Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 517.956

КЛАССЫ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. Е. Кангужин, Б. Д. Кошанов

Аннотация. Как известно, квазигиперболические уравнения связаны с суммой двух операторов. Один из операторов порождается линейными дифференциальными выражениями, зависящими от времени, второй представляет собой эллиптический оператор по пространственным переменным. В работе дифференциальный оператор по времени порождается двухточечными регулярными по Биркгофу граничными условиями, а эллиптический оператор по пространственным переменным удовлетворяет так называемым условиям Агмона. Для однозначной разрешимости существенную роль играет взаимное расположение спектров указанных выше двух операторов. В то же время классы разрешимости исследуемых задач зависят от спектра эллиптической части уравнения. В работе приведены классы однозначной разрешимости квазигиперболичекого уравнения в зависимости от той или иной гладкости по времени его правой части.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.108

Ключевые слова: эллиптические операторы, квазигиперболические уравнения, начально-краевая задача, разрешимость задачи, существование решения, единственность решения, собственные значения оператора, полные ортонормированные системы.

1. Введение

В настоящей работе через Ω обозначена произвольная ограниченная N-мерная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть

$$A(x,D) \equiv \sum_{|\alpha|\le l} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha}(x) D^{\alpha})$$

— произвольный положительный формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка $2l$ с достаточно гладкими коэффициентами $a_\alpha(x)$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ — мультииндекс и $D = (D_1, \dots, D_N)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Пусть $0 < T < \infty$. Введем дифференциальное выражение

$$l\left(t, \frac{d}{dt}\right) \equiv \frac{d^{2p}}{dt^{2p}} + \sum_{k=0}^{2p-2} p_k(t) \frac{d^k}{dt^k}, \quad t \in (0,T),$$

Работа выполнена при поддержке грантов AP19175972 и BR31714735 Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан.

где $p_k(t) \in C^k[0,T]$, $k = 0, 1, \ldots, 2p-2$.

Рассмотрим дифференциально-операторное уравнение

$$l\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) + A(x,D)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

с краевыми условиями по x при фиксированном $t \in (0,T)$,

$$\begin{gathered} B_j u(x,t) \equiv \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{\alpha,j}(x) D^\alpha u(x,t) = 0, \\ 0 \le m_j \le 2l-1, \ j = 1, \ldots, l, \ x \in \partial\Omega, \ 0 < t, \end{gathered} \tag{2}$$

с условиями по t при фиксированном $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} U_{2\xi-1}(u(x,\cdot)) \equiv {} & \frac{\partial^{j_\xi} u(x,t)}{\partial t^{j_\xi}}\Big|_{t=0} \\ & + \sum_{s=0}^{j_\xi-1} \left(\alpha_{2\xi-1,s} \frac{\partial^s u(x,t)}{\partial t^s}\Big|_{t=0} + \beta_{2\xi-1,s} \frac{\partial^s u(x,t)}{\partial t^s}\Big|_{t=T} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{2\xi}(u(x,\cdot)) \equiv {} & \frac{\partial^{j_\xi} u(x,t)}{\partial t^{j_\xi}}\Big|_{t=T} \\ & + \sum_{s=0}^{j_\xi-1} \left(\alpha_{2\xi,s} \frac{\partial^s u(x,t)}{\partial t^s}\Big|_{t=0} + \beta_{2\xi,s} \frac{\partial^s u(x,t)}{\partial t^s}\Big|_{t=T} \right) = 0, \quad \xi = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & U_{2m+\xi}(u(x,\cdot)) \equiv \alpha_{2m+\xi,\nu_\xi} \frac{\partial^{\nu_\xi} u(x,t)}{\partial t^{\nu_\xi}}\Big|_{t=0} + \beta_{2m+\xi,\nu_\xi} \frac{\partial^{\nu_\xi} u(x,t)}{\partial t^{\nu_\xi}}\Big|_{t=T} \\ & + \sum_{s=0}^{\nu_\xi-1} \left(\alpha_{2m+\xi,s} \frac{\partial^s u(x,t)}{\partial t^s}\Big|_{t=0} + \beta_{2m+\xi,s} \frac{\partial^s u(x,t)}{\partial t^s}\Big|_{t=T} \right) = 0, \quad \xi = 1, \ldots, r. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $2m + r = 2p$, а также в строке $(0 \le j_1 < \cdots < j_m \le 2p-1,\ 0 \le \nu_1 < \cdots < \nu_r \le 2p-1)$ нет одинаковых натуральных чисел. Для коэффициентов в условии по t выполняются неравенства

$$|\alpha_{2m+q,\nu_q}| + |\beta_{2m+q,\nu_q}| \ne 0, \quad q = 1, \ldots, r.$$

Правая часть $f(x,t)$ и коэффициенты граничных условий $b_{\alpha,j}(x)$ — заданные функции.

