Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 512.554

ЛЕВЫЕ ИДЕАЛЫ ПОЛУПЕРВИЧНЫХ АЛГЕБР НОВИКОВА

Н. В. Котенков, А. С. Панасенко

Аннотация. Изучаются левые идеалы алгебр Новикова. Показано, что центр и ассоциативный центр идеала полупервичной алгебры Новикова наследуются со всей алгебры. Доказывается, что в первичной неассоциативной алгебре Новикова любой левый идеал, не попадающий в правый аннулятор алгебры, является первичной неассоциативной алгеброй Новикова. Также получено описание левых идеалов полупервичной алгебры Новикова. Показано, что минимальный левый идеал алгебры Новикова лежит либо в центре, либо в ассоциаторном идеале алгебры.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.109

Ключевые слова: алгебра Новикова, первичная алгебра, полупервичная алгебра, аннулятор, минимальный идеал.

Введение

Тождества левосимметричности и правокоммутативности впервые возникли в работе И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман [1] при изучении гамильтоновых операторов. При изучении скобок Пуассона гидродинамического типа А. А. Балинским и С. П. Новиковым [2] тождества правосимметричности и левокоммутативности задавали локальную трансляционно инвариантную алгебру Ли первого порядка. Алгебры, удовлетворяющие тождествам правосимметричности и левокоммутативности, Осборном были названы алгебрами Новикова [3]. В последнее время общепринятым стало использование этого термина для левосимметричных и правокоммутативных алгебр.

Исторический контекст изучения структурной теории алгебр Новикова можно разделить на три естественных периода. Первый период посвящен изучению простых алгебр Новикова над алгебраически замкнутым полем, преимущественно конечномерных. В работе Е. И. Зельманова [4] было доказано, что простая конечномерная алгебра Новикова над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 является полем. В статье В. Т. Филиппова [5] были построены примеры простых конечномерных алгебр Новикова над полем ненулевой характеристики и простых бесконечномерных алгебр Новикова над произвольным полем. В работе [3] Осборном были описаны простые конечномерные алгебры Новикова с идемпотентом над совершенным полем нечетной характеристики. Ксу описал простые конечномерные алгебры Новикова над алгебраически замкнутым полем нечетной характеристики [6] и простые бесконечномерные алгебры Новикова над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики при условии наличия в алгебре элемента определенного типа [7].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН, тема FWNF-2026-0017.

Второй период был больше посвящен исследованиям в комбинаторной теории алгебр Новикова, особенно в области свободных алгебр. Однако имелись и важные структурные результаты для бесконечномерных алгебр Новикова, особенно в области ниль-алгебр. Например, в работе В. Т. Филиппова [8] доказано, что над полем нулевой характеристики левая ниль-алгебра Новикова ограниченного индекса является нильпотентной. А. С. Джумадильдаев и К. М. Туленбаев [9] доказали, что правая ниль-алгебра Новикова ограниченного индекса n над полем нулевой (или большей, чем n) характеристики является правонильпотентной. В статье В. А. Середы и В. Т. Филиппова [10] впервые изучались первичные алгебры Новикова и исследовались гомотопы алгебр Новикова.

Третий период относится к последнему десятилетию. Он посвящен установлению ясной структурной теории алгебр Новикова и на данный момент не завершен. Ключевой здесь стала работа И. П. Шестакова и Жанга [11], в которой были описаны минимальные идеалы алгебр Новикова и доказана эквивалентность свойств правонильпотентности, разрешимости и нильпотентности квадрата в многообразии алгебр Новикова. В работах В. Н. Желябина и У. У. Умирбаева [12, 13] доказано, что для разрешимости $\mathbb{Z}_n$-градуированной алгебры Новикова достаточно разрешимости ее нулевой компоненты при естественном ограничении на характеристику поля. В статье этих же авторов и К. М. Туленбаева [14] доказана разрешимость коммутаторного идеала Ли-разрешимой алгебры Новикова. В. Доценко, Н. Исмаилов и У. Умирбаев в [15] обобщили последний результат, доказав, что наличие в алгебре Новикова нетривиального полиномиального тождества приводит к разрешимости ее коммутаторного идеала над полем нулевой характеристики. В. Н. Желябин и А. С. Панасенко [16] доказали, что в $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебре Новикова с ассоциативной или Ли-нильпотентной индекса 3 четной частью коммутаторный идеал разрешим. В. Н. Желябин и А. С. Захаров [17] доказали, что простая конечномерная алгебра Новикова над алгебраически замкнутым полем нечетной характеристики является конструкцией Гельфанда — Дорфман алгебры усеченных многочленов и повторили результат Ксу об описании таких алгебр. В работах А. С. Панасенко [18, 19] было доказано, что идеал первичной (полупервичной) алгебры Новикова является первичной (полупервичной) алгеброй.

