Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 512.544.2+512.554.3

КОЛЬЦА ЛИ И ГРУППЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ КОВРАМИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ТИПА

Я. Н. Нужин

Аннотация. Ранее автор нашел необходимые и достаточные условия инвариантности коврового кольца Ли относительно ковровой подгруппы, соответствующей этому же ковру аддитивных подгрупп над произвольным коммутативным кольцом (Тр. ИММ УрО РАН, 2012). Данные условия инвариантности, обозначим их через (*), выражаются в терминах пар противоположных аддитивных подгрупп исходного ковра. В 2023 г. автор установил, что условия (*) являются достаточными для замкнутости ковра любого типа, исключая симплектический (Журн. СФУ, Сер. математика и физика). В данной статье доказана достаточность условий (*) для замкнутости ковра симплектического типа. Тем самым получен в полном объеме положительный ответ на вопрос 19.63 из Коуровской тетради и, в частности, подтверждена гипотеза В. М. Левчука о том, что более сильные предположения, чем условия (*), являются достаточными для замкнутости ковра.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.111

Ключевые слова: группа Шевалле, коммутативное кольцо, ковер аддитивных подгрупп, ковровая подгруппа, ковровое кольцо Ли.

1. Введение

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K с единицей. Группа $E(\Phi, K)$ порождается корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}$, $r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(K)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \tag{1}$$

Следующее определение принадлежит В. М. Левчуку [1]. *Ковром типа* Φ *над* K называется набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \text{ при } r, s, ir+js \in \Phi,\ i > 0,\ j > 0, \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad r, s, ir+js \in \Phi. \tag{3}$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ определяет *ковровую* подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\rangle$ группы $E(\Phi, K)$, где $\langle M\rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M. Ковер $\mathfrak{A}$ типа

Работа поддержана Российским научным фондом и Красноярским краевым фондом науки, проект 25-21-20059, https://rscf.ru/project/25-21-20059/.

© 2026 Нужин Я. Н.

Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е. если $E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$.

Заметим, что из условия (2) следует такой факт. Если $t \in \mathfrak{A}_r$ и $u \in \mathfrak{A}_s$, то каждый сомножитель из правой части равенства (3) лежит в $E(\Phi, \mathfrak{A})$. С другой стороны, в силу (1) с любой подгруппой G из $E(\Phi, K)$ можно связать набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{G}_r \mid r \in \Phi\}$, где $\mathfrak{G}_r = \{t \in K \mid x_r(t) \in G\}$. Поэтому справедливо обратное утверждение. Если для любых $t \in \mathfrak{G}_r$ и $u \in \mathfrak{G}_s$ каждый сомножитель из правой части равенства (3) лежит в G, то набор $\mathfrak{G}$ является ковром. Однако в общем случае набор $\mathfrak{G}$ не обязан быть ковром [2, примеры 1, 2].

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Включения $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, являются достаточными для замкнутости ковра аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ типа C_n над произвольным коммутативным кольцом.*

Ранее автор установил достаточность включений $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, для замкнутости ковра аддитивных подгрупп $\{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ типа Φ над коммутативным кольцом K при условии, что тип Φ отличен от C_n, $n \geq 5$, когда характеристика кольца K есть 0 или $2m$, где $m > 1$ [3]. Отметим, что доказательство теоремы 1, как и утверждений из [3], существенно опирается на результаты статьи автора [4], где были введены ковровые кольца Ли и доказаны критерий L-замкнутости ковра и критерий инвариантности коврового кольца относительно соответствующей ковровой подгруппы (см. разд. 2 ниже). Тип C_n не был охвачен в [3] полностью, поскольку там в доказательстве использовалось следующее утверждение. Для любого корня $r \in \Phi$ существует такой корень $s \in \Phi$, что модуль числа Картана $2\frac{(s,r)}{(s,s)}$ равен 1 за исключение случая, когда Φ типа C_n, $n \geq 1$, и r — длинный корень. В данной работе ограничения на характеристику кольца K удалось преодолеть, погрузив ковровое кольцо типа C_n в специальное кольцо Ли, которое может не являться ковровым именно тогда, когда характеристика основного кольца коэффициентов K равна 0 или $2m$, $m > 1$.

Объединяя утверждение теоремы 1 с основным результатом статьи [3], получаем следующий законченный результат.

Теорема 2. *Включения $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, являются достаточными для замкнутости ковра аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ любого типа Φ над произвольным коммутативным кольцом.*

Теорема 2 дает положительный ответ на вопрос 19.63 из Коуровской тетради [5]. Ее следствием является также подтверждение гипотезы В. М. Левчука о том, что более сильные, чем в теореме 2, включения

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi, \tag{4}$$

будут достаточными для замкнутости ковра. В 1982 г., когда выдвигалась эта гипотеза, ее справедливость была известна только для Φ типа A_n, подробнее см. [3]. Для кольца коэффициентов K нечетной характеристики включения из теоремы 2 и (4) эквивалентны. Заметим также, что включения (4) не являются необходимыми для замкнутости ковра. Так, в случае, когда K есть поле характеристики 2 или 0, В. А. Койбаев [6, 7] построил примеры замкнутых неприводимых ковров типа A_n, $n \geq 1$, для которых только одно из включений (4) нарушается. Ковер называется *неприводимым*, если все $\mathfrak{A}_r$ ненулевые. С другой стороны, существуют примеры неприводимых незамкнутых ковров любого типа Φ, для которых только одно из включений (4) нарушается [8].

