

УДК 517.545+519.173+519.177

## ТЕОРЕМА ПЛАНСА ДЛЯ КОНУСОВ НАД ОБОБЩЕННЫМ $I$ -ГРАФОМ

И. А. Медных

**Аннотация.** Рассматривается семейство графов, обобщающее семейство  $I$ -графов, которое, в свою очередь, включает обобщенные графы Петерсена и призматические графы. Работа посвящена исследованию критической группы графа, представляющего собой конус над обобщенным  $I$ -графом.

Основным результатом статьи является аналог теоремы Планса (1953), описывающей первую группу гомологий  $n$ -листного циклического накрытия трехмерной сферы, разветвленного над узлом. Она утверждает, что указанная группа гомологий является почти прямой суммой двух копий некоторой абелевой группы. В работе аналогичные результаты установлены для структуры критической группы рассматриваемых графов.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.110

**Ключевые слова:** циркулянтный граф, матрица Лапласа, критическая группа, теорема Планса.

### 1. Введение

Изучение свойств топологических объектов малой размерности широко распространено в различных областях математики. Данная статья задевает две из них, а именно, теорию узлов и теорию графов. Будет продемонстрировано сходство поведения разветвленных циклических накрытий базовых объектов этих теорий. Основной целью работы является сопоставление свойств первых групп гомологий накрытий узлов и критических групп конусов над графами.

В монографии [1] семейство  $I$ -графов было введено как дальнейшее расширение таких семейств, как графы Петерсена и призматические графы. Свойства данного семейства изучались в работах [2–4]. В статье [5] определена сложность, т. е. подсчитано число остовных деревьев, а также найдена структура критических групп для  $I$ -графов. Позже в [6] понятие  $I$ -графов было расширено до понятия кобордизма (или «сэндвича») двух циркулянтных графов. Как итог в работах [6, 7] вычислено количество остовных деревьев и определено число отмеченных остовных лесов таких графов. Далее в статьях [8, 9] термин «кобордизм двух циркулярных графов» был заменен на «обобщенный  $I$ -граф». В данном исследовании будем использовать второе наименование. Детальное описание этих понятий находится в разд. 2.2.

Основное содержание данной статьи было мотивировано классической теоремой Планса [10]. Пусть  $K$  – узел, вложенный в трехмерную сферу  $S^3$ . Через

---

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2026-0026.

$M_n$  обозначим  $n$ -листное циклическое накрытие  $\mathbb{S}^3$ , разветвленное над узлом  $K$ . Тогда первая группа гомологии  $M_n$  удовлетворяет следующим свойствам:

$$H_1(M_n, \mathbb{Z}) = G \oplus G \text{ для нечетного } n,$$

$$\ker(H_1(M_n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M_2, \mathbb{Z})) = G \oplus G, \text{ если } n \text{ четно.}$$

Здесь  $G$  — подходящая абелева группа, а  $\oplus$  — знак прямой суммы групп.

В работе устанавливается аналог теоремы Планса для конусов над  $I$ -графами и их критических групп. Соответствующее утверждение статьи — теорема 1.

Гилмер и Литерланд предложили альтернативную форму теоремы Планса для случая четно-листного накрытия. Формулировка и доказательство приведены в кандидатской диссертации Стевенса [11]. Нам потребуется понятие «трансфера». Для четных  $n = 2m$  многообразие  $M_{2m}$  может быть реализовано как разветвленное  $m$ -листное циклическое накрытие многообразия  $M_2$  с группой преобразования наложения  $\mathbb{Z}_m$ . Считаем, что на многообразиях  $M_{2m}$  и  $M_2$  заданы такие триангуляции, что соответствующие множества ветвления накрытия являются подкомплексами триангуляции  $M_{2m}$ , а накрывающее отображение симплициально. Любая ориентируемая цепь из  $C(M_2)$  поднимается до ориентируемой цепи в  $C(M_{2m})$  посредством отображения  $c = \sum a_i \sigma_i \rightarrow \sum_{g \in \mathbb{Z}_m} g c'_i$ ,

где  $c' = \sum a_i \sigma'_i$  и  $\sigma'_i$  — подходящее поднятие  $\sigma_i$ . Соответствующее индуцированное отображение групп гомологий  $Tr : H_1(M_2) \rightarrow H_1(M_{2m})$  называется *трансфером* или *гомоморфизмом переноса* (см. [12]). В [11, теорема 3.1] показано, что для  $n = 2m$  четно-листное накрытие  $M_n$  обладает свойством

$$H_1(M_n, \mathbb{Z})/Tr(H_1(M_2, \mathbb{Z})) \cong G \oplus G$$

для подходящей абелевой группы  $G$ .

В данной статье мы формулируем схожий аналог теоремы Планса, справедливый для графов (см. теорему 2). В рамках теории графов роль трансфера играет включение критических групп.

Результаты были получены исходя из анализа следующих фактов. В статье [7] нами была получена формула для числа отмеченных остовных лесов в обобщенном  $I$ -графе. Это число выражается через определитель  $|J_n|$  матрицы  $J_n = A^n - \mathbb{E}$ , где  $A$  — сопровождающая матрица ассоциированного полинома Лорана  $P(x)$ , описанного в разд. 2.5. Также в [7, теорема 2] было показано, что величины  $|J_{2m+1}|/|J_1|$  и  $|J_{2m}|/|J_2|$  являются полными квадратами. Более того, можно показать, что матрицы  $J_1^{-1} J_{2m+1}$  и  $J_2^{-1} J_{2m}$  целочисленны. Это подводит к идее об элементарной эквивалентности этих матриц блочно диагональным матрицам с двумя одинаковыми блоками. Такая гипотеза была подтверждена рядом численных экспериментов. Теорема 2, доказанная ниже, показывает, что гипотеза верна для всех обобщенных  $I$ -графов. В сущности, это эквивалентно версии теоремы Планса, сформулированной Гилмером и Литерландом.