В данной работе изучаются левые идеалы и центры полупервичных алгебр Новикова. Показано, что центр и ассоциативный центр идеала полупервичной алгебры Новикова наследуются с центра и ассоциативного центра всей алгебры. Доказано, что в полупервичной алгебре Новикова каждый левый идеал либо является полупервичной алгеброй, либо содержит в себе ненулевой левый идеал всей алгебры, лежащий в правом аннуляторе всей алгебры. Получено описание минимальных левых идеалов в алгебре Новикова.

1. Идеалы и центры алгебр Новикова

Определение. Алгебра A называется *алгеброй Новикова*, если в ней выполнены следующие соотношения для любых элементов a, b, c алгебры A:

$$(a, b, c) = (b, a, c), \quad (ab)c = (ac)b,$$

где $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$.

Заметим, что коммутативная алгебра Новикова является ассоциативной алгеброй. В самом деле, в этом случае $\forall a, b, c \in A$

$$(a, b, c) = (ab)c - a(bc) = (ba)c - (bc)a = (bc)a - (bc)a = 0.$$

Кроме того, заметим, что в алгебре Новикова произведение идеалов является идеалом. Действительно, пусть I, J — идеалы алгебры A, $i \in I$, $j \in J$, $a \in A$. Тогда

$$(ij)a = (ia)j \in (IA)J \subseteq IJ,$$

$$a(ij) = -(a, i, j) + (ai)j = -(i, a, j) + (ai)j \in IJ.$$

Определение. Алгебра A называется *первичной*, если для любых двух идеалов B, C из того, что $BC = 0$, следует либо $B = 0$, либо $C = 0$.

Определение. *Ассоциативным центром* алгебры A называется следующее множество:

$$N(A) = \{n \in A \mid (n, A, A) = (A, n, A) = (A, A, n) = 0\}.$$

Определение. *Центром алгебры* A называется следующее множество:

$$Z(A) = \{z \in N(A) \mid za = az \ \forall a \in A\}.$$

Хорошо известно, что центр одностороннего идеала первичной ассоциативной алгебры наследуется с центра всей алгебры. Формулировка следующей леммы отсылает к этому факту.

Лемма 1. *Пусть A — первичная алгебра Новикова, I — ее идеал. Тогда $Z(I) = I \cap Z(A)$ и $N(I) = I \cap N(A)$.*

Доказательство. Если A коммутативна, то все очевидно. Пусть A некоммутативна. В первичной некоммутативной алгебре Новикова центр и ассоциативный центр равны нулю [18]. Так как A — первичная алгебра Новикова, то идеал I тоже является первичной алгеброй Новикова в силу [18], поэтому $Z(I) = Z(A) = N(I) = N(A) = 0$. Лемма доказана.

Определение. Алгебра A называется *полупервичной*, если она не содержит ненулевых тривиальных идеалов, т. е. если в алгебре для ее идеала B из того, что $B^2 = 0$, следует $B = 0$.

Лемма 2. *Пусть $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм алгебр. Тогда $\varphi(N(A)) \subseteq N(\varphi(A))$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $n \in N(A)$. Тогда для любых $a, b \in A$

$$(\varphi(n), \varphi(a), \varphi(b)) = \varphi(n, a, b) = 0.$$

Аналогично $(\varphi(a), \varphi(n), \varphi(b)) = (\varphi(a), \varphi(b), \varphi(n)) = 0$. Таким образом, $\varphi(n) \in N(\varphi(A))$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть A — полупервичная алгебра Новикова, I — ее идеал. Тогда $N(I) = I \cap N(A)$ и $Z(I) = I \cap Z(A)$.*

Доказательство. Поскольку A — полупервичная алгебра, то A есть подпрямая сумма первичных алгебр в силу [20, теорема 8.6]. Имеем $A \subseteq \prod\limits_{i \in S} A_i$, $\phi_i : A \to A_i$ — эпиморфизмы, $\operatorname{Ker} \phi_i = T_i$, $\bigcap T_i = 0$ и A_i — первичные алгебры.