2. Ковровые кольца Ли

Здесь и далее используются все определения и обозначения из введения, остальные будут вводится по мере необходимости.

Алгебра Ли типа Φ над произвольным полем обладает базисом Шевалле

$$\{e_r,\ r \in \Phi;\ h_s,\ s \in \Pi\}, \tag{5}$$

где Π — множество фундаментальных (простых) корней системы Φ, причем умножение базисных элементов осуществляется по следующим правилам:

$$\begin{array}{ll} [h_r h_s] = 0, & r, s \in \Pi, \\ [h_r e_s] = A_{rs} e_s, & r \in \Pi;\quad s \in \Phi, \\ [e_r e_{-r}] = h_r, & r \in \Phi, \\ [e_r e_s] = 0, & r, s \in \Phi;\quad r + s \notin \Phi, \\ [e_r e_s] = N_{r,s} e_{r+s}, & r, s, r+s \in \Phi. \end{array} \tag{6}$$

Здесь, как обычно,

$$A_{rs} = \frac{2(r,s)}{(r,r)}, \quad N_{rs} = \pm(p+1),$$

где $p = p(r,s)$ — наибольшее целое неотрицательное число такое, что $s - pr \in \Phi$.

Числа A_{rs} и $N_{r,s}$ целые, поэтому можно определить кольцо (алгебру) Ли $L(\Phi, K)$ с базисом Шевалле над произвольным коммутативным кольцом K с единицей (см., например, [9]).

Как и в [4], по определению считаем, что подкольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ порождается (относительно обеих операций) всеми множествами $\mathfrak{A}_r e_r$, $r \in \Phi$. Будем называть $L(\Phi, \mathfrak{A})$ *ковровым* подкольцом Ли. Заметим, что базисные элементы e_r и h_s не обязаны лежать в $L(\Phi, \mathfrak{A})$. Ковер $\mathfrak{A}$ назовем *L-замкнутым*, если

$$L(\Phi, \mathfrak{A}) \cap K e_r = \mathfrak{A}_r e_r, \quad r \in \Phi. \tag{7}$$

(В [4] такой ковер называется L-допустимым.)

Лемма 1 [4, теорема 2.1]. *Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K является L-замкнутым тогда и только тогда, когда $2\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$. В частности, над кольцом K характеристики 2 любой ковер L-замкнут.*

Группа $E(\Phi, K)$ действует на $L(\Phi, K)$. Для любого $r \in \Phi$ и любого $t \in K$ корневой элемент $x_r(t)$ действует на базисе Шевалле следующим образом:

$$\begin{aligned} e_r &\to e_r, \\ e_{-r} &\to e_{-r} + t h_r - t^2 e_r, \\ h_s &\to h_s - t A_{sr} e_r, \quad s \in \Pi, \\ e_s &\to \sum_{i=0}^{q} C_{i1,rs} t^i e_{ir+s}, \quad s \in \Phi \setminus \{\pm r\}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $q = q(r,s)$ — наибольшее целое неотрицательное число такое, что $s + qr \in \Phi$, и по определению $C_{01,rs} = 1$. Поэтому если $s \in \Phi \setminus \{\pm r\}$, $t \in \mathfrak{A}_r$, $u \in \mathfrak{A}_s$, то при действии автоморфизмом $x_r(t)$ элемент (вектор) $u e_s$ переходит в линейную комбинацию $\sum\limits_{i=0}^{q} C_{i1,rs} t^i u e_{ir+s}$, каждое слагаемое которой лежит в подкольце $L(\Phi, \mathfrak{A})$ в силу условия ковровости (2).

Будем говорить, что подкольцо $R \subseteq L(\Phi, K)$ *инвариантно* относительно подгруппы $G \subseteq E(\Phi, K)$, если $gr \in R$ для любых $g \in G$ и $r \in R$.

Лемма 2 [4, теорема 3.1]. *Подкольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\Phi, \mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$.*

Лемма 3 [4, с. 199]. *Всякое ковровое подкольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$, инвариантное относительно соответствующей ковровой подгруппы $E(\Phi, \mathfrak{A})$, является L-замкнутым.*

3. Кольца Ли, ассоциированные с системой корней типа C_n

Далее всюду Φ — система корней типа A_{2n-1}, $n \geq 2$, причем $r_i + r_{i+1} \in \Phi$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 2n-2$, $\Pi = \{r_1, r_2, \ldots, r_{2n-1}\}$ — множество ее фундаментальных корней. Граф Кокстера типа A_{2n-1} обладает симметрией τ порядка 2 (рис. 1). Она разбивает Φ на классы эквивалентности ${}^2\Phi$. По определению класс эквивалентности относительно симметрии τ есть пересечение системы Φ с целочисленной оболочкой корней из орбиты симметрии τ. Для Φ типа A_{2n-1} множество классов эквивалентности ${}^2\Phi$ и множество орбит симметрии τ совпадают. Для краткости положим $\tau(r) = \overline{r}$, $r \in \Phi$. В силу леммы 13.6.2 из [9] отображение

$$h_r \to h_{\overline{r}}, \quad e_r \to e_{\overline{r}}, \quad e_{-r} \to e_{-\overline{r}}, \quad r \in \Pi,$$

продолжается до автоморфизма φ кольца $L(\Phi, K)$, причем можно считать, что $\varphi(e_r) = e_{\overline{r}}$ для всех $r \in \Phi$, поскольку ${}^2\Phi$ не имеет классов эквивалентности типа A_2, когда Φ типа A_{2n-1}.