## 2. Предварительные сведения

**2.1. Матрица Лапласа и критическая группа графа.** Для заданного неориентированного графа  $G$  без петель обозначим через  $V(G)$  и  $E(G)$  множества его вершин и ребер соответственно. Для двух вершин  $u, v$  графа  $G$  обозначим через  $a_{uv}$  число ребер, соединяющее их. Соответствующая матрица  $A = A(G) = \{a_{uv}\}_{u,v \in V(G)}$  называется *матрицей смежности* графа  $G$ . Определим *степень*  $d(v)$  вершины  $v \in V(G)$  как  $d(v) = \sum_u a_{uv}$ . Далее, через  $D = D(G)$

обозначим диагональную матрицу степеней графа  $G$ . Ее диагональные элементы это  $d_{vv} = d(v)$ . Матрицей Лапласа или лапласианом графа  $G$  называется матрица  $L = L(G) = D(G) - A(G)$ .

В рамках данной статьи посредством  $\mathbb{E}_n$  обозначается единичная матрица порядка  $n$ . При опускании индекса подразумевается, что мы имеем в виду единичную матрицу подходящего размера.

Каждому конечному графу можно сопоставить конечную абелеву группу. Будем называть ее *критической группой*. Также эта группа известна под названиями: группа Пикара, якобиан графа, долларовая группа и др. Соответствующие определения были независимо введены разными авторами в разных областях математики. Работы [13–17] описывают различные подходы к данному понятию.

В данной статье для описания критической группы  $K(G)$  графа  $G$ , следуем подходу Лоренцини [18].

Рассмотрим целочисленную  $m \times n$ -матрицу  $M$  как линейный оператор, действующий из целочисленной решетки  $\mathbb{Z}^m$  на  $\mathbb{Z}^n$ . Для такого оператора определен образ  $\text{im } M = M^t \mathbb{Z}^m$  и коядро  $\text{coker } M = \mathbb{Z}^n / \text{im } M$ . Рассмотрим матрицу Лапласа  $L(G)$  как линейный оператор из  $\mathbb{Z}^{|V|}$  на  $\mathbb{Z}^{|V|}$ , где  $|V|$  — число вершин графа  $G$ . Его коядро  $\mathbb{Z}^{|V|} / \text{im}(L(G))$  представляет собой абелеву группу. Эта группа может быть представлена своей канонической формой

$$\text{coker } L(G) = \mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_{|V|}},$$

где параметры  $d_j$ ,  $1 \leq j \leq |V|$ , удовлетворяют соотношениям  $d_j | d_{j+1}$ ,  $1 \leq j \leq |V| - 1$ . Если рассматриваемый граф  $G$  связан, то группы  $\mathbb{Z}_{d_1}, \mathbb{Z}_{d_2}, \dots, \mathbb{Z}_{d_{|V|-1}}$  конечны, а  $\mathbb{Z}_{d_{|V|}} = \mathbb{Z}$ .

Для связного графа  $G$  определим его *критическую группу*  $K(G)$  как подгруппу  $\text{coker } L(G)$ , свободную от кручения, т. е.

$$K(G) = \mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_{|V|-1}}.$$

**2.2. Циркулянтные графы и их обобщения.** Будем говорить, что  $n \times n$ -матрица *циркулянтна* и обозначать ее через  $\text{circ}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ , если она представима в виде

$$\text{circ}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Несложно показать (см., например, [19]), что собственные значения матрицы  $C = \text{circ}(a_0, \dots, a_{n-1})$  могут быть найдены как  $\lambda_j = p(\varepsilon_n^j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , где  $p(x)$  — полином  $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ , а  $\varepsilon_n$  — первообразный корень степени  $n$  из единицы.

Более того, циркулянтная матрица  $C$  выражается через  $p(x)$  как  $C = p(T_n)$ , где  $T_n = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$  —  $n \times n$ -матрица оператора циклического сдвига  $T_n : (x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_0)$ .

Рассмотрим натуральные числа  $n$  и  $s_1, s_2, \dots, s_k$  такие, что  $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < \frac{n}{2}$ . *Циркулянтным графом*  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  называется граф на  $n$  вершинах  $0, 1, \dots, n-1$ , у которого каждая вершина  $i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , смежна с вершинами  $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_k$ . Все номера вершин берутся в сравнении по модулю  $n$ . Нетрудно понять, что у всех вершин одинаковая степень  $2k$ .

Пусть заданы два циркулянтных графа  $G = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  и  $G' = C_n(t_1, t_2, \dots, t_\ell)$ . Определим *обобщенный I-граф*  $I_n = I_n(s_1, s_2, \dots, s_k; t_1, t_2, \dots, t_\ell)$  с лежащими в основании графами  $G$  и  $G'$  как граф, обладающий нижеприведенными множествами вершин и ребер:

$$V(I_n) = \{u_i, v_i \mid i = 1, \dots, n\},$$

$$E(I_n) = \{\{u_i, u_{i+s_j}\}, \{u_i, v_i\}, \{v_i, v_{i+t_h}\} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k, h = 1, \dots, \ell\}.$$

Здесь все индексы вершин берутся в сравнении по модулю  $n$ . На рис. 1 приведен пример I-графа на 12 вершинах. Это граф  $I_6(1; 1, 2)$  с основаниями  $G = C_6(1)$  и  $G' = C_6(1, 2)$ .