Заметим, что условия (3) представляют собой нераспадающиеся краевые условия при $j = 1, \ldots, 2p$, т. е. имеют вид

$$U_j(u(x,\cdot)) \equiv U_{j0}(u(x,\cdot)) + U_{jT}(u(x,\cdot)), \tag{4}$$

где при $a = 0, T$ линейная форма $U_{ja}(u(x,\cdot))$ представляет собой дифференциальное выражение, зависящее от

$$u(x,a), \frac{\partial u(x,a)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{2p-1} u(x,a)}{\partial t^{2p-1}}.$$

Согласно [1] краевые условия вида (3) являются регулярными краевыми условиями. В работе Г. М. Кесельман [2] показано, что регулярные в смысле Биркгофа краевые условия вида (4) можно нормировать и привести к виду (3).

Цель данной работы: выяснить, каким требованиям должна удовлетворять правая часть $f(x,t)$, чтобы задача (1)–(3) была однозначно разрешимой.

В работе А. И. Кожанова [3] уравнения типа (1) при p четном названы квазигиперболическими уравнениями. Поэтому задача (1)–(3) по терминологии А. И. Кожанова относится к нелокальным по времени задачам для квазигиперболических многомерных уравнений.

Определим функциональное пространство решений $V_2^{2l,2p}(Q)$ задачи (1)–(3) как линейное пространство функций $u(x,t)$, принадлежащих пространству $L_2(Q)$ и имеющих принадлежащие этому же пространству обобщенные производные по пространственным переменным x до порядка $2l$ включительно и по переменной t до порядка $2p$ включительно, с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{2l,2p}(Q)} = \left(\int\limits_Q \left[|u(x,t)|^2 + |A(x,D)u(x,t)|^2 + \left|l\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)\right|^2\right] dxdt\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что $V_2^{2l,2p}(Q)$ — банахово пространство.

В дальнейшем в функциональном пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим оператор

$$Av(x) = A(x,D)v(x), \quad x \in \Omega,$$

с областью определения

$$D(A) = \left\{v \in W_2^{2l}(\Omega) : B_j v(x) = 0,\ j = 1,\dots,l,\ x \in \Omega\right\}.$$

Пусть операторы A и B_j выбраны так, что существует компактный обратный оператор. Это условие Агмона [4] будем называть *условием* (A). В дальнейшем считаем, что выполняется условие (A). При выполнении условия (A) гарантируется существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций $v_k(x)$ и счетного множества положительных собственных значений λ_k оператора A, причем нумерация последовательности $\{\lambda_k,\, k \geq 1\}$ подчинена неравенствам $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$.

В дальнейшем везде при $k \geq 1$ через ρ_k обозначаем $\sqrt[2p]{\lambda_k}$. Последовательность чисел $\{\rho_k,\, k \geq 1\}$ обозначим через ρ.

Если правая часть уравнения $f(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$, то введем последовательность

$$f_k(t) = \int\limits_\Omega f(x,t)\overline{v_k(x)}dx, \quad k \geq 1.$$

Для заданной числовой последовательности ρ, состоящей из положительных чисел, обозначим через $W_{2,\rho}^{0,1}(Q)$ пространство функций $f(x,t) \in L_2(Q)$ таких, что

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \in L_2(Q), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(|f_k(T)|^2 + |f_k(0)|^2 + \int\limits_0^T |f_k'(\tau)|^2\, d\tau\right) < \infty.$$

Также нам потребуется пространство $W_{2,\rho}^{-1,0}(Q)$, которое состоит из функций $f(x,t) \in L_2(Q)$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \int\limits_0^T |f_k(\tau)|^2\, d\tau < \infty.$$

Заметим, что пространства $W^{0,1}_{2,\rho}(Q)$ и $W^{-1,0}_{2,\rho}(Q)$ отличаются друг от друга тем, что функции из $W^{0,1}_{2,\rho}(Q)$ обладают некоторой гладкостью по переменной t, а функции из $W^{-1,0}_{2,\rho}(Q)$ обладают определенной гладкостью по пространственным переменным x. Основной результат настоящей статьи сформулирован в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть p — произвольное натуральное число. Считаем, что для оператора A выполняется условие Агмона* (A). *Пусть при всех $k \geq 1$ выполняется условие $\Delta(\lambda_k) \neq 0$ (характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ введен по формуле* (11)).

(a) *Если правая часть $f(x,t)$ принадлежит либо пространству $W^{0,1}_{2,\rho}(Q)$, либо пространству $W^{-1,0}_{2,\rho}(Q)$, то существует единственное решение $u(x,t) \in V^{2l,2p}_2(Q)$ задачи* (1)–(3).