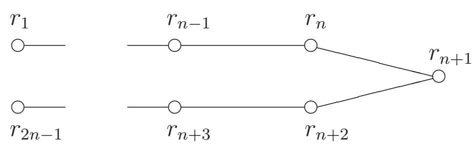

Рис. 1.

Положим

$$Kh_R = \begin{cases} K(h_r + h_{\overline{r}}), & \text{если } \overline{r} \neq r \text{ и } R = \{r, \overline{r}\}, \\ Kh_r, & \text{если } \overline{r} = r \text{ и } R = \{r\}, \end{cases}$$

$$Ke_R = \begin{cases} K(e_r + e_{\overline{r}}), & \text{если } \overline{r} \neq r \text{ и } R = \{r, \overline{r}\}, \\ Ke_r, & \text{если } \overline{r} = r \text{ и } R = \{r\}. \end{cases}$$

По определению скрученное кольцо (алгебра) Ли $L({}^2\Phi, K)$ порождается множествами Kh_R и Ke_R, когда R пробегает ${}^2\Phi$. Очевидно, оно лежит в централизаторе автоморфизма φ. Можно показать, что $L({}^2\Phi, K)$ совпадает с данным централизатором.

Лемма 4. *Алгебра $L({}^2\Phi, \mathbb{C})$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ изоморфна простой комплексной алгебре Ли типа C_n.*

Доказательство. Пусть ${}^2\Pi$ — множество орбит симметрии τ, лежащих в Π. Очевидно, множество $\{h_R,\ R \in {}^2\Pi;\ e_R,\ R \in {}^2\Phi\}$ является базисом алгебры $L({}^2\Phi, \mathbb{C})$. Нетрудно показать, что $L({}^2\Phi, \mathbb{C})$ — простая алгебра Ли с подалгеброй Картана ${}^2H := \langle h_R,\ R \in {}^2\Pi \rangle$. Векторы

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_{2n-1}) + \frac{1}{2}(r_2 + r_{2n-2}) + \cdots + \frac{1}{2}(r_{n-1} + r_{n+1}) + r_n$$

составляют фундаментальную систему корней типа C_n [9, с. 221]. Поэтому матрицы Картана алгебры $L(^2\Phi,\mathbb{C})$ и простой комплексной алгебры Ли типа C_n совпадают. Следовательно, эти алгебры изоморфны в силу теоремы 3.5.2 из [9].

Лемма доказана.

Непосредственно из определения коврового кольца Ли и леммы 4 вытекает

Лемма 5. *Пусть Σ — система корней типа C_n и $\mathfrak{A}$ — ковер типа C_n. Тогда ковровое кольцо Ли $L(\Sigma,\mathfrak{A})$ изоморфно подкольцу $L(^2\Phi,\mathfrak{A})$ кольца $L(^2\Phi,K)$, порожденному множествами $\mathfrak{A}_R e_R$, $R\in {}^2\Phi$.*

Далее всюду $\mathfrak{A}=\{\mathfrak{A}_r\mid r\in\Phi\}$ — ковер типа C_n. По ковру $\mathfrak{A}$ определим новый набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}'=\{\mathfrak{A}'_r\mid r\in\Phi\}$, где

$$\mathfrak{A}'_r=\begin{cases}2\mathfrak{A}_R, & \text{если } \overline{r}\neq r \text{ и } R=\{r,\overline{r}\},\\ \mathfrak{A}_R, & \text{если } \overline{r}=r \text{ и } R=\{r\}.\end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что $\mathfrak{A}'_r=\mathfrak{A}'_{\overline{r}}$ для любого $r\in\Phi$.

По определению подгруппа $E(^2\Phi,\mathfrak{A})$ и соответственно $E(\Phi,\mathfrak{A}')$ порождается следующими корневыми элементами или их произведениями:

$$\begin{gathered}x_r(t)x_{\overline{r}}(t),\ \overline{r}\neq r,\quad R=\{r,\overline{r}\},\ R\in {}^2\Phi,\ t\in\mathfrak{A}_R,\\ x_r(t),\ \overline{r}=r,\quad R=\{r\},\ R\in {}^2\Phi,\ t\in\mathfrak{A}_R,\end{gathered} \tag{10}$$

и соответственно

$$\begin{gathered}x_r(t)\ \overline{r}=r,\quad R=\{r\},\ r\in\Phi,\ t\in\mathfrak{A}_R,\\ x_r(2t)\ \overline{r}\neq r,\quad R=\{r,\overline{r}\},\ r\in\Phi,\ t\in\mathfrak{A}_R.\end{gathered} \tag{11}$$

Подгруппу $E(^2\Phi,\mathfrak{A})$ также будем называть ковровой, поскольку по лемме 5 она изоморфна ковровой подгруппе $E(\Sigma,\mathfrak{A})$. Следующая лемма утверждает, в частности, что набор $\mathfrak{A}'$ также является ковром. Поэтому определена ковровая подгруппа $E(\Phi,\mathfrak{A}')$ типа A_{2n-1} и ковровое кольцо Ли $L(\Phi,\mathfrak{A}')$ такого же типа.