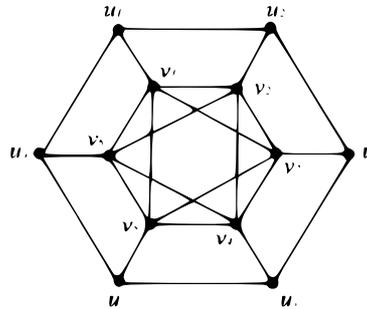


Рис. 1.

**2.3. Конусы над графами и разветвленные накрытия.** Рассмотрим граф, состоящий из одной вершины  $\{v\}$  и не имеющий ребер. Под *конусом над графом*  $G$  мы подразумеваем граф  $\hat{G} = G \star \{v\}$ , множество вершин которого имеет вид  $V(\hat{G}) = V(G) \cup \{v\}$ , а множество ребер задается как  $E(\hat{G}) = E(G) \cup \{\{w, v\}, w \in V(G)\}$ .

Пусть заданы два графа  $H = (V(H), E(H))$  и  $G = (V(G), E(G))$ . Сюръективное отображение  $f : V(H) \rightarrow V(G)$  называется *накрытием графов* (или *неразветвленным накрытием графов*), если для любой вершины  $v \in V(H)$  ограничение отображения  $f$  на окрестность  $v$  задает биективное отображение на окрестность вершины  $f(v)$  в графе  $G$ . *Группа преобразования наложения* накрытия  $f$  состоит из всех автоморфизмов  $h$  графа  $H$ , которые сохраняют проекцию, т. е.  $f \circ h = f$ . Будем называть  $n$ -листное накрытие *циклическим*, если его группа преобразований наложения является циклической группой порядка  $n$ .

Приведем более общее понятие *разветвленного накрытия* на примере двух конусов над заданными графами  $H$  и  $G$ . Предположим, что  $f$  является накрытием графа  $H$  над  $G$ . Рассмотрим два конуса  $\hat{H} = H \star \{v\}$  и  $\hat{G} = G \star \{u\}$ . В качестве разветвленного накрытия  $\hat{f}$  выступает сюръективное отображение, сужение которого на подграф  $H$  совпадает с  $f$ , вершина  $v$  отображается в вершину  $u$  и каждое ребро вида  $\{w, v\}, w \in V(H)$ , переходит в ребро  $\{f(w), u\}$ .

В роли графа  $H$  рассмотрим обобщенный I-граф  $I_n$ , а в качестве  $G$  — граф с петлями из двух вершин  $x$  и  $y$ , изображенный снизу слева на рис. 2. Число петель соответствует числу параметров циркулянтных графов, лежащих в основании рассматриваемого I-графа. Граф  $\hat{I}_n = I_n \star \{v\}$  можно трактовать как дискретный аналог циклического разветвленного накрытия  $M_n$  над узлом из теоремы Планса. Рис. 2 иллюстрирует пример 6-листных неразветвленного

и разветвленного накрытий графов.

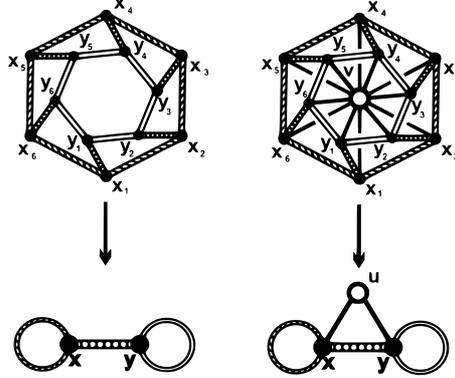


Рис. 2. Неразветвленное и разветвленное накрытия графов.

**2.4. Полиномы Чебышева.** В данной статье широко применяются полиномы Чебышева. Напомним определение и несколько основных свойств.

Полиномы Чебышева первого рода  $\mathcal{T}_n(x)$  и второго рода  $\mathcal{U}_n(x)$  — это полиномы степени  $n$ , определяемые как

$$\mathcal{T}_n(x) = \cos n\theta \text{ и } \mathcal{U}_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \text{ где } \theta = \arccos x.$$

Также можно ввести в рассмотрение полиномы Чебышева третьего  $\mathcal{V}_n(x)$  и четвертого родов  $\mathcal{W}_n(x)$ :

$$\mathcal{V}_n(x) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \theta/2} \text{ и } \mathcal{W}_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \theta/2}, \text{ где } \theta = \arccos x.$$

Выпишем пару формул, связывающих введенные полиномы:

$$\mathcal{U}_n(x) - \mathcal{U}_{n-1}(x) = \mathcal{V}_n(x), \quad \mathcal{U}_n(x) + \mathcal{U}_{n-1}(x) = \mathcal{W}_n(x).$$

Любой из полиномов Чебышева удовлетворяет одному и тому же рекуррентному соотношению

$$\mathcal{R}_{n+2}(x) = 2x\mathcal{R}_{n+1}(x) - \mathcal{R}_n(x), \quad \mathcal{R}_0(x) = 1,$$

но с разными начальными данными для  $n = 1$ . А именно,

$$\mathcal{T}_1(x) = x, \quad \mathcal{U}_1(x) = 2x, \quad \mathcal{V}_1(x) = 2x - 1, \quad \mathcal{W}_1(x) = 2x + 1.$$

В частности, из выше приведенных условий вытекает, что полиномы  $2\mathcal{T}_n(\frac{x}{2})$ ,  $\mathcal{U}_n(\frac{x}{2})$ ,  $\mathcal{V}_n(\frac{x}{2})$  и  $\mathcal{W}_n(\frac{x}{2})$  являются полиномами с целыми коэффициентами. Дополнительно в работе будем использовать следующее тождество:

$$\mathcal{T}_n\left(\frac{x+x^{-1}}{2}\right) = \frac{x^n + x^{-n}}{2}.$$

Указанные и другие свойства полиномов Чебышева можно найти, например, в [20, разд. 1.4.2].