(b) *Если $f(x,t) \in W^{0,1}_{2,\rho}(Q)$, то справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(Q)} + \|A(x,D)u(x,t)\|^2_{L_2(Q)} + \left\| l\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) \right\|^2_{L_2(Q)} \\ \leq M \cdot \left[\|f\|^2_{L_2(Q)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|f_k(T)|^2 + |f_k(0)|^2 + \int_0^T |f'_k(\tau)|^2 \, d\tau \right) \right]. \quad (5)$$

(c) *Если $f(x,t) \in W^{-1,0}_{2,\rho}(Q)$, то справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(Q)} + \|A(x,D)u(x,t)\|^2_{L_2(Q)} + \left\| l\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) \right\|^2_{L_2(Q)} \\ \leq M \cdot \left[\|f(x,t)\|^2_{L_2(Q)} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \left(\int_0^T |f_k(\tau)| \, d\tau \right)^2 \right], \quad (6)$$

где M — некоторая константа, не зависящая от $f(x,t)$.

Теорему 1 полезно сравнить с результатами работ А. И. Кожанова [3], А. И. Кожанова и Н. Р. Пинигиной [5], Р. Р. Ашурова [6], К. Б. Сабитова [7, 8]. В работах Р. Р. Ашурова и К. Б. Сабитова на функции $f(x,t)$ накладываются условия гладкости по пространственным переменным x. В работе [5] на правую часть $f(x,t)$ накладываются условия гладкости по переменной t, причем гладкость по t зависит от вида нелокальных условий (3). В теореме 1 такого эффекта нет. Гладкость правой части по t не зависит от вида нелокальных условий (3).

В работе [5] изучены операторы с краевыми условиями по t двух видов: I_m и II_m, которые соответствуют краевым задачам при $m = p - 1$, $r = 2$ и $m = 0$, $r = 2p$ в (3) соответственно.

Отметим, что уравнение вида (1) по терминологии А. А. Дезина [9] относится к дифференциально-операторным уравнениям. Вопросы разрешимости дифференциально-операторных уравнений изучались в [10–14]. В. В. Шелухин [15, 16] исследовал задачу о прогнозе температуры океана по средним данным за предшествующий период времени, которая также относится к классу дифференциально-операторных уравнений.

Известны различные способы доказательства единственности. Обычно эффективным средством доказательства единственности является принцип максимума [17] и его различные обобщения типа принципов Хопфа [18] и Зарембы —

Жиро [19]. Для задачи (1)–(3) указанные принципы не выполняются. Поэтому при доказательстве единственности решения необходим был другой, отличный от принципа экстремума, инструментарий.

В работе В. А. Ильина [20] предложен довольно универсальный способ доказательства единственности решения для гиперболических и параболических уравнений. При довольно общих ограничениях на область Ω в работе [20] доказана теорема единственности решения для гиперболических и параболических уравнений. Смысл требований теоремы В. А. Ильина [20] заключается в том, чтобы эллиптическая часть гиперболического и параболического операторов обладала полной ортогональной системой собственных функций в соответствующем функциональном пространстве.

Отметим также работу И. В. Тихонова [21], посвященную теоремам единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений. Указанная работа интересна тем, что И. В. Тихонов предложил новый метод доказательства теорем единственности. Метод И. В. Тихонова доказательства единственности основан на «методе частных» для целых функций экспоненциального типа. В работе А. Ю. Попова, И. В. Тихонова [22] изучался вопрос единственности решения уравнения теплопроводности с нелокальным условием, выраженным интегралом по времени на фиксированном отрезке. Им удалось дать полное описание классов единственности в терминах поведения решений при $|x| \to \infty$.

2. Формальное представление решения задачи (1)–(3)

В данном разделе найдено формальное представление решения рассматриваемой задачи.

Решение задачи (1)–(3) ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) v_k(x). \tag{7}$$

Используя результаты монографии [1], коэффициенты $y_k(t)$ находим по формуле

$$y_k(t) = \int_0^T \frac{H(t,\tau,\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)} f_k(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Формулы для выражений $H(t,\tau,\lambda_k)$ и $\Delta(\lambda_k)$ взяты из [1] и будут приведены ниже.

Для дальнейших выкладок удобно обозначить через $\{\omega_\mu\}$ корни из (-1) степени $2p$.

В данном разделе считаем, что p — четное число. Сформулированные результаты для четного p остаются справедливыми и для нечетных p. При этом требуются незначительные изменения в ходе доказательств результатов.

Если p — четное число, то нумерацию чисел $\{\omega_1, \ldots, \omega_{2p}\}$ можно подчинить неравенствам

$$\operatorname{Re}\omega_1 \le \cdots \le \operatorname{Re}\omega_p < 0 < \operatorname{Re}\omega_{p+1} \le \cdots \le \operatorname{Re}\omega_{2p}. \tag{9}$$

Пусть $\rho_k = \sqrt[2p]{\lambda_k}$. Согласно [1] вводим систему решений $\{y_\mu(t,\rho_k)\}$ однородного уравнения $l\big(t, \frac{d}{dt}\big)y_\mu(t) + \lambda_k y_\mu(t) = 0$, которая имеет асимптотическое представление

$$y_\mu(t,\rho_k) = e^{\omega_\mu \rho_k t} \cdot [1], \tag{10}$$

где $[1] = 1 + O(1/\rho_k)$ при $\rho_k \to \infty$.