Лемма 6. (а) *Набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}'$ является ковром типа A_{2n-1}.*

(б) *Если исходный ковер $\mathfrak{A}$ является L-замкнутым, то ковер $\mathfrak{A}'$также L-замкнут.*

(в) *Если кольцо $L(^2\Phi,\mathfrak{A})$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(^2\Phi,\mathfrak{A})$, то кольцо $L(\Phi,\mathfrak{A}')$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\Phi,\mathfrak{A}')$.*

Доказательство. (а) Пусть $r,s,r+s\in\Phi$. В силу построения ковра $\mathfrak{A}'$ возможны следующие три случая:

1) $\overline{r}\neq r,\ \overline{s}\neq s,\ r\in R=\{r,\overline{r}\},\ s\in S=\{s,\overline{s}\},\ r-\overline{s}\notin\Phi$;

2) $\overline{r}\neq r,\ \overline{s}\neq s,\ r\in R=\{r,\overline{r}\},\ s\in S=\{s,\overline{s}\},\ r-\overline{s}\in\Phi$;

3) $\overline{r}\neq r,\ \overline{s}=s,\ r\in R=\{r,\overline{r}\},\ s\in S=\{s\}$.

В первом случае классам R, S и $R+S$ соответствуют короткие корни системы корней типа C_n. Поэтому

$$\mathfrak{A}'_r\mathfrak{A}'_s=2\mathfrak{A}_R2\mathfrak{A}_S=4(\mathfrak{A}_R\mathfrak{A}_S)\leq 4(\mathfrak{A}_{R+S})\leq 2(\mathfrak{A}_{R+S})=\mathfrak{A}'_{r+s}.$$

Во втором случае классам R и S соответствуют короткие корни системы корней типа C_n, а классу $R+S$ — длинный корень. Поэтому по условию ковровости (2) для ковра

$$\mathfrak{A}'_r\mathfrak{A}'_s=2\mathfrak{A}_R2\mathfrak{A}_S=2(2\mathfrak{A}_R2\mathfrak{A}_S)\leq 2(\mathfrak{A}_{R+S})=\mathfrak{A}'_{r+s}.$$

В третьем случае классам R и $R+S$ соответствуют короткие корни системы корней типа C_n, а классу S — длинный корень. Поэтому

$$\mathfrak{A}'_r\mathfrak{A}'_s = 2\mathfrak{A}_R\mathfrak{A}_S \leq 2\mathfrak{A}_{R+S} = \mathfrak{A}'_{r+s}.$$

Во всех трех случаях первое из нестрогих неравенств $\leq$ справедливо в силу условия ковровости для ковра типа C_n. Таким образом, в любом случае условие ковровости (2) для набора $\mathfrak{A}'$ выполняется.

(б) По лемме 1 ковер $\mathfrak{A}'$ является L-замкнутым тогда и только тогда, когда

$$2\mathfrak{A}'_r\mathfrak{A}'_{-r}\mathfrak{A}'_r \leq \mathfrak{A}'_r, \quad r \in \Phi.$$

По определению ковра $\mathfrak{A}'$ имеем

$$2\mathfrak{A}'_r\mathfrak{A}'_{-r}\mathfrak{A}'_r = 22^k\mathfrak{A}_R\mathfrak{A}_{-R}\mathfrak{A}_R,$$

где k есть 0 или 3. В силу предположения ковер $\mathfrak{A}$ является L-замкнутым. Поэтому

$$22^k\mathfrak{A}_R\mathfrak{A}_{-R}\mathfrak{A}_R \leq 2^k\mathfrak{A}_R.$$

Остается заметить, что $2^k\mathfrak{A}_R$ есть $\mathfrak{A}'_r$ или $4\mathfrak{A}'_r$ при $k=0$ и $k=3$ соответственно, а следовательно, в любом случае лежит в $\mathfrak{A}'_r$.

(в) По лемме 2 ковер $\mathfrak{A}'$ инвариантен относительно ковровой подгруппы $E(\Phi,\mathfrak{A}')$ тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{A}'_r)^2\mathfrak{A}'_{-r} \leq \mathfrak{A}'_r$, $r \in \Phi$. Пусть k такое же, как и в п. (б). Тогда в силу инвариантности ковра $\mathfrak{A}$ относительно соответствующей ковровой подгруппы получаем

$$(\mathfrak{A}'_r)^2\mathfrak{A}'_{-r} = 2^k(\mathfrak{A}_R)^2\mathfrak{A}_{-R} \leq 2^k\mathfrak{A}_R \leq \mathfrak{A}'_r.$$

Лемма доказана.

Введем еще одно кольцо $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A})$, расположенное между ковровым кольцом $L(^2\Phi,\mathfrak{A})$ типа C_n и кольцом $L(\Phi,K)$ типа A_{2n-1}. По определению $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A})$ порождается ковровыми кольцами $L(^2\Phi,\mathfrak{A})$ и $L(\Phi,\mathfrak{A}')$. Удивительность кольца $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A})$ заключается в том, что в силу следующей леммы оно может не являться ковровым именно тогда, когда характеристика основного кольца коэффициентов K равна 0 или $2m$, $m>1$. Как раз именно эти характеристики и были исключительными в статье [3] при решении вопроса 19.63 из Коуровской тетради для типа C_n. В данной статье кольцо $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A})$ играет ключевую роль в доказательстве теоремы 1.