**2.5. Палиндромные полиномы Лорана.** Полином Лорана  $P(x) \in \mathbb{C}[x, 1/x]$  называется *палиндромным*, если  $P(x) = P(1/x)$ . Такие полиномы всегда можно представить в виде

$$P(x) = a_0 + \sum_{j=1}^s a_j (x^j + x^{-j}).$$

Соответственно всегда существует полином  $Q(x)$  такой, что  $P(x) = Q(x + x^{-1})$ . Явный вид такого полинома задается формулой

$$Q(x) = a_0 + \sum_{j=1}^s 2a_j \mathcal{T}_j\left(\frac{x}{2}\right).$$

Назовем этот полином *преобразованием Чебышева* полинома  $P(x)$ . Заметим, что если палиндромный полином Лорана  $P(x)$  лежит в кольце  $\mathbb{Z}[x, 1/x]$ , то его преобразование Чебышева  $Q(x)$  лежит в кольце  $\mathbb{Z}[x]$ .

Каждому циркулянтному графу  $G = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  предпишем полином Лорана

$$L_G(x) = 2k - \sum_{j=1}^k (x^{s_j} + x^{-s_j}).$$

Рассмотрим конус над обобщенным  $I$ -графом  $\widehat{I}_n = \widehat{I}_n(G_1, G_2)$  с двумя циркулянтными основаниями  $G_1$  и  $G_2$ . Каждому такому графу  $\widehat{I}_n$  назначим палиндромный полином Лорана  $P(x) = (L_{G_1}(x) + 2)(L_{G_2}(x) + 2) - 1$ . Будем называть  $P(x)$  *ассоциированным полиномом Лорана* графа  $\widehat{I}_n$ .

**2.6. Сопровождающая матрица.** Введем следующее определение для сопровождающей матрицы полинома Лорана. Пусть  $P(x)$  — приведенный полином Лорана

$$P(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p+1} + \dots + a_{s-1} x^{p+s-1} + x^{p+s},$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_{s-1}, p, s$  являются целыми числами,  $a_0 \neq 0$  и  $s > 0$ . *Сопровождающей матрицей*  $\mathcal{A}$  полинома  $P(x)$  назовем матрицу вида

$$\mathcal{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbb{E}_{s-1} \\ \hline -a_0 & -a_1 \dots -a_{s-1} \end{array} \right).$$

Выпишем некоторые свойства  $\mathcal{A}$ . Нетрудно видеть, что  $\det(\mathcal{A}) = (-1)^s a_0$ . Характеристический полином матрицы  $\mathcal{A}$  совпадает с  $z^{-p} P(x)$ . Иногда вместо полинома  $P(x)$  удобнее использовать полином  $-P(x)$ . В этом случае будем считать, что оба полинома имеют одну и ту же сопровождающую матрицу.

Приведем следующую вспомогательную лемму. Она является частным случаем более общего утверждения, приведенного в [21, лемма 2].

**Лемма 1.** *Рассмотрим палиндромный полином  $P(x) = Q(x + x^{-1})$ , где  $Q(x)$  — приведенный полином с целыми коэффициентами. Обозначим через  $\mathcal{A}$  сопровождающую матрицу  $P(x)$ , а через  $\mathcal{B}$  — сопровождающую матрицу  $Q(x)$ . Тогда существует целочисленная унимодулярная матрица  $\Lambda$  такая, что*

$$\Lambda(\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1})\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}.$$

### 3. Основная часть

В данном разделе сформулированы две версии теоремы Планса для конусов над обобщенными  $I$ -графами.

Рассмотрим целочисленную  $m \times n$ -матрицу  $M$  как линейный оператор из  $\mathbb{Z}^m$  в  $\mathbb{Z}^n$ . Будем говорить, что абелева группа  $H$  представляется матрицей  $M$ , если  $H$  изоморфна абелевой группе  $\text{coker } M = \mathbb{Z}^n / \text{im } M$ .

**Теорема 1.** Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — циркулянтные графы на  $n$  вершинах. Обозначим через  $\widehat{I}_n$  конус над обобщенным  $I$ -графом с основаниями  $G_1$  и  $G_2$ . Рассмотрим ассоциированный с графом  $\widehat{I}_n$  полином Лорана  $P(x)$  и его преобразование Чебышева  $Q(x)$ . Обозначим сопровождающую матрицу  $Q(x)$  через  $\mathcal{B}$ . Тогда для критической группы  $K(\widehat{I}_n)$  выполнены следующие свойства.

- 1°. Пусть  $n = 2m + 1$  — нечетное натуральное число. Тогда существует эпиморфизм группы  $K(\widehat{I}_n)$  на группу  $K(\widehat{I}_1)$  такой, что его ядро разлагается в прямую сумму двух копий абелевой группы, представимой матрицей  $\mathcal{W}_m\left(\frac{\mathcal{B}}{2}\right)$ .
- 2°. Пусть  $n = 2m$  — четное натуральное число. Тогда существует эпиморфизм группы  $K(\widehat{I}_n)$  на группу  $K(\widehat{I}_2)$  такой, что его ядро разлагается в прямую сумму двух копий абелевой группы, представимой матрицей  $\mathcal{U}_{m-1}\left(\frac{\mathcal{B}}{2}\right)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Напомним [22, теорема 1], что критическая группа конуса над графом  $G$  представляется матрицей  $L(G) + \mathbb{E}$ . Повторяя доказательство из [22, теорема 2], можно показать, что критическая группа  $K(\widehat{I}_n)$  изоморфна коядру линейного оператора  $\mathcal{A}^n - \mathbb{E}$ , где  $\mathcal{A}$  является сопровождающей матрицей ассоциированного с  $\widehat{I}_n$  полиномом Лорана  $P(x)$ . Заметим, что старший и младший коэффициенты полинома  $P(x)$  равны 1. Из этого следует, что  $\det(\mathcal{A}) = 1$ . Для удобства введем обозначение  $J_n = \mathcal{A}^n - \mathbb{E}$ . Для любого  $n \in \mathbb{N}$  верно, что  $J_n$  — полином от матрицы  $\mathcal{A}$ . Соответственно все такие матрицы коммутируют друг с другом.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Легко видеть, что параметры циркулянтных графов  $G_1 = C_n(s_1, \dots, s_k)$  и  $G_2 = C_n(t_1, \dots, t_\ell)$  могут быть сколь угодно велики. В случае малых значений  $n$  обозначение  $K(\widehat{I}_n)$  отождествляется с группой, представленной матрицей  $\mathcal{A}^n - \mathbb{E}$ . На практике это можно трактовать как замену циркулянтного графа  $C_n(s_1, \dots, s_k)$  циркулянтным графом