Теперь можно ввести характеристический определитель

$$\Delta(\rho_k) = \det[U_j(y_\mu);\ j, \mu = 1, \ldots, 2p]. \tag{11}$$

Из неравенств (9) и асимптотических представлений (10) получим асимптотическое представление характеристического определителя при $\rho_k \to \infty$

$$\Delta(\rho_k) = \rho_k^{2(j_1+\cdots+j_m)+\nu_1+\cdots+\nu_r} \cdot e^{\rho_k(\omega_{p+1}+\cdots+\omega_{2p})T} \cdot \Delta_0 \cdot [1], \tag{12}$$

где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \omega_1^{j_1} & \ldots & \omega_p^{j_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \omega_{p+1}^{j_1} & \ldots & \omega_{2p}^{j_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{j_m} & \ldots & \omega_p^{j_m} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \omega_{p+1}^{j_m} & \ldots & \omega_{2p}^{j_m} \\ \alpha_{2m+1,\nu_1}\omega_1^{\nu_1} & \ldots & \alpha_{2m+1,\nu_1}\omega_1^{\nu_1} & \beta_{2m+1,\nu_1}\omega_{p+1}^{\nu_1} & \ldots & \beta_{2m+1,\nu_1}\omega_{2p}^{\nu_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{2m+r,\nu_r}\omega_1^{\nu_r} & \ldots & \alpha_{2m+1,\nu_r}\omega_1^{\nu_r} & \beta_{2m+1,\nu_r}\omega_{p+1}^{\nu_r} & \ldots & \beta_{2m+1,\nu_r}\omega_{2p}^{\nu_r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Обозначим через W_μ алгебраическое дополнение элемента $y_\mu^{(2p-1)}(\tau, \rho_k)$ в определителе

$$W(\tau) = \begin{vmatrix} y_1^{(2p-1)}(\tau, \rho_k) & \ldots & y_{2p}^{(2p-1)}(\tau, \rho_k) \\ y_1^{(2p-2)}(\tau, \rho_k) & \ldots & y_{2p}^{(2p-2)}(\tau, \rho_k) \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ y_1(\tau, \rho_k) & \ldots & y_{2p}(\tau, \rho_k) \end{vmatrix}.$$

Определим функцию

$$g(t, \tau, \rho_k) = \pm\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2p} y_\mu(t, \rho_k) z_\mu(\tau, \rho_k),$$

где

$$z_\mu(\tau, \rho_k) = \frac{W_\mu(\tau)}{W(\tau)},$$

причем знак «+» берется при $t > \tau$, а знак «−» — при $t < \tau$.

Из неравенств (9) и представлений (10) вытекает, что

$$z_\mu(\tau, \rho_k) = \frac{e^{-\rho_k\omega_\mu\tau}}{2p \cdot \rho_k^{2p-1}} \cdot [1].$$

Согласно [1] введем функцию

$$H(t, \tau, \rho_k) = \begin{vmatrix} y_1(t, \rho_k) & \ldots & y_{2p}(t, \rho_k) & g(t, \tau, \rho_k) \\ U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_{2p}) & U_1(g)(\tau) \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ U_{2p}(y_1) & \ldots & U_{2p}(y_{2p}) & U_{2p}(g)(\tau) \end{vmatrix},$$

где

$$U_j(g) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2p} U_{j0}(y_\mu)\, z_\mu(\tau) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2p} U_{jT}(y_\mu)\, z_\mu(\tau), \quad j = 1, \ldots, 2p.$$

Пусть $t > \tau$. В определителе $H(t,\tau,\rho_k)$ умножим столбцы с номерами $1,\dots,p$ на функции $\frac{1}{2}z_1(\tau),\dots,\frac{1}{2}z_p(\tau)$, а столбцы $p+1,\dots,2p$ — на функции $-\frac{1}{2}z_{p+1}(\tau),\dots,-\frac{1}{2}z_{2p}(\tau)$ и сложим их с последним столбцом. В результате получим соотношение

$$H(t,\tau,\rho_k) = \begin{vmatrix} y_1(t,\rho_k) & \dots & y_{2p}(t,\rho_k) & H_0(t,\tau) \\ U_1(y_1) & \dots & U_1(y_{2p}) & H_1(\tau,\rho_k) \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ U_{2p}(y_1) & \dots & U_{2p}(y_{2p}) & H_{2p}(\tau,\rho_k) \end{vmatrix},$$