Лемма 7. (а) *Если* $\operatorname{char} K = 2$, *то* $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A}) = L(^2\Phi,\mathfrak{A})$.

(б) *Если* $\operatorname{char} K$ *нечетна, то* $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A}) = L(\Phi,\mathfrak{A}')$.

Доказательство. По определению кольцо $L(^2\Phi,\mathfrak{A})$ порождается множествами

$$\mathfrak{A}_R e_R = \mathfrak{A}_R(e_r + e_{\overline{r}}), \quad \overline{r} \neq r,\ R=\{r,\overline{r}\},\ R \in {}^2\Phi,$$
$$\mathfrak{A}_R e_R = \mathfrak{A}_R e_r, \quad \overline{r} = r,\ R=\{r\},\ R \in {}^2\Phi,$$

а кольцо $L(\Phi,\mathfrak{A}')$ порождается множествами

$$\mathfrak{A}_R e_R = \mathfrak{A}'_r e_r, \quad \overline{r} = r,\ R=\{r\},\ r \in \Phi,$$
$$2\mathfrak{A}_R e_r = \mathfrak{A}'_r e_r, \quad \overline{r} \neq r,\ R=\{r,\overline{r}\},\ r \in \Phi.$$

Очевидно, если $\operatorname{char} K = 2$, то $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A}) = L(^2\Phi,\mathfrak{A})$. Если же характеристика кольца K нечетна, то при $R=\{r,\overline{r}\}$ из включений $2\mathfrak{A}_R e_r, 2\mathfrak{A}_R e_{\overline{r}} \in L(\Phi,\mathfrak{A}')$

вытекают включения $\mathfrak{A}_R e_r, \mathfrak{A}_R e_{\overline{r}} \in L(\Phi, \mathfrak{A}')$, в частности, $\mathfrak{A}_R e_R \in L(\Phi, \mathfrak{A}')$. Следовательно, $\widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A}) = L(\Phi, \mathfrak{A}')$.

Лемма доказана.

В общем случае кольцо $\widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A})$ не является ковровым. Оно задается парой ковров $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, причем второй является производным первого. Поэтому определение L-замкнутости ковра из разд. 2 нельзя использовать. Ковер $\mathfrak{A}$ будем называть *$\widehat{L}$-замкнутым*, если

$$\widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A}) \cap \mathfrak{A}_R e_R = \mathfrak{A}_R e_R, \quad R \in {}^2\Phi,$$

и

$$\widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A}) \cap \mathfrak{A}'_r e_r = \mathfrak{A}'_r e_r, \quad r \in \Phi.$$

Лемма 8. *Ковер $\mathfrak{A}$ является L-замкнутым тогда и только тогда, когда он $\widehat{L}$-замкнут.*

Доказательство. Поскольку $L(^2\Phi, \mathfrak{A}) < \widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A})$, то, очевидно, L-замкнутость следует из $\widehat{L}$-замкнутости.

Пусть ковер $\mathfrak{A}$ является L-замкнутым. По лемме 6 б) L-замкнутым будет и ковер $\mathfrak{A}'$. Кольцо $\widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A})$ порождается кольцами $L(^2\Phi, \mathfrak{A})$ и $L(\Phi, \mathfrak{A}')$. Поэтому достаточно убедиться в том, что лиево произведение порождающих элементов одного кольца на порождающие элементы другого кольца не нарушает $\widehat{L}$-замкнутость ковра $\mathfrak{A}$. Для этого достаточно проанализировать множество

$$[\mathfrak{A}_R(e_r + e_{\overline{r}}), \mathfrak{A}'_s e_s], \text{ где } \overline{r} \neq r,\ R = \{r, \overline{r}\},\ R \in {}^2\Phi,\ \overline{s} \neq s,\ S = \{s, \overline{s}\},\ s \in \Phi.$$

Пусть $[\mathfrak{A}_R(e_r + e_{\overline{r}}), \mathfrak{A}'_s e_s] \neq 0$. Тогда с точностью до замены s на $\overline{s}$ возможны два случая:

1) $r + s \in \Phi$, $r - \overline{s} \notin \Phi$;

2) $r + s \in \Phi$, $r - \overline{s} \in \Phi$.

В первом случае классам R, S и $R + S$ соответствуют короткие корни системы корней Σ типа C_n. Поэтому

$$\begin{aligned}[\mathfrak{A}_R(e_r + e_{\overline{r}}), \mathfrak{A}'_s e_s] &= \mathfrak{A}_R(2\mathfrak{A}_S)e_{r+s} \\ &= 2(\mathfrak{A}_R\mathfrak{A}_S)e_{r+s} \le 2\mathfrak{A}_{R+S}e_{r+s} = \mathfrak{A}'_{r+s}e_{r+s} \le \widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A}).\end{aligned}$$

Во втором случае классам R и S соответствуют короткие корни системы Σ, а классу $R + S$ — длинный корень. Поэтому

$$\begin{aligned}[\mathfrak{A}_R(e_r + e_{\overline{r}}), \mathfrak{A}'_s e_s] &= \mathfrak{A}_R(2\mathfrak{A}_S)e_{r+s} \\ &= 2(\mathfrak{A}_R\mathfrak{A}_S)e_{r+s} \le 4\mathfrak{A}_{R+S}e_{r+s} \le \mathfrak{A}_{R+S}e_{r+s} = \mathfrak{A}'_{r+s}e_{r+s} \le \widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A}).\end{aligned}$$