$$C_n(s_1 \bmod n, \dots, s_k \bmod n).$$

Последний граф, возможно, имеет кратные ребра и петли.

Приведем доказательство первого пункта теоремы. Для этого предварительно заметим, что  $\det(J_1) \neq 0$ . Действительно,

$$\det(J_1) = P(1) = (L_{G_1}(1) + 2)(L_{G_2}(1) + 2) - 1 = 3.$$

Рассмотрим следующие формулы приведения:

$$\frac{x^{2m+1} - 1}{x - 1} = \sum_{j=0}^{2m} x^j = x^m \sum_{j=-m}^m x^j = x^m \mathcal{W}_m\left(\frac{x + x^{-1}}{2}\right).$$

Последнее равенство элементарно доказывается методом математической индукции, примененной к рекуррентным формулам, определяющим полином

$\mathcal{W}_n(x)$ . Подставляя унимодулярную матрицу в  $\mathcal{A}$  в полученное тождество, имеем

$$J_1^{-1}J_{2m+1} = \mathcal{A}^m \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1}}{2} \right).$$

Матрица справа очевидно целочисленна. Следовательно, целочисленна и матрица  $J_1^{-1}J_{2m+1}$ .

Сформулируем еще одну лемму.

**Лемма 2.** *Рассмотрим два линейных оператора  $S$  и  $T$ , переводящих целочисленную решетку  $\mathbb{Z}^n$  в себя. Если  $\ker S = 0$ , то имеет место точная последовательность*

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} T \rightarrow \operatorname{coker} ST \rightarrow \operatorname{coker} S \rightarrow 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Воспользуемся леммой о «змее» или леммой о «снежинке» (см., например, [23] или [24]). Эти леммы позволяют получить точную последовательность вида

$$0 \rightarrow \ker T \rightarrow \ker ST \rightarrow \ker S \rightarrow \operatorname{coker} T \rightarrow \operatorname{coker} ST \rightarrow \operatorname{coker} S \rightarrow 0.$$

Достаточно взять только часть

$$\ker S \rightarrow \operatorname{coker} T \rightarrow \operatorname{coker} ST \rightarrow \operatorname{coker} S \rightarrow 0.$$

Поскольку  $\ker S = 0$ , имеем утверждение леммы.

Применим лемму 2 к двум матричным операторам  $S = J_1$  и  $T = J_1^{-1}J_n$ . Замечая, что  $\ker J_1 = 0$ , имеем

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} J_1^{-1}J_n \rightarrow \operatorname{coker} J_n \rightarrow \operatorname{coker} J_1 \rightarrow 0.$$

Имеем  $\det(\mathcal{A}) = 1$ . Отсюда можно заключить, что матрица  $J_1^{-1}J_{2m+1} = \mathcal{A}^m \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1}}{2} \right)$  элементарно эквивалентна матрице  $\mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1}}{2} \right)$ . По лемме 1 существует унимодулярная целочисленная матрица  $\Lambda$  такая, что

$$\Lambda \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1}}{2} \right) \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{B}}{2} \right) & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{B}}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

Получим набор элементарно эквивалентных матриц

$$J_1^{-1}J_{2m+1} \sim \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1}}{2} \right) \sim \begin{pmatrix} \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{B}}{2} \right) & 0 \\ 0 & \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{B}}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

Коядра элементарно эквивалентных матриц совпадают. Следовательно,  $\operatorname{coker} J_1^{-1}J_{2m+1}$  расщепляется в прямую сумму двух копий абелевой группы  $\operatorname{coker} \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{B}}{2} \right)$ .

Второй пункт теоремы доказывается исходя из сходных алгебраических рассуждений. Предположим, что число  $n = 2m$  четно. Тогда

$$\frac{x^{2m} - 1}{x^2 - 1} = \sum_{j=0}^{m-1} x^{2j} = x^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} x^{2j+1-m} = x^{m-1} \mathcal{U}_{m-1} \left( \frac{x + x^{-1}}{2} \right).$$

Как и в первом пункте, последнее тождество можно получить по индукции из рекуррентных соотношений, определяющих полином  $\mathcal{U}_{m-1}(x)$ . Имеем

$$\det J_2 = \det(\mathcal{A}^2 - \mathbb{E}) = \det(\mathcal{A} - \mathbb{E}) \det(\mathcal{A} + \mathbb{E}) = P(1)P(-1) \neq 0.$$

Действительно,  $P(1) = 3$  и для произвольного циркулянтного графа  $G_1 = C_n(s_1, \dots, s_k)$  и связанного с ним полинома  $L_{G_1}(x)$  имеем

$$\begin{aligned} L_{G_1}(-1) &= 2k - \sum_{j=1}^k ((-1)^{s_j} + (-1)^{-s_j}) = 2 \sum_{j=1}^k \left( 1 - \frac{(-1)^{s_j} + (-1)^{-s_j}}{2} \right) \\ &= 4\#(j|s_j \text{ нечетно}). \end{aligned}$$