где

$$H_0(t,\tau,\rho_k) = \sum_{\mu=1}^{p} y_\mu(t) z_\mu(\tau),$$

$$H_j(\tau,\rho_k) = \sum_{\mu=1}^{p} U_{jT}(y_\mu) z_\mu(\tau) - \sum_{\mu=p+1}^{2p} U_{j0}(y_\mu) z_\mu(\tau), \quad j = 1,\dots,2p.$$

Из неравенств (9) и асимптотических представлений (10) выводим асимптотическую формулу

$$H(t,\tau,\rho_k) = \frac{\rho_k^{2(j_1+\dots+j_m)+\nu_1+\dots+\nu_r} \cdot e^{\rho_k(\omega_{p+1}+\dots+\omega_{2p})T}}{2p\cdot\rho_k^{2p-1}} \times \begin{vmatrix} e^{\rho_k\omega_1 t} & \dots & e^{\rho_k\omega_1 t} & \widetilde{H}_0(t,\tau,\rho_k) \\ \cdot & \dots & \cdot & \widetilde{H}_1(\tau,\rho_k) \\ \cdot & \Delta_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \widetilde{H}_{2p}(\tau,\rho_k) \end{vmatrix} [1],$$

где

$$\widetilde{H}_0(t,\tau,\rho_k) = -\sum_{\mu=1}^{p} \omega_\mu e^{\rho_k\omega_\mu(t-\tau)}[1],$$

$$\widetilde{H}_{2\xi-1}(\tau,\rho_k) = -\sum_{\mu=1}^{p} \beta_{2\xi-1,j_\xi-1}\omega_\mu^{j_\xi+1}\rho_k^{-1} e^{\rho_k\omega_\mu(T-\tau)}[1] + \sum_{\mu=p+1}^{2p} \omega_\mu^{j_\xi+1} e^{-\rho_k\omega_\mu\tau}[1],$$

$$\widetilde{H}_{2\xi}(\tau,\rho_k) = -\sum_{\mu=1}^{p} \omega_\mu^{j_\xi+1} e^{\rho_k\omega_\mu(T-\tau)}[1] + \sum_{\mu=p+1}^{2p} \alpha_{2\xi,j_\xi-1}\omega_\mu^{j_\xi}\rho_k^{-1} e^{-\rho_k\omega_\mu\tau}[1], \quad \xi = 1,\dots,m,$$

$$\widetilde{H}_{2m+\xi}(\tau,\rho_k) = -\sum_{\mu=1}^{p} \beta_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_\mu^{\nu_\xi+1} e^{\rho_k\omega_\mu(T-\tau)}[1] + \sum_{\mu=p+1}^{2p} \alpha_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_\mu^{\nu_\xi+1} e^{-\rho_k\omega_\mu\tau}[1], \quad \xi = 1,\dots,r. \quad (13)$$

Поэтому при $0 < \tau < t < T$ верно представление

$$\frac{H(t,\tau,\rho_k)}{\Delta(\lambda_k)} = \frac{1}{2p\rho_k^{2p-1}}\widetilde{H}_0(t,\tau,\rho_k) - \sum_{s=1}^{2p} \frac{1}{\Delta_0 2p\rho_k^{2p-1}} h_s(t,\rho_k)\widetilde{H}_s(\tau,\rho_k), \qquad (14)$$

где $h_s(t,\rho_k)$ — определитель, получаемый из характеристического определителя $\Delta(\lambda_k)$ заменой его s-й строки строкой

$$\|e^{\omega_1\rho_k t}[1],\dots,e^{\omega_p\rho_k t}[1],\, e^{\omega_{p+1}\rho_k(t-T)}[1],\dots,e^{\omega_{2p}\rho_k(t-T)}[1]\|.$$

Разложение определителя $h_s(t,\rho_k)$ по s-й строке имеет вид

$$h_s(t,\rho_k)=\sum_{\mu=1}^{p}h_{s,\mu}e^{\rho_k\omega_\mu t}[1]+\sum_{\mu=p+1}^{2p}h_{s,\mu}e^{\rho_k\omega_\mu(t-T)}[1],\quad s=1,\dots,2p.$$

При этом $h_{s,\mu}$, $s=1,\dots,2p$, — числа, представляющие соответствующие алгебраические дополнения.