Пусть A_i — некоммутативная алгебра. Тогда $N(A_i) = 0$. Рассмотрим гомоморфный образ $\overline{I}$ идеала I относительно гомоморфизма ϕ_i. Тогда $N(\overline{I}) = 0$ в силу [18]. Пусть $n \in N(I)$, $a, b \in I$. Тогда $\phi_i(N(I)) \subseteq N(\phi_i(I)) = 0$. В частности, $\phi_i(N(I)) = \phi_i(I) \cap \phi_i(N(A))$.

Рассмотрим случай, когда A_i является коммутативной и ассоциативной алгеброй. Тогда

$$\phi_i(N(I)) = \phi_i(I) = \phi_i(I) \cap \phi_i(A) = \phi_i(I) \cap \phi_i(N(A)).$$

Таким образом, последнее равенство выполнено для любых $i \in S$. Пусть $n \in N(I)$, $a, b \in A$. Тогда $\phi_i(n) \in \phi_i(N(A))$ по доказанному и

$$\phi_i(n, a, b) = (\phi_i(n), \phi_i(a), \phi_i(b)) = 0.$$

Стало быть, $(n, a, b) \in T_i$ для всех $i \in S$, откуда $(n, a, b) = 0$. Аналогично $(a, b, n) = 0$, т. е. $n \in N(A)$. В итоге получаем, что $N(I) = I \cap N(A)$. Лемма доказана.

2. Левые идеалы алгебр Новикова

Определение. Пусть I — левый идеал алгебры A. Будем использовать обозначение $(I : A^{\#}) = \{a \in I \mid a \cdot A \subseteq I\}$.

Наибольший идеал алгебры A, содержащийся в левом идеале I, обозначим через $\check{I}$.

Лемма 4. *Пусть A — алгебра Новикова, I — ее левый идеал. Тогда справедливо равенство $\check{I} = (I : A^{\#})$.*

Доказательство. Сперва покажем, что $(I : A^{\#})$ — идеал алгебры A. Пусть $a \in (I : A^{\#})$. Тогда

$$\begin{aligned}(a \cdot A)A &\subseteq (a, A, A) + aA^2 \subseteq (A, a, A) + aA^2 \\ &\subseteq (Aa)A + A(aA) + aA^2 \subseteq A^2a + A(aA) + aA^2 \subseteq I\end{aligned}$$

и $aA \subseteq (I : A^{\#})$. Далее,

$$(Aa)A \subseteq A^2a \subseteq I.$$

Поскольку $a \in I$, то $Aa \subseteq (I : A^{\#})$. Таким образом, множество $(I : A^{\#})$ является идеалом.

Покажем, что $\check{I} \subseteq (I : A^{\#})$. Идеал $\check{I}$ содержится в I и из того, что $a \in \check{I}$, следует $a \cdot A \in \check{I} \subseteq I$. Таким образом, $a \in (I : A^{\#})$. Из этого вытекает, что $\check{I} \subseteq (I : A^{\#})$.

Обратно, так как $(I : A^{\#})$ является идеалом в A, а идеал $\check{I}$ максимальный, содержащийся в I, то $(I : A^{\#})$ содержится в $\check{I}$. Лемма доказана.

Определение. *Правым аннулятором* алгебры A называется множество $\operatorname{Ann}_r A = \{r \in A \mid Ar = 0\}$. *Левым аннулятором алгебры* A называется множество $\operatorname{Ann}_l A = \{r \in A \mid rA = 0\}$.

Лемма 5. *Пусть I — левый идеал алгебры Новикова A. Тогда AI — двусторонний идеал алгебры A, содержащийся в I. В частности, если $\check{I} = 0$, то $I \subseteq \operatorname{Ann}_r A$.*

Доказательство. Пусть A — алгебра Новикова, I — ее левый идеал. Заметим, что

$$(AI)A \subseteq (AA)I \subseteq AI, \quad A(AI) \subseteq AI.$$

Таким образом, AI — двусторонний идеал. Тогда $AI \subseteq \check{I}$. Тем самым если $\check{I} = 0$, то $AI = 0$. Лемма доказана.

Пример. Пусть A — ассоциативная и коммутативная алгебра с дифференцированием d. Зададим на векторном пространстве A следующее умножение:

$$x \circ y = xd(y).$$

Тогда A с умножением $\circ$ является алгеброй Новикова, которая обозначается через $(A, \circ)$. Если $y \in \mathrm{Ker}(d)$, то $y \in \mathrm{Ann}_r(A, \circ)$.