В обоих случаях первое из нестрогих неравенств $\le$ справедливо в силу условия ковровости для ковра типа C_n.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Если кольцо $L(^2\Phi, \mathfrak{A})$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(^2\Phi, \mathfrak{A})$, то кольцо $\widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A})$ также инвариантно относительно $E(^2\Phi, \mathfrak{A})$.*

Доказательство. Кольцо $\widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A})$ порождается кольцами $L(^2\Phi, \mathfrak{A})$ и $L(\Phi, \mathfrak{A}')$, и по условию леммы кольцо $L(^2\Phi, \mathfrak{A})$ инвариантно относительно подгруппы $E(^2\Phi, \mathfrak{A})$, поэтому достаточно установить инвариантность кольца $L(\Phi, \mathfrak{A}')$ относительно подгруппы $E(^2\Phi, \mathfrak{A})$.

По лемме 1(в) кольцо $L(\Phi,\mathfrak{A}')$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\Phi,\mathfrak{A}')$. Пересечение порождающих множеств ковровых подгрупп $E(^2\Phi,\mathfrak{A})$ и $E(\Phi,\mathfrak{A}')$ содержит корневые элементы вида $x_r(t)$, $\overline{r}=r$, $R=\{r\}$, $r\in\Phi$, $t\in\mathfrak{A}_R$ из (11). Поэтому остается показать, что $x_r(t)x_{\overline{r}}(t)ve_s\in\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A})$ для любого порождающего элемента вида $x_r(t)x_{\overline{r}}(t)$ из подгруппы $E(^2\Phi,\mathfrak{A})$ при $\overline{r}\neq r$, $R=\{r,\overline{r}\}$, и любого $ve_s\in 2\mathfrak{A}_Se_s$ при $\overline{s}\neq s$, $S=\{s,\overline{s}\}$, из кольца $L(\Phi,\mathfrak{A}')$. Так как $\overline{r}\neq r$ и $\overline{s}\neq s$, то с точностью до замены s на $\overline{s}$ возможны следующие три случая:

1) $r+s,\overline{r}+s\notin\Phi$;

2) $r+s\in\Phi$, $r-\overline{s}\notin\Phi$;

3) $r+s\in\Phi$, $r-\overline{s}\in\Phi$.

В случае 1
$$x_r(t)x_{\overline{r}}(t)ve_s=ve_s\in\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A}).$$
В случае 2
$$x_r(t)x_{\overline{r}}(t)ve_s=ve_s\pm tve_{r+s},$$
и так как
$$tve_{r+s}\in 2\mathfrak{A}_{R+S}e_{r+s}=\mathfrak{A}'_{r+s}e_{r+s},$$
то
$$x_r(t)x_{\overline{r}}(t)ve_s\in L(\Phi,\mathfrak{A}')\leq\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A}).$$
В случае 3 также
$$x_r(t)x_{\overline{r}}(t)ve_s=ve_s\pm tve_{r+s},$$
а поскольку
$$tve_{r+s}\in 2\mathfrak{A}_{R+S}e_{r+s}=2\mathfrak{A}_{R+S}e_{R+S},$$
то
$$x_r(t)x_{\overline{r}}(t)ve_s\in L(^2\Phi,\mathfrak{A})\leq\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A}).$$
Таким образом, в любом случае $x_r(t)x_{\overline{r}}(t)ve_s\in\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A})$.

Лемма доказана.

Поясним на примере наименьшей нетривиальной размерности непростую конструкцию кольца Ли $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A})$.

Пример 1. Пусть $\Sigma=\{\pm a,\pm b,\pm(a+b),\pm(2a+b)\}$ — система корней типа C_2 и $\mathfrak{A}$ — ковер типа типа C_2. Если $\Phi=\{\pm r_1,\pm r_2,\pm r_3,\pm(r_1+r_2),\pm(r_2+r_3),\pm(r_1+r_2+r_3)\}$ — система корней типа A_3, то в силу леммы 5 ковровое кольцо Ли $L(\Sigma,\mathfrak{A})$ можно отождествить с подкольцом $L(^2\Phi,\mathfrak{A})$ кольца $L(\Phi,K)$, полагая

$\mathfrak{A}_ae_a=\mathfrak{A}_a(e_{r_1}+e_{r_3})$,

$\mathfrak{A}_be_b=\mathfrak{A}_be_{r_2}$,

$\mathfrak{A}_{a+b}e_{a+b}=\mathfrak{A}_{a+b}(e_{r_1+r_2}+e_{r_2+r_3})$,

$\mathfrak{A}_{2a+b}e_{2a+b}=\mathfrak{A}_{2a+b}e_{r_1+r_2+r_3}$,

$\mathfrak{A}_{-a}e_{-a}=\mathfrak{A}_{-a}(e_{-r_1}+e_{-r_3})$,

$\mathfrak{A}_{-b}e_{-b}=\mathfrak{A}_{-b}e_{-r_2}$,

$\mathfrak{A}_{-a-b}e_{-a-b}=\mathfrak{A}_{-a-b}(e_{-r_1-r_2}+e_{-r_2-r_3})$,

$\mathfrak{A}_{-2a-b}e_{-2a-b}=\mathfrak{A}_{-2a-b}e_{-r_1-r_2-r_3}$.