Асимптотическое соотношение (14) остается справедливым при $0<t<\tau<T$. В результате равенство (7) с учетом (8) и (14) примет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)}{\rho_k^{2p-1}}\Bigg[-\int_0^T\widetilde{H}_0(t,\tau,\rho_k)f_k(\tau)\,d\tau \\ -\frac{1}{\Delta_0}\sum_{s=1}^{2p}h_s(t,\rho_k)\int_0^T\widetilde{H}_s(\tau,\rho_k)f_k(\tau)\,d\tau\Bigg]. \tag{15}$$

Введем следующие обозначения:

$$I_{k\mu}^{(1)}(t)=\rho_k\omega_\mu\int_0^t e^{\rho_k\omega_\mu(t-\tau)}f_k(\tau)\,d\tau,\quad I_{k\mu}^{(2)}(t)=\rho_k\omega_\mu\int_t^T e^{\rho_k\omega_\mu(t-\tau)}f_k(\tau)\,d\tau,$$
$$I_{k\mu s}^{(3)}(t)=e^{\rho_k\omega_\mu t}\rho_k\omega_s\int_0^T e^{\rho_k\omega_s(T-\tau)}f_k(\tau)\,d\tau,$$
$$I_{k\mu s}^{(4)}(t)=e^{\rho_k\omega_\mu t}\rho_k\omega_s\int_0^T e^{-\rho_k\omega_s\tau}f_k(\tau)\,d\tau, \tag{16}$$
$$I_{k\mu s}^{(5)}(t)=e^{\rho_k\omega_\mu(t-T)}\rho_k\omega_s\int_0^T e^{\rho_k\omega_s(T-\tau)}f_k(\tau)\,d\tau,$$
$$I_{k\mu s}^{(6)}(t)=e^{\rho_k\omega_\mu(t-T)}\rho_k\omega_s\int_0^T e^{-\rho_k\omega_s\tau}f_k(\tau)\,d\tau.$$

Учтем асимптотические представления функций $\widetilde{H}_0(t,\tau,\rho_k)$, $\widetilde{H}_s(\tau,\rho_k)$, $s=1,\dots,2p$. В результате из (15) имеем следующее представление:

$$u(x,t)=\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)}{\rho_k^{2p}}\Bigg[-\sum_{\mu=1}^{p}I_{k\mu}^{(1)}(t)-\sum_{\mu=p+1}^{2p}I_{k\mu}^{(2)}(t) \\ +\frac{1}{\Delta_0}\sum_{\xi=1}^{m}\Bigg(-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=1}^{p}h_{2\xi-1,\mu}\beta_{2\xi-1,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi}}{\rho_k}I_{k\mu s}^{(3)}(t)+\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{2p}h_{2\xi-1,\mu}\omega_s^{j_\xi}I_{k\mu s}^{(4)}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=1}^{p} h_{2\xi-1,\mu}\beta_{2\xi-1,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi}}{\rho_k} I_{k\mu s}^{(5)}(t)+\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2\xi-1,\mu}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(6)}(t)\\
&-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=1}^{p} h_{2\xi,\mu}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(3)}(t)+\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2\xi,\mu}\alpha_{2\xi,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi-1}}{\rho_k} I_{k\mu s}^{(4)}(t)\\
&-\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=1}^{p} h_{2\xi,\mu}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(5)}(t)+\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2\xi,\mu}\alpha_{2\xi,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi-1}}{\rho_k} I_{k\mu s}^{(6)}(t)\Bigg)\\
&-\sum_{\xi=1}^{r}\Bigg(-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=1}^{p} h_{2m+\xi,\mu}\beta_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(3)}(t)+\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2m+\xi,\mu}\alpha_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{\nu_\xi} I_{k\mu s}^{(4)}(t)\\
&-\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=1}^{p} h_{2m+\xi,\mu}\beta_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{\nu_\xi} I_{k\mu s}^{(5)}(t)\\
&+\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2m+\xi,\mu}\alpha_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(6)}(t)\Bigg)\Bigg][1]. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Формально применим к обеим частям равенства (17) оператор $A(x,D)$. В результате имеем

$$
\begin{aligned}
&A(x,D)u(x,t)=\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\Bigg[-\sum_{\mu=1}^{p} I_{k\mu}^{(1)}(t)-\sum_{\mu=p+1}^{2p} I_{k\mu}^{(2)}(t)\\
&+\frac{1}{\Delta_0}\sum_{\xi=1}^{m}\Bigg(-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=1}^{p} h_{2\xi-1,\mu}\beta_{2\xi-1,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi}}{\rho_k} I_{k\mu s}^{(3)}(t)+\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2\xi-1,\mu}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(4)}(t)\\
&-\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=1}^{p} h_{2\xi-1,\mu}\beta_{2\xi-1,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi}}{\rho_k} I_{k\mu s}^{(5)}(t)+\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2\xi-1,\mu}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(6)}(t)\\
&-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=1}^{p} h_{2\xi,\mu}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(3)}(t)+\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2\xi,\mu}\alpha_{2\xi,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi-1}}{\rho_k} I_{k\mu s}^{(4)}(t)\\
&-\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=1}^{p} h_{2\xi,\mu}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(5)}(t)+\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2\xi,\mu}\alpha_{2\xi,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi-1}}{\rho_k} I_{k\mu s}^{(6)}(t)\Bigg)\\
&-\sum_{\xi=1}^{r}\Bigg(-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=1}^{p} h_{2m+\xi,\mu}\beta_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(3)}(t)+\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2m+\xi,\mu}\alpha_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{\nu_\xi} I_{k\mu s}^{(4)}(t)\\
&-\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=1}^{p} h_{2m+\xi,\mu}\beta_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{\nu_\xi} I_{k\mu s}^{(5)}(t)\\
&+\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=p+1}^{2p} h_{2m+\xi,\mu}\alpha_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{j_\xi} I_{k\mu s}^{(6)}(t)\Bigg)\Bigg][1]. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Далее формально применим к обеим частям равенства (17) оператор $l\big(t,\frac{\partial}{\partial t}\big)$. В результате получим