Если A — кольцо усеченных многочленов над полем характеристики $p > 0$ и d — обычное дифференцирование на A, то хорошо известно, что $(A, \circ)$ — простая алгебра Новикова, т. е. не содержит ненулевых собственных двусторонних идеалов [5]. При этом $d(1) = 0$, т. е. $1 \in \mathrm{Ann}_r(A, \circ)$. Таким образом, первичная (даже простая) алгебра Новикова может обладать ненулевым правым аннулятором.

Лемма 6. *Пусть A — первичная неассоциативная алгебра Новикова, J — ее левый идеал. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $A \cdot J = 0$, *т. е. J лежит в $\mathrm{Ann}_r A$;*

(2) J — *неассоциативная первичная алгебра Новикова.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

(1) Пусть $\check{J} = 0$. Из этого получаем, что $AJ = 0$, $Z(J) = N(J) = J$, и тогда J является коммутативной и ассоциативной алгеброй.

(2) Пусть $\check{J} \neq 0$.

Так как $Z(A) = N(A) = 0$ [18], то $Z(\check{J}) = N(\check{J}) = 0$ по лемме 1. Пусть $Z(J) \cap \check{J} \neq 0$ и $z \in Z(J) \cap \check{J}$, тогда $zj = jz \ \ \forall\, j \in \check{J} \Rightarrow z \in Z(\check{J}) = 0$. Имеем $Z(J) \cap \check{J} = 0$.

По лемме 5 $AJ \subseteq \check{J}$, и тогда $\check{J}Z(J) \subseteq \check{J} \cap Z(J) = 0$.

Имеем $\mathrm{Ann}_l\, J\check{J} \subseteq \mathrm{Ann}_l\, JJ = 0$. Из того, что $\mathrm{Ann}_l\, J$ будет идеалом алгебры A [18], и из первичности алгебры A получаем, что $\mathrm{Ann}_l\, J = 0$.

Рассмотрим J как алгебру. Рассмотрим в ней два идеала B, C. Допустим, что $BC = 0$, однако $B \neq 0$ и $C \neq 0$. Рассмотрим множество BJ. Оно содержится в $\check{J}$ по лемме 5 и будет идеалом в $\check{J}$:

$$(BJ)\check{J} = (B\check{J})J \subseteq BJ,$$

$$\begin{aligned}\check{J}(BJ) &\subseteq (\check{J}, B, J) + (\check{J}B)J \subseteq (B, \check{J}, J) + (BJ)\\ &\subseteq (B\check{J})J + B(\check{J}J) + BJ \subseteq BJ + BJ + BJ \subseteq BJ.\end{aligned}$$

То же верно и для CJ. Поскольку идеал первичной алгебры является первичной алгеброй [18], то из $(BJ)(CJ) = 0$ получаем, что $(BJ) = 0$, тогда $B = 0$, так как $\mathrm{Ann}_l\, J = 0$ либо $CJ = 0$ и далее аналогично $C = 0$. Как итог: J — первичная алгебра. Поскольку A неассоциативна, то $\check{J}$ тоже неассоциативна в силу [19]. Тогда $J \supseteq \check{J}$ тоже неассоциативна. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть A — полупервичная алгебра Новикова, J — ее левый идеал. Тогда $\check{J}\,\mathrm{Ann}_l\, J = 0$ и верно одно из следующих утверждений:*

(1) J — *полупервичная алгебра;*

(2) *существует ненулевой левый идеал I в A такой, что $I \subseteq J$, $AI = IJ = 0$.*

Доказательство. Полупервичная алгебра A есть подпрямое произведение первичных алгебр A_i, т. е. $A \subseteq \prod\limits_{i \in S} A_i$, где $A_i = A/T_i$ и $\bigcap T_i = 0$. Пусть J — ее левый идеал. Рассмотрим $A/T_i \cdot J/T_i = (AJ)/T_i$.

Пусть $\check{J} = 0$. Это значит, что $AJ = 0$ и $J^2 = 0$.

Допустим, что $\check{J} \neq 0$. Как и выше, $\mathrm{Ann}_l\, J$ — идеал алгебры A.