Также  $L_{G_2}(-1) = 4\#(j|t_j - \text{нечетно})$ . Число

$$P(-1) = (L_{G_1}(-1) + 2)(L_{G_2}(-1) + 2) - 1$$

всегда нечетно и, следовательно, не равно 0. Отсюда матрица  $J_2$  невырождена и  $\ker J_2 = 0$ . В итоге, применяя лемму 2 для целочисленных матриц  $S = J_2$  и  $T = J_2^{-1}J_n$ , имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{coker } J_2^{-1}J_n \rightarrow \text{coker } J_n \rightarrow \text{coker } J_2 \rightarrow 0.$$

Повторяя рассуждения из доказательства п. 1°, заключаем, что  $\text{coker } J_2^{-1}J_n$  расщепляется в прямую сумму двух копий абелевой группы  $\mathcal{U}_{m-1}\left(\frac{\mathcal{B}}{2}\right)$ .

Сформулируем альтернативную версию теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — два циркулянтных графа на  $n$  вершинах. Обозначим через  $\hat{I}_n$  конус над обобщенным  $I$ -графом с основаниями  $G_1$  и  $G_2$ . Рассмотрим ассоциированный полином Лорана  $P(x)$  графа  $\hat{I}_n$ . Пусть  $Q(x)$  — преобразование Чебышева полинома  $P(x)$ , а  $\mathcal{B}$  — сопровождающая матрица полинома  $Q(x)$ . Тогда критическая группа  $K(\hat{I}_n)$  обладает следующими свойствами.

- 1°. Пусть  $n = 2m + 1$  нечетно. Тогда существует вложение группы  $K(\hat{I}_1)$  в группу  $K(\hat{I}_n)$  такое, что факторгруппа  $K(\hat{I}_n)/K(\hat{I}_1)$  является прямой суммой двух копий абелевой группы, представимой матрицей  $\mathcal{W}_m\left(\frac{\mathcal{B}}{2}\right)$ .
- 2°. Пусть  $n = 2m$  четно. Тогда существует вложение группы  $K(\hat{I}_2)$  в группу  $K(\hat{I}_n)$  такое, что факторгруппа  $K(\hat{I}_n)/K(\hat{I}_2)$  является прямой суммой двух копий абелевой группы, представимой матрицей  $\mathcal{U}_{m-1}\left(\frac{\mathcal{B}}{2}\right)$ .

**Доказательство.** В сущности, доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 1. Для этого при использовании леммы 2 в случае 1° нужно положить  $S = J_1^{-1}J_n$ ,  $T = J_1$ , а в случае 2° —  $S = J_2^{-1}J_n$ ,  $T = J_2$ . В силу коммутативности матриц  $J_m$  и  $J_n$  в обоих случаях имеем  $ST = J_n$ . Как следствие получим следующие точные последовательности:

$$\ker J_n \rightarrow \text{coker } J_1 \rightarrow \text{coker } J_n \rightarrow \text{coker } J_1^{-1}J_n \rightarrow 0$$

и

$$\ker J_n \rightarrow \text{coker } J_2 \rightarrow \text{coker } J_n \rightarrow \text{coker } J_2^{-1}J_n \rightarrow 0$$

для нечетного и четного  $n$  соответственно.

Для завершения доказательства осталось показать, что  $\ker J_n = 0$  для любого  $n$ , т. е. надо показать, что  $\det(\mathcal{A}^n - \mathbb{E}) \neq 0$  для любого  $n$ . Это означает, что ни одно собственное значение матрицы  $\mathcal{A}$  не равно какому-либо первообразному корню из единицы. Допустим, от противного, что существует собственное значение  $\lambda$  матрицы  $\mathcal{A}$  такое, что  $|\lambda| = 1$ . Представим это число в виде  $\lambda = e^{i\varphi}$ ,

где  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Так как  $P(z)$  является характеристическим полиномом матрицы  $\mathcal{A}$ , то имеет место  $P(e^{i\varphi}) = 0$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} P(e^{i\varphi}) &= \left(2 + 2k - \sum_{j=1}^k (e^{is_j\varphi} + e^{-is_j\varphi})\right) \left(2 + 2\ell - \sum_{j=1}^{\ell} (e^{it_j\varphi} + e^{-it_j\varphi})\right) - 1 \\ &= \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k (1 - \cos(s_j\varphi))\right) \left(2 + 2 \sum_{j=1}^{\ell} (1 - \cos(t_j\varphi))\right) - 1 \geq 3 > 0. \end{aligned}$$

Противоречие.

Это значит, что  $\det J_n \neq 0$  для любого  $n$ . Соответственно  $\ker J_n = 0$  и верны точные последовательности

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} J_1 \rightarrow \operatorname{coker} J_n \rightarrow \operatorname{coker} J_1^{-1} J_n \rightarrow 0$$

и

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} J_2 \rightarrow \operatorname{coker} J_n \rightarrow \operatorname{coker} J_2^{-1} J_n \rightarrow 0$$

для нечетного и четного  $n$  соответственно.

В доказательстве теоремы 1 показано, что имеют место следующие разложения абелевых групп  $\operatorname{coker} J_1^{-1} J_n$  и  $\operatorname{coker} J_2^{-1} J_n$  в виде прямой суммы двух групп. А именно,

$$\operatorname{coker} J_1^{-1} J_n = \operatorname{coker} \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{B}}{2} \right) \oplus \operatorname{coker} \mathcal{W}_m \left( \frac{\mathcal{B}}{2} \right)$$

при  $n = 2m + 1$  и

$$\operatorname{coker} J_2^{-1} J_n = \operatorname{coker} \mathcal{U}_{m-1} \left( \frac{\mathcal{B}}{2} \right) \oplus \operatorname{coker} \mathcal{U}_{m-1} \left( \frac{\mathcal{B}}{2} \right)$$

при  $n = 2m$ . Последние два равенства и составляют утверждение теоремы.