$$
\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=f(x,t)-\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)}{\rho_k^{2p}}\Bigg[-\sum_{\mu=1}^{p} I_{k\mu}^{(1)}(t)-\sum_{\mu=p+1}^{2p} I_{k\mu}^{(2)}(t)
$$

$$+\frac{1}{\Delta_0}\sum_{\xi=1}^{m}\Biggl(-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=1}^{p}h_{2\xi-1,\mu}\beta_{2\xi-1,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi}}{\rho_k}I_{k\mu s}^{(3)}(t)+\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{2p}h_{2\xi-1,\mu}\omega_s^{j_\xi}I_{k\mu s}^{(4)}(t)$$
$$-\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=1}^{p}h_{2\xi-1,\mu}\beta_{2\xi-1,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi}}{\rho_k}I_{k\mu s}^{(5)}(t)+\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=p+1}^{2p}h_{2\xi-1,\mu}\omega_s^{j_\xi}I_{k\mu s}^{(6)}(t)$$
$$-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=1}^{p}h_{2\xi,\mu}\omega_s^{j_\xi}I_{k\mu s}^{(3)}(t)+\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{2p}h_{2\xi,\mu}\alpha_{2\xi,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi-1}}{\rho_k}I_{k\mu s}^{(4)}(t)$$
$$-\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=1}^{p}h_{2\xi,\mu}\omega_s^{j_\xi}I_{k\mu s}^{(5)}(t)+\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=p+1}^{2p}h_{2\xi,\mu}\alpha_{2\xi,j_\xi-1}\frac{\omega_s^{j_\xi-1}}{\rho_k}I_{k\mu s}^{(6)}(t)\Biggr)$$
$$-\sum_{\xi=1}^{r}\Biggl(-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=1}^{p}h_{2m+\xi,\mu}\beta_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{j_\xi}I_{k\mu s}^{(3)}(t)+\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{2p}h_{2m+\xi,\mu}\alpha_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{\nu_\xi}I_{k\mu s}^{(4)}(t)$$
$$-\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=1}^{p}h_{2m+\xi,\mu}\beta_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{\nu_\xi}I_{k\mu s}^{(5)}(t)$$
$$+\sum_{\mu=p+1}^{2p}\sum_{s=p+1}^{2p}h_{2m+\xi,\mu}\alpha_{2m+\xi,\nu_\xi}\omega_s^{j_\xi}I_{k\mu s}^{(6)}(t)\Biggr)\Biggr][1]. \quad (19)$$

Из представлений (17)–(19) вытекает, что для оценки норм величин u, $A(x,D)u$, $l(t,\frac{\partial}{\partial t})u$ достаточно оценить интегралы $I_{k\mu}^{(1)}(t)$, $I_{k\mu}^{(2)}(t)$, $I_{k\mu s}^{(i)}(t)$, $i=3,4,5,6$, при допустимых индексах μ,s.

3. Класс разрешимости задачи (1)–(3)

В предыдущем разделе найдено формальное представление решения задачи (1)–(3). Теперь обоснуем сходимость найденных представлений.

Лемма 1. *Пусть $\gamma=\sin\frac{\pi}{2p}$ и p — четное число. Если $f(x,t)$ дифференцируема по t, то при всех $k\geq 1$ и $t\in(0,T)$ справедливы оценки*

$$\bigl|I_{k\mu}^{(1)}(t)\bigr|\leq|f_k(t)|+|f_k(0)|e^{-\gamma\rho_k t}+\int_0^t|f_k'(\tau)|e^{-\gamma\rho_k(t-\tau)}\,d\tau \quad \text{при } \mu=1,\dots,p;$$

$$\bigl|I_{k\mu}^{(2)}(t)\bigr|\leq|f_k(t)|+|f_k(T)|e^{-\gamma\rho_k(T-t)}+\int_t^T|f_k'(\tau)|e^{\gamma\rho_k(t-\tau)}\,d\tau \quad \text{при } \mu=p+1,\dots,2p;$$