Рассмотрим $(\check{J}\,\mathrm{Ann}_l\, J)$. Данное множество является идеалом в алгебре A. Тогда верно, что $\check{J}\,\mathrm{Ann}_l\, J \subseteq \check{J}$ и $\check{J}\,\mathrm{Ann}_l\, J \subseteq \mathrm{Ann}_l\, J$. В силу этого верно, что $(\check{J}\,\mathrm{Ann}_l\, J)^2 \subseteq (\check{J} \cap \mathrm{Ann}_l\, J)^2 = 0$. Поскольку алгебра A полупервична, то $\check{J}\,\mathrm{Ann}_l\, J = 0$

Допустим, что $\mathrm{Ann}_l\, J = 0$. Тогда $\check{J}$ является полупервичной алгеброй [18]. Рассмотрим J как алгебру. Допустим, что в ней существует идеал $C \neq 0$ такой, что $C^2 = 0$. Верно, что $CJ \subseteq \check{J}$ по лемме 5, и поскольку C — идеал в J, то CJ идеал в $\check{J}$, как в лемме 4. Поскольку $C^2 = 0$, то $(CJ)^2 = 0$. Это значит, что $CJ = 0$, однако в силу того, что $\mathrm{Ann}_l\, J = 0$, имеем $C = 0$. Получаем, что J — полупервичная алгебра.

Пусть теперь $\check{J} \neq 0$, $\mathrm{Ann}_l\, J \neq 0$ и верно, что J — не полупервичная алгебра.

Рассмотрим идеал I алгебры J. Пусть $I^2 = 0$ и $I \neq 0$. Тогда $(IJ)^2 = 0$, поскольку $IJ \subseteq I$. Далее, $IJ \trianglelefteq \check{J}$, где $\check{J}$ — полупервичная алгебра, поэтому получаем, что $IJ = 0$, т. е. $I \subseteq \mathrm{Ann}_l\, J$. Далее, пусть T — первичный идеал алгебры A такой, что $\overline{J} = J/T \neq 0$. Тогда известно, что $\overline{A} = A/T$ — первичная алгебра и верно, что $(\check{J}/T)\,\overline{\mathrm{Ann}_l\, J} = 0$, по лемме 4. Следовательно, либо $\check{J}/T = 0$, либо $\overline{\mathrm{Ann}_l\, J} = 0$.

Если $\check{J}/T = 0$, то $\overline{A}\,\overline{J} = 0 \Rightarrow \overline{A}\,\overline{I} = \overline{0}$.

Если $\overline{\mathrm{Ann}_l\, J} = \overline{0}$, то $\overline{IJ} = \overline{0}$, $\overline{I} = \overline{0}$. В любом из случаев идеал $\overline{I}$ будет лежать в правом аннуляторе алгебры $\overline{A} = A/T$ для всех T, а также $(AI)/T_i = 0$ и $(IJ)/T_i = 0$ во всех факторах $i \in S$. Тем самым $AI \subseteq \bigcap T_i = 0$ и $AI = 0$. Теорема доказана.

В заключение уточним результаты из [18, 11].

Лемма 7. *Пусть A — алгебра Новикова, I — минимальный левый идеал алгебры A. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

- *I — одномерный и $AI = 0$,*
- *I — двусторонний идеал и $I^2 = 0$,*
- *I — двусторонний идеал и I — простая алгебра.*

Доказательство. Пусть I — минимальный левый идеал алгебры A. В силу леммы 2 AI — двусторонний идеал, содержащийся в I. Таким образом, либо $AI = 0$, либо $AI = I$. В первом случае любое подпространство I является левым идеалом, поэтому I одномерен в силу минимальности. Во втором случае получаем, что I — двусторонний идеал, и из теоремы Шестакова — Жанга [11] следует, что либо $I^2 = 0$, либо I — простая алгебра. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть I — минимальный левый идеал алгебры Новикова A, $I^2 \neq 0$ и I ассоциативен. Тогда $I \subseteq N(A)$.*

Доказательство. Из предыдущей леммы вытекает, что I — двусторонний идеал, который является простой алгеброй. Из $(A, I, I) = 0$ вытекает, что I — ассоциативная алгебра. В ассоциативной правокоммутативной алгебре справедливо равенство $x[y, z] = 0$, т. е. $I[I, I] = 0$. Хорошо известно, что коммутаторное пространство $[I, I]$ является идеалом алгебры A, так что либо $[I, I] = 0$, либо $[I, I] = I$. Во втором случае получаем $I^2 = 0$; противоречие, так что справедливо $[I, I] = 0$, т. е. I — коммутативная алгебра. Тогда из [18, лемма 8] вытекает, что $I \subseteq N(A)$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть I — минимальный левый идеал алгебры Новикова A и $I^2 \neq 0$. Тогда либо $I \subseteq (A, A, A)$, либо $I \subseteq Z(A)$.*