Теорема 2 является аналогом альтернативной версии теоремы Планса, приведенной во введении. Заметим, что для теории узлов схожее утверждение неверно. В случае узла трилистника отображение трансфера неинъективно. Имеет место равенство

$$H_1(M_{\text{trefoil},2}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3 \quad \text{и} \quad H_1(M_{\text{trefoil},6}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Как результат, факторгруппа  $H_1(M_{\text{trefoil},6}, \mathbb{Z})/H_1(M_{\text{trefoil},2}, \mathbb{Z})$  не имеет смысла, в то время как

$$H_1(M_{\text{trefoil},6}, \mathbb{Z})/Tr(H_1(M_{\text{trefoil},2}, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

где  $Tr(H_1(M_{\text{trefoil},2}, \mathbb{Z})) = 0$ .

#### 4. Примеры и таблицы

1°. **Конус над призматическим графом  $I_n(1;1)$ .** Для конуса над призматическим графом, ассоциированным полиномом Лорана  $P(x)$ , и его преобразованием Чебышева  $Q(x)$  являются

$$x^2 P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1, \quad Q(x) = x^2 - 8x + 15.$$

Их сопровождающие матрицы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  это

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & -17 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -15 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обозначим  $K(\widehat{I}_n) = K(\widehat{I}_n(1; 1))$ . Нетрудно проверить, что  $K(\widehat{I}_1) = \mathbb{Z}_3$  и  $K(\widehat{I}_2) = \mathbb{Z}_{105}$ . Исходя из теоремы 2, получаем тождества

$$K(\widehat{I}_{2m+1})/K(\widehat{I}_1) = \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_m$$

и

$$K(\widehat{I}_{2m})/K(\widehat{I}_2) = \mathcal{L}'_m \oplus \mathcal{L}'_m,$$

где  $\mathcal{L}_m = \text{сокер } \mathcal{W}_m(\mathcal{B}/2)$  и  $\mathcal{L}'_m = \text{сокер } \mathcal{U}_{m-1}(\mathcal{B}/2)$ .

Структуры абелевых групп  $\mathcal{L}_m$  и  $\mathcal{L}'_m$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

$m$	$\mathcal{L}_m$	$\mathcal{L}'_m$
1	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_1$
2	$\mathbb{Z}_{319}$	$\mathbb{Z}_{15}$
3	$\mathbb{Z}_{4031}$	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{24}$
4	$\mathbb{Z}_{50616}$	$\mathbb{Z}_{2415}$
5	$\mathbb{Z}_{635009}$	$\mathbb{Z}_{30305}$
6	$\mathbb{Z}_{7965569}$	$\mathbb{Z}_{48} \oplus \mathbb{Z}_{7920}$
7	$\mathbb{Z}_{99918456}$	$\mathbb{Z}_{13} \oplus \mathbb{Z}_{366821}$

2°. **Конус над обобщенным графом Петерсена  $I_n(1; 2)$ .** Для графа  $\widehat{I}_n(1; 2)$  ассоциированным полиномом Лорана  $P(x)$  и связанным полиномом  $Q(x)$  являются полиномы

$$x^3 P(x) = x^6 - 4x^5 - 3x^4 + 15x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \quad Q(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 23.$$

Соответствующие сопровождающие матрицы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  приведены ниже:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & -15 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

В этом случае  $K(\widehat{I}_1(1; 2)) = \mathbb{Z}_3$  и  $K(\widehat{I}_2(1; 2)) = \mathbb{Z}_{33}$ .

Теорема 2 дает тождества

$$K(\widehat{I}_{2m+1}(1; 2))/K(\widehat{I}_1(1; 2)) = \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_m$$

и

$$K(\widehat{I}_{2m}(1; 2))/K(\widehat{I}_2(1; 2)) = \mathcal{L}'_m \oplus \mathcal{L}'_m,$$

где  $\mathcal{L}_m = \text{сокер } \mathcal{W}_m(\mathcal{B}/2)$  и  $\mathcal{L}'_m = \text{сокер } \mathcal{U}_{m-1}(\mathcal{B}/2)$ .

Группы  $\mathcal{L}_m$  и  $\mathcal{L}'_m$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

$m$	$\mathcal{L}_m$	$\mathcal{L}'_m$
1	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_1$
2	$\mathbb{Z}_{18}^2$	$\mathbb{Z}_{23}$
3	$\mathbb{Z}_{4171}$	$\mathbb{Z}_{336}$
4	$\mathbb{Z}_{53208}$	$\mathbb{Z}_{4439}$
5	$\mathbb{Z}_{676633}$	$\mathbb{Z}_{72} \oplus \mathbb{Z}_{792}$
6	$\mathbb{Z}_{8594093}$	$\mathbb{Z}_{726432}$
7	$\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{54} \oplus \mathbb{Z}_{336744}$	$\mathbb{Z}_{9230423}$

3°. **Конус над обобщенным I-графом  $I_n(1, 2; 1, 2)$ .** С графом  $\widehat{I}_n(1, 2; 1, 2)$  будут связаны полиномы  $P(x)$  и  $Q(x)$ , определяемые по формулам

$$x^4 P(x) = x^8 + 2x^7 - 11x^6 - 10x^5 + 39x^4 - 10x^3 - 11x^2 + 2x + 1,$$

$$Q(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 - 16x + 63.$$

Простые вычисления дают  $K(\widehat{I}_1(1, 2; 1, 2)) = \mathbb{Z}_3$  и  $K(\widehat{I}_2(1, 2; 1, 2)) = \mathbb{Z}_{105}$ .