$$\bigl|I_{k\mu s}^{(3)}(t)\bigr|\leq|f_k(T)|e^{-\gamma\rho_k t}+|f_k(0)|e^{-\gamma\rho_k(t+T)}+e^{-\gamma\rho_k t}\int_0^T|f_k'(\tau)|e^{-\gamma\rho_k(T-\tau)}\,d\tau,$$
$$\text{при } s,\mu=1,\dots,p;$$

$$\bigl|I_{k\mu s}^{(4)}(t)\bigr|\leq|f_k(T)|e^{-\gamma\rho_k(t+T)}+|f_k(0)|e^{-\gamma\rho_k t}+e^{-\gamma\rho_k t}\int_0^T|f_k'(\tau)|e^{-\gamma\rho_k\tau}\,d\tau,$$
$$\text{при}\quad s=p+1,\dots,2p,\ \mu=1,\dots,p;$$

$$\left|I^{(5)}_{k\mu s}(t)\right| \le |f_k(T)|e^{\gamma\rho_k(t-T)} + |f_k(0)|e^{\gamma\rho_k(t-2T)} + e^{\gamma\rho_k(t-T)}\int\limits_0^T |f_k'(\tau)|e^{-\gamma\rho_k(T-\tau)}\,d\tau,$$
$$\text{при}\quad s=1,\dots,p,\ \mu=p+1,\dots,2p;$$

$$\left|I^{(6)}_{k\mu s}(t)\right| \le |f_k(T)|e^{\gamma\rho_k(t-2T)} + |f_k(0)|e^{\gamma\rho_k(t-T)} + e^{\gamma\rho_k(t-T)}\int\limits_0^T |f_k'(\tau)|e^{-\gamma\rho_k\tau}\,d\tau,$$
$$\text{при}\quad s,\mu=p+1,\dots,2p. \quad (20)$$

Доказательство леммы 1 вытекает из того, что при p четном справедливы неравенства

$$\operatorname{Re}\omega_1 \le \dots \le \operatorname{Re}\omega_p = -\gamma < 0 < \gamma = \operatorname{Re}\omega_{p+1} \le \dots \le \operatorname{Re}\omega_{2p}.$$

К примеру, докажем оценку для $\left|I^{(1)}_{k\mu}(t)\right|$. Справедливо тождество

$$I^{(1)}_{k\mu}(t) = \rho_k\omega_\mu\int\limits_0^t e^{\rho_k\omega_\mu(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau = -\int\limits_0^t f_k(\tau)\frac{d}{d\tau}e^{\rho_k\omega_\mu(t-\tau)}\,d\tau$$
$$= -f_k(t) + f_k(0)e^{\rho_k\omega_\mu t} + \int\limits_0^t f_k'(\tau)e^{\rho_k\omega_\mu(t-\tau)}\,d\tau. \quad (21)$$

Отсюда вытекает требуемая оценка для $\left|I^{(1)}_{k\mu}(t)\right|$. Другие утверждения из леммы 1 доказываются аналогично.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 1 и представлений (17)–(19) вытекают необходимые оценки для $u(x,t), A(x,D)u(x,t), l(t,\frac{\partial}{\partial t})u(x,t)$. Оценку (6) докажем только для $\|u(x,t)\|^2_{L_2(Q)}$. Для $\|A(x,D)u(x,t)\|^2_{L_2(Q)}$, $\left\|l\bigl(t,\frac{\partial}{\partial t}\bigr)u(x,t)\right\|^2_{L_2(Q)}$ оценки доказываются аналогично, только вместо соотношения (17) надо использовать представления (18) и (19).

Из представления (17) следует оценка

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(Q)} \le M\sum_{k=1}^{\infty}\Biggl(\sum_{\mu=1}^{p}\left|I^{(1)}_{k\mu}(t)\right|^2 + \sum_{\mu=p+1}^{2p}|I^{(2)}_{k\mu}(t)|^2$$
$$+\sum_{\mu=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{p}\left|I^{(3)}_{k\mu s}(t)\right|^2 + \sum_{s=p+1}^{2p}\left|I^{(4)}_{k\mu s}(t)\right|^2\right)$$
$$+\sum_{\mu=p+1}^{2p}\left(\sum_{k=1}^{p}\left|I^{(5)}_{k\mu s}(t)\right|^2 + \sum_{k=p+1}^{2p}\left|I^{(6)}_{k\mu s}(t)\right|^2\right)\Biggr). \quad (22)$$

Из последнего неравенства и неравенств из леммы 1 вытекает утверждение теоремы 1.

Единственность решения $u(x,t)$ задачи (1)–(3) была доказана в работе [23]. Условия того, что спектры операторов $l\bigl(t,\frac{\partial}{\partial t}\bigr)$ и $A(x,D)$ не пересекаются, здесь выполняется. Действительно, в теореме 1 требуется выполнение условия $\Delta(\lambda_k) \ne 0$ при всех $k \ge 1$. Метод доказательства теоремы единственности [24