Доказательство. Если I не лежит в (A, A, A), то в силу минимальности $I \cap (A, A, A) = 0$. Это значит, что $(I, I, I) = 0$, откуда по лемме 8 $I \subseteq N(A)$. Пусть $i, j \in I$, $a \in A$. Тогда

$$i(ja) = (ij)a = (ia)j = i(aj),$$

откуда $i[a, j] = 0$, т. е. $I[A, I] = 0$. Поскольку I является двусторонним идеалом в силу леммы 7, то $[A, I]$ является двусторонним идеалом, лежащим в I. Это значит, что $[A, I] = 0$ (поскольку иначе $[A, I] = I$ и $I^2 = 0$) и $I \subseteq Z(A)$. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функцион. анализ и его прил. 1979. Т. 13, № 4. С. 13–30.
2. *Балинский А. А., Новиков С. П.* Скобки Пуассона гидродинамического типа, Фробениусовы алгебры и алгебры Ли // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 5. С. 1036–1039.
3. *Osborn J. M.* Simple Novikov algebras with an idempotent // Commun. Algebra. 1992. V. 20, N 9. P. 2729–2753.
4. *Зельманов Е. И.* Об одном классе локальных трансляционно инвариантных алгебр Ли // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292, № 6. С. 1294–1297.
5. *Филиппов В. Т.* Об одном классе простых неассоциативных алгебр // Мат. заметки. 1989. Т. 45, № 1. С. 101–105.
6. *Xu X.* On simple Novikov algebras and their irreducible modules // J. Algebra. 1996. V. 185, N 3. P. 905–934.
7. *Xu X.* Classification of simple Novikov algebras and their irreducible modules of characteristic 0 // J. Algebra. 2001. V. 246, N 2. P. 673–707.
8. *Филиппов В. Т.* О правосимметричных и новиковских ниль-алгебрах ограниченного индекса // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 2. С. 289–295.
9. *Dzhumadil'daev A. S., Tulenbaev K. M.* Engel theorem for Novikov algebras // Commun. Algebra. 2006. V. 34, N 3. P. 883–888.
10. *Филиппов В. Т., Середа В. А.* О гомотопах алгебр Новикова // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 174–182.
11. *Shestakov I. P., Zhang Z.* Solvability and nilpotency of Novikov algebras // Commun. Algebra. 2002. V. 48, N 12. P. 5412–5420.
12. *Zhelyabin V., Umirbaev U.* On the solvability of Z3-graded Novikov algebras // Symmetry. 2021. V. 312. P. 1–13.
13. *Umirbaev U., Zhelyabin V.* On the solvability of graded Novikov algebras // Intern. J. Algebra. 2021. V. 31, N 7. P. 1405–1418.
14. *Tulenbaev K., Umirbaev U., Zhelyabin V.* On the Lie-solvability of Novikov algebras // J. Algebra Appl. 2022. V. 22, N 5. 2350117.
15. *Dotsenko V., Ismailov N., Umirbaev U.* Polynomial identities in Novikov algebras // Math. Z. 2023. V. 303. N 60.
16. *Panasenko A. S., Zhelyabin V. N.* Novikov Z2-graded algebras with an associative 0-component // Sib. Math. J. 2024. V. 65, N 2. P. 426–440.
17. *Zhelyabin V. N., Zakharov A. S.* On finite-dimensional simple Novikov algebras of characteristic p // Sib. Math. J. 2024. V. 65, N 3. P. 680–687.
18. *Panasenko A. S.* Semiprime Novikov algebras // Internat. J. Algebra Comput. 2022. V. 32, N 7. P. 1369–1378.
19. *Panasenko A. S.* On radicals of Novikov algebras // Commun. Algebra. 2024. V. 52, N 1. P. 140–147.

20. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 10 июля 2025 г.
После доработки 31 октября 2025 г.
Принята к публикации 2 ноября 2025 г.

Котенков Никита Вадимович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`n.kotenkov@g.nsu.ru`

Панасенко Александр Сергеевич (ORCID 0000-0003-1637-3779)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`a.panasenko@g.nsu.ru`