Табл. 3 содержит описание структуры групп  $\mathcal{L}_m$  и  $\mathcal{L}'_m$  для данного случая.

Таблица 3

$m$	$\mathcal{L}_m$	$\mathcal{L}'_m$
1	$\mathbb{Z}_{63}$	$\mathbb{Z}_1$
2	$\mathbb{Z}_{48}^2$	$\mathbb{Z}_{63}$
3	$\mathbb{Z}_{73177}$	$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{315}$
4	$\mathbb{Z}_{2204307}$	$\mathbb{Z}_{68103}$
5	$\mathbb{Z}_{65092523}$	$\mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}_{96} \oplus \mathbb{Z}_{5280}$
6	$\mathbb{Z}_{1907493433}$	$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{63} \oplus \mathbb{Z}_{135135}$
7	$\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{144} \oplus \mathbb{Z}_{43000272}$	$\mathbb{Z}_{1743149317}$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bouwer I. Z., Chernoff W. W., Monson B., Star Z. The Foster census: RM Foster's census of connected symmetric trivalent graphs. Winnipeg, Canada: Charles Babbage Research Centre, 1988.
2. Boben M., Pisanski T., Žitnik A. I-graphs and the corresponding configurations // J. Combinatorial Designs. 2005. V. 13, N 6. P. 406–424.
3. Petkovšek M., Zakrajsek H. Enumeration of I-graphs: Burnside does it again // Ars Math. Contemp. 2009. V. 2, N 2. P. 241–262.
4. Horvat B., Pisanski T., Žitnik A. Isomorphism checking of I-graphs // Graphs and Combinatorics. 2012. V. 28, N 6. P. 823–830.
5. Mednykh I. A. On Jacobian group and complexity of the I-graph  $I(n, k, l)$  through Chebyshev polynomials // Ars Math. Contemp. 2018. V. 15, N 2. P. 467–485.

6. Abrosimov N. V., Baigonakova G. A., Mednykh I. A. Counting spanning trees in cobordism of two circulant graphs // Sib. Electron. Math. Rep. 2018. V. 15. P. 1145–1157.
7. Abrosimov N. V., Baigonakova G. A., Grunwald L. A., Mednykh I. A. Counting rooted spanning forests in cobordism of two circulant graphs // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. V. 17. P. 814–823.
8. Kwon Y. S., Mednykh A. D., Mednykh I. A. Complexity of the circulant foliation over a graph // J. Algebraic Combin. 2021. V. 53, N 1. P. 115–129.
9. Grunwald L. A., Kwon Y. S., Mednykh I. A. Counting rooted spanning forests for circulant foliation over a graph // Tohoku Math. J. (2). 2022. V. 74, N 4. P. 535–548.
10. Plans A. Aportación al estudio de los grupos de homología de los recubrimientos cíclicos ramificados correspondientes a un nudo // Rev. Acad. Ci. Madrid. 1953. V. 47. P. 161–193.
11. Stevens W. H. On the homology of branched cyclic covers of knots (1996). Louisiana State University Historical Dissertations and Theses. 6282. <https://repository.lsu.edu/gradschool-dissstheses/6282>
12. Bredon G. E. Introduction to compact transformation groups. New York: Acad. Press, 1972. (Pure Appl. Math.; V. 46).
13. Dhar D., Ruelle P., Sen S., Verma D.-N. Algebraic aspects of Abelian sandpile models // J. Phys. A: Math. Gen. 1995. V. 28, N 4. P. 805–831.
14. Bacher R., de la Harpe P., Nagnibeda T. The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph // Bull. Soc. Math. France. 1997. V. 125, N 2. P. 167–198.
15. Biggs N. L. Chip-firing and the critical group of a graph // J. Algebraic Combin. 1999. V. 9, N 1. P. 25–45.
16. Kotani M., Sunada T. Jacobian tori associated with a finite graph and its Abelian covering graphs // Adv. Appl. Math. 2000. V. 24, N 2. P. 89–110.
17. Baker M., Norine S. Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs // Int. Math. Res. Not. 2009. V. 15. P. 2914–2955.
18. Lorenzini D. Smith normal form and Laplacians // J. Combin. Theory Ser. B. 2008. V. 98, N 6. P. 1271–1300.
19. Davis P. J. Circulant matrices. Madison, USA: AMS Chelsea Publishing, 1994.
20. Mason J. C., Handscomb D. C. Chebyshev polynomials. Boca Raton: CRC Press, 2003.
21. Медных А. Д., Медных И. А., Соколова Г. К. Сопровождающая матрица суперпозиции полиномов и ее применение к теории узлов // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 521. С. 72–80.
22. Grunwald L. A., Mednykh I. A. On the Jacobian group of a cone over a circulant graph // Мат. заметки СВФУ. 2021. V. 28, N 2. P. 88–101.
23. Huang D. A cyclic six-term exact sequence for block matrices over a PID // Linear Multilinear Algebra. 2001. V. 49, N 2. P. 91–114.
24. Kutateladze S. S. Fundamentals of functional analysis. Netherlands: Springer Science & Business Media, 2013.

*Поступила в редакцию 6 мая 2025 г.*

*После доработки 6 мая 2025 г.*

*Принята к публикации 20 июня 2025 г.*

Медных Илья Александрович (ORCID 0000-0001-7682-3917)  
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
 пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
 Новосибирский государственный университет,  
 ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
[ilyamednykh@mail.ru](mailto:ilyamednykh@mail.ru)