выберем в C_2 максимальную линейно независимую над R систему элементов B. Для каждого элемента из $C_2 \setminus B$ зафиксируем некоторое его представление в виде линейной комбинации конечного числа элементов из B с коэффициентами из поля частных кольца R. Добавим к C_1 конечный набор элементов из A, через который выражаются коэффициенты выбранного представления. После этого полагаем H равным делимому замыканию обновленного множества C_1 и множества B. Лемма доказана.

Замечание. На самом деле в случае групп из класса $\mathscr{B}_n$ в дальнейшем мы предполагаем доказать существование минимального H с указанными свойствами. В настоящей работе нам это не понадобится.

Лемма 2. *Пусть $G, H_1, H_2 \in \mathscr{B}_n$ и H_1, H_2 — независимые подгруппы в G. Предположим, что $\dim H_1 = \dim H_2$ и $\operatorname{codim} G/H_1 = \operatorname{codim} G/H_2$.*

1 *Подгруппы H_1 и H_2 сопряжены некоторым автоморфизмом σ группы G.*

2. *Если дополнительно имеется независимая подгруппа $H \in \mathscr{B}_n$, содержащаяся в пересечении $H_1 \cap H_2$, и $\operatorname{codim} H_1/H = \operatorname{codim} H_2/H$, то автоморфизм σ можно выбрать так, чтобы он действовал тождественно на H.*

Доказательство. 1. Пусть пары (A, R), (A_1, R_1), (A_2, R_2) ассоциированы с группами G, H_1, H_2 и K, K_1, K_2 обозначают поля частных колец R, R_1, R_2. По условию K_1, K_2 — подполя в K, $\rho_2(G) \geq \rho_2(H_1), \rho_2(H_2)$ — векторные пространства над полями K, K_1, K_2. Выберем расщепление $A_1 \cdot \rho_2(H_1)$ подгруппы H_1 и согласованное с ним расщепление $A \cdot \rho_2(G)$ группы G, а затем расщепление $A_2 \cdot \rho_2(H_2)$ подгруппы H_2 и согласованное с ним расщепление $A^t \cdot \rho_2(G)$ группы G. Возьмем базу $(\{n\} \cup B_{11}, B_{12})$ группы H_1 такую, что $\{n\} \cup B_{11} \subseteq A_1$, и дополним ее до базы $(\{n\} \cup B_{11} \cup C_{11}, B_{12} \cup C_{12})$ группы G, где $C_{11} \subseteq A$. Затем возьмем базу $(\{n^t\} \cup B_{21}, B_{22})$ группы H_2 такую, что $\{n^t\} \cup B_{21} \subseteq A_2$, и дополним ее до базы $(\{n^t\} \cup B_{21} \cup C_{21}, B_{22} \cup C_{22})$ группы G, где $C_{21} \subseteq A^t$. По условию

$$|B_{11}| = |B_{21}|, \quad |C_{11}| = |C_{21}|, \quad |B_{12}| = |B_{22}|, \quad |C_{12}| = |C_{22}|.$$

Возьмем набор биекций

$$B_{11} \to B_{21}, \quad C_{11} \to C_{21}, \quad B_{12} \to B_{22}, \quad C_{12} \to C_{22},$$

он определяет автоморфизм σ группы G. Из построения вытекает равенство $H_1\sigma = H_2$.

2. В этом случае существует согласованное расщепление всех четырех групп: H, H_1, H_2, G. Выбираем базы групп H_1 и H_2 так, чтобы они включали фиксированную базу H, и повторяем рассуждения первого случая, только рассматриваем биекции, тождественные на базе H. Лемма доказана.

3. Элементарные подмодели

Теорема 1. *Пусть группы $G_1 \leq G_2$ принадлежат классу $\mathscr{B}_n$ $(n > 1)$. Тогда условия элементарности и независимости данного вложения G_1 в G_2 равносильны.*

Доказательство. Рассмотрим пары (A_1, R_1) и (A_2, R_2), ассоциированные с группами G_1 и G_2 соответственно. Покажем, что если G_1 не является независимой подгруппой в G_2, то рассматриваемое вложение не элементарно. Пусть набор элементов $(t_1, \ldots, t_m)$ из $\rho_2(G_1)$ линейно независим над R_1, но зависим над R_2.