Кольцо $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A})$ порождается подкольцом $L(^2\Phi,\mathfrak{A})$ и аддитивными подгруппами
$$2\mathfrak{A}_ae_{r_1},\ 2\mathfrak{A}_{a+b}e_{r_1+r_2},\ 2\mathfrak{A}_{-a}e_{-r_1},\ 2\mathfrak{A}_{-a-b}e_{-r_1-r_2}.$$
Из данного построения следует, что аддитивные подгруппы
$$2\mathfrak{A}_ae_{r_3},\ 2\mathfrak{A}_{a+b}e_{r_2+r_3},\ 2\mathfrak{A}_{-a}e_{-r_3},\ 2\mathfrak{A}_{-a-b}e_{-r_2-r_3}$$

также лежат в подкольце $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A})$, а следовательно, в $\widehat{L}(^2\Phi,\mathfrak{A})$ лежат и аддитивные подгруппы

$$\mathfrak{A}_a(e_{r_1}-e_{r_3}),\ \mathfrak{A}_{a+b}(e_{r_1+r_2}-e_{r_2+r_3}),\ \mathfrak{A}_{-a}(e_{-r_1}-e_{-r_3}),\ \mathfrak{A}_{-a-b}(e_{-r_1-r_2}-e_{-r_2-r_3}).$$

4. Доказательство теоремы 1

Нам потребуется также следующая лемма, эквивалентная лемме 11.1.3 из монографии Картера [9], применяемой им для доказательства простоты групп Шевалле над полями.

Лемма 10 [3, лемма 1]. *Пусть Φ — система корней. Тогда для любого корня $p\in\Phi$ существует корень $q\in\Phi$ такой, что число Картана A_{qp} равно*

$$\begin{aligned} &\pm 2, \quad \text{если } \Phi \text{ типа } C_l,\ l\geq 1, \text{ и } p \text{ — длинный корень},\\ &\pm 1 \quad \text{в противном случае.}\end{aligned} \tag{12}$$

В лемме 10 системы корней типа C_1 и A_1 совпадают по определению. Отметим также, что в [3] утверждение теоремы 1 для Φ типа C_n доказано при $n\leq 4$ с применением вложения Φ в этом случае в систему корней типа F_4.

Пусть Σ — система корней типа C_n, $n\geq 2$, и $x_p(t)\in E(\Sigma,\mathfrak{A})$ для фиксированного $p\in\Sigma$ и некоторого $t\in K$. Наша задача — установить включение $t\in\mathfrak{A}_p$. В силу третьего равенства из (8) для любого корня $q\in\Sigma$ имеем

$$x_p(t)h_q = h_q - A_{qp}te_p. \tag{13}$$

Рассмотрим целочисленный $E(\Sigma,\mathfrak{A})$-подмодуль M кольца $L(\Sigma,K)$, порожденный элементом h_q. Аналог равенства (13) справедлив для любого порождающего $x_r(u)$ группы $E(\Sigma,\mathfrak{A})$, а именно,

$$x_r(u)h_q = h_q - A_{qr}ue_p. \tag{14}$$

Поэтому в силу инвариантности кольца $L(\Sigma,\mathfrak{A})$ относительно подгруппы $E(\Sigma,\mathfrak{A})$, получаем включение

$$M\leq \mathbb{Z}h_q + L(\Sigma,\mathfrak{A}). \tag{15}$$

Если p — короткий корень, то $A_{qp}=\pm 1$ для подходящего корня $q\in\Sigma$ по лемме 10. Следовательно, из (13) и (15) получаем включение $t\in\mathfrak{A}_p$.

Пусть p — длинный корень. (Только в этом случае нам потребуются все утверждения из разд. 3.) Перейдем к подгруппе $E(^2\Phi,\mathfrak{A})$, изоморфной ковровой подгруппе $E(\Sigma,\mathfrak{A})$, где Φ — система корней типа A_{2n-1}. Последняя естественным образом вложима в систему корней Ψ типа A_{2n+1}. Пусть, как и ранее, $\{r_1,\ldots,r_{2n-1}\}$ — множество фундаментальных корней для Φ, а $\{r_0,r_1,\ldots,r_{2n}\}$ — для Ψ, причем в обоих случаях r_i+r_{i+1} — корень. Для краткости положим $h_i=h_{r_i}$. Нам также будем полезен вид матрицы Картана (16) для типа A_l:

$$(A_{r_ir_j}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & & & 0 & \\ & & & & & \\ & 0 & & & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Рассмотрим целочисленный $E(^2\Phi, \mathfrak{A})$-подмодуль M кольца $L(\Psi, K)$, порожденный элементом h, где

$$h = \begin{cases} h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_n, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ h_0 + h_2 + h_4 + \cdots + h_n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Элемент h наглядно изображен на графах Кокстера (рис. 2, 3), где темная вершина с номером i означает, что слагаемое h_i входит в разложение h.

Заметим, что вложение в систему корней типа A_{2n+1}, в действительности, необходимо только для нечетного n, чтобы определить элемент h.