Лемма 3 (см. предложение 4 из [2]). *Пусть $G \in \mathscr{R}_2$ и (A, R) — ассоциированная с G пара. По определению всякий элемент из R может быть выражен через какие-то элементы $x_1, \ldots, x_s$ из A, т. е. представлен в виде линейной* *комбинации $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_q u_q$ мономов $u_1, \ldots, u_q$ от $x_1^{\pm 1}, \ldots, x_s^{\pm 1}$ с целыми коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. Тогда формула от переменных $x_1, \ldots, x_s$*

$$\bigwedge_i (x_i \in A) \wedge (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_q u_q = 0)$$

интерпретируется над G в сигнатуре теории групп как $\forall$-формула или как $\exists$-формула.

С использованием леммы легко строится $\exists$-формула $\Phi(y_1, \ldots, y_m)$, реализующая линейную зависимость набора $(t_1, \ldots, t_m)$ над R_2, она на этом наборе выполняется в группе G_2, но не выполняется в группе G_1, поэтому вложение $G_1 \leq G_2$ не элементарно.

Обратное утверждение сначала докажем для счетных групп G_1 и G_2. Пусть в этом случае G_1 — независимая подгруппа в G_2. Рассмотрим неглавный ультрафильтр U на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и соответствующую ультрастепень $G = G_2^{\mathbb{N}/U}$ группы G_2. В [2] было доказано, что $\dim G = (2^\omega, 2^\omega)$. По теореме Лося каноническое (диагональное) вложение G_2 в G является элементарным, а значит независимым. Так как ультрастепень $G_1^{\mathbb{N}/U}$ группы G_1 также имеет размерность $(2^\omega, 2^\omega)$, то она изоморфна G, следовательно, в G имеется какая-то элементарная подгруппа G_3, изоморфная G_1, т. е. той же размерности, что и G_1. Сама группа G_1 является независимой подгруппой в G_2, которая, в свою очередь, независима в G, а тогда и G_1 независима в G. Имеем $\dim G_1 = \dim G_3$. Кроме того, $\operatorname{codim} G/G_1 = (2^\omega,\, 2^\omega) = \operatorname{codim} G/G_3$. На основании леммы 2 подгруппы G_1 и G_3 сопряжены автоморфизмом группы G, откуда вытекает, что G_1 — элементарная подгруппа в G. Условия G_1 и G_2 — элементарные подгруппы в G влекут элементарность G_1 в G_2. Счетный случай разобран.

Разберем произвольный случай. Напомним, что подгруппа H группы G является элементарной тогда и только тогда, когда теории групп H и G с константами из H совпадают.

Лемма 4. *Пусть $G \in \mathscr{B}_n$, Φ — предложение в сигнатуре теории групп с параметрами $g_1, \ldots, g_m \in G$. Формула Φ выполняется на группе G тогда и только тогда, когда она выполняется на некоторой (любой) счетной независимой подгруппе $H \in \mathscr{B}_n$, содержащей элементы $g_1, \ldots, g_m$.*

Доказательство. Заметим, что если формула Φ выполняется на некоторой счетной независимой подгруппе $H_1 \in \mathscr{B}_n$, содержащей элементы $g_1, \ldots, g_m$, то она выполняется и на любой другой счетной независимой подгруппе $H_2 \in \mathscr{B}_n$, содержащей эти элементы. По лемме 1 существует счетная независимая подгруппа H, содержащая H_1 и H_2. Так как последние подгруппы элементарны в H, то формула Φ выполняется на H, а тогда и на H_2.

Для счетной группы G справедливость утверждения леммы нам известна. Случай бескванторной формулы прост. Далее доказательство проводим индукцией по числу связанных переменных в формуле Φ. Можно предполагать, что $\Phi = \exists x \Psi(x)$. Если Φ выполняется на H, то найдется элемент $h \in H$, для которого выполняется $\Psi(h)$. По индукции $\Psi(h)$ выполняется на G и тогда Φ выполняется на G.

Пусть Φ выполняется на G и $g \in G$ — такой элемент, что $\Psi(g)$ выполняется на G. Возьмем независимую счетную делимую подгруппу H', содержащую $H \cup \{g\}$, по лемме 1 такая существует. По индукции на H' выполняется $\Psi(g)$. Тогда на H' выполняется Φ. Так как группа H' счетная, то Φ выполняется и на H. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Пусть Φ — предложение с параметрами $g_1, \dots, g_m \in G_1$. По лемме 1 в G_1 найдется счетная независимая подгруппа $H \in \mathscr{B}_n$, содержащая элементы $g_1, \dots, g_m$. По лемме 4 Φ выполняется на H тогда и только тогда, когда выполняется на G_1. Аналогично Φ выполняется на H тогда и только тогда, когда выполняется на G_2. Из этого все вытекает. Теорема доказана.

4. Стабильность

Напомним, что теория является λ-стабильной (λ — бесконечный кардинал), если (и только если) для любой ее модели и подмножества C этой модели, где $|C| \leq \lambda$, мощность множества полных 1-типов с константами из C, реализуемых на элементах данной модели, не превосходит λ. Как известно, ω-стабильность влечет λ-стабильность для любого λ.

Теорема 2. *Группа* $\mathrm{BSd}(1, n)$ $(n > 1)$ *(ее теория)* ω*-стабильна.*

Доказательство. Мы знаем, что моделями рассматриваемой теории являются группы класса $\mathscr{B}_n$. Пусть $G \in \mathscr{B}_n$ и C — счетное подмножество в G. Ранее отмечалось, что группа G может быть независимо (элементарно) вложена в группу $B(\lambda, \lambda)$, где $\lambda > |G|$, поэтому сразу можно предполагать, что $G = B(\lambda, \lambda)$. По лемме 1 в G существует счетная независимая подгруппа $H \in \mathscr{B}_n$, содержащая C. Далее вкладываем H в делимую независимую подгруппу H', имеющую над H коразмерность (ω, ω), такая существует. Так как подгруппа H' счетна, то достаточно доказать, что любой 1-тип $\Phi(x)$ с константами из C, который реализуется на некотором элементе $g \in G$, реализуется также на подходящем элементе из H'. Вкладываем множество $H \cup \{g\}$ в счетную независимую подгруппу $H_g \in \mathscr{B}_n$, имеющую над H коразмерность (ω, ω). Отметим, что коразмерности G над H' и H_g одинаковы и равняются (λ, λ). По лемме 2 существует автоморфизм σ группы G, тождественно действующий на H и переводящий H_g в H'. Понятно, что тип $\Phi(x)$ реализуется на элементе $g\sigma \in H'$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романовский Н. С.* Об элементарной теории пополнения разрешимой группы Баумслага — Солитера // Докл. АН. Математика. 2024. Т. 517, № 5. С. 92–95.
2. *Romanovskii N.S.* Completion of the solvable Baumslag–Solitar group. Elementary theory // Algebra and Logic. 2024. V. 63, N 5. P. 355–366.
3. *Groups and model theory.* GAGTA book 2. Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2021.
4. *Marker D.* Model theory: An ntroduction. New York: Springer-Verl., 2002.
5. *Hodges W.* Model theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1993.
6. *Романовский Н. С.* Обобщенно жесткие метабелевы группы // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 1. С. 194–200.

Поступила в редакцию 17 апреля 2025 г.
После доработки 17 апреля 2025 г.
Принята к публикации 15 августа 2025 г.

Романовский Николай Семенович (ORCID 0000-0002-0755-2057)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
rmnvski@math.nsc.ru