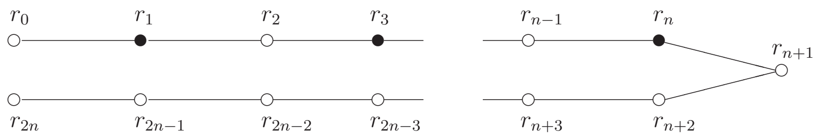

Рис. 2. Элемент h для четного $n \geq 2$.

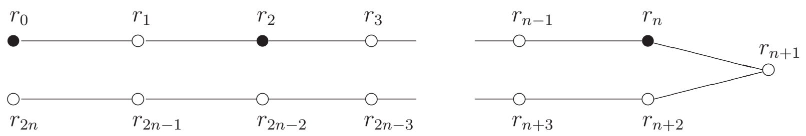

Рис. 3. Элемент h для нечетного $n \geq 3$.

При изоморфизме $E(^2\Phi, \mathfrak{A}) \simeq E(\Sigma, \mathfrak{A})$ корневому элементу $x_p(t)$ группы $E(\Sigma, \mathfrak{A})$ соответствует элемент $x_P(t)$, где $P = \{p\}$ и $\overline{p} = p$ (см. разд. 3). Не теряя общности, можно считать, что $p = r_{n+1}$. Тогда в силу выбора h имеем

$$x_P(t)h = x_{r_{n+1}}(t)h = h + te_P, \tag{17}$$

поскольку $A_{r_n r_{n+1}} = -1$. Более того, элемент h подобран так, что выполняется включение

$$M \leq \mathbb{Z}h + \widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A}). \tag{18}$$

Действительно, в силу предположения теоремы и лемм 2 и 9 кольцо $\widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A})$ инвариантно относительно подгруппы $E(^2\Phi, \mathfrak{A})$. Поэтому, если мы действуем на h порождающими вида

$$x_r(t),\ \overline{r} = r,\ R = \{r\},\ R \in {}^2\Phi,\ t \in \mathfrak{A}_R,$$

то, очевидно, образ лежит в $\mathbb{Z}h + \widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A})$. Остается рассмотреть действие на h порождающими вида

$$x_R(u) = x_r(u)x_{\overline{r}}(u),\ \overline{r} \neq r,\ R = \{r, \overline{r}\},\ R \in {}^2\Phi,\ u \in \mathfrak{A}_R.$$

В этом случае гипотетически может произойти расщепление произведения $x_r(u)x_{\overline{r}}(u)$ за счет элемента h. Покажем, что это невозможно.

Если r — простой корень, то в силу выбора h существуют такие $k, m \in \{-2, 0, 2\}$, что

$$x_R(u)h = x_r(u)x_{\overline{r}}(u)h = h + kue_r + mue_{\overline{r}}.$$

Все три слагаемые в правой части последнего равенства лежат в $\mathbb{Z}h + \widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A})$, и, следовательно, включение (18) выполняется.

Более общая ситуация, пусть корень r_{n+1} не участвует в представлении корня r в виде суммы простых корней. Тогда в силу билинейности скалярного произведения существуют такие целые числа k и m, что

$$x_R(u)h = x_r(u)x_{\overline{r}}(u)h = h + 2kue_r + 2mue_{\overline{r}}.$$

Три слагаемые в правой части последнего равенства также принадлежат $\mathbb{Z}h + \widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A})$, и, следовательно, включение (18) снова выполняется.

Наконец, если корень r_{n+1} участвует (один раз) в представлении корня r в виде суммы простых корней, то снова в силу билинейности скалярного произведения для некоторых целых чисел k и m

$$x_R(u)h = x_r(u)x_{\overline{r}}(u)h = h + 2kue_r + 2mue_{\overline{r}} + (\pm ue_r \pm ue_{\overline{r}}).$$

Все четыре слагаемые в правой части последнего равенства лежат в $\mathbb{Z}h+\widehat{L}(^2\Phi, \mathfrak{A})$, и, следовательно, включение (18) опять выполняется.

Итак, включение (18) выполняется в любом случае. В силу предположения теоремы и лемм 2, 3 и 8 ковер $\mathfrak{A}$ является $\widehat{L}$-замкнутым. Поэтому из (17) и (18) следует включение $t \in \mathfrak{A}_P$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левчук В. М.* Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 509–525.
2. *Нужин Я. Н.* Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2011. Т. 4, № 4. С. 527–535.
3. *Nuzhin Ya. N.* On the closedness of carpets of additive subgroups associated with a Chevalley group over a commutative ring // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2023. Т. 16, № 6. С. 732–737.
4. *Нужин Я. Н.* Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 195–200.
5. *The Kourovka notebook*: Unsolved problems in group theory, Eds. Mazurov V. D., Khukhro E. I., Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2022, №20.
6. *Койбаев В. А.* Элементарные сети в линейных группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 134–141.
7. *Койбаев В. А.* Замкнутые элементарные сети над полем нулевой характеристики // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 326–332.
8. *Куклина С. К., Лихачева А. О., Нужин Я. Н.* О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 192–196.
9. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London; New York; Sydney; Toronto: Wiley and Sons, 1972.

Поступила в редакцию 27 июля 2025 г.
После доработки 27 июля 2025 г.
Принята к публикации 15 августа 2025 г.

Нужин Яков Нифантьевич (ORCID 0009-0003-0426-9525)
Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`nuzhin2008@rambler.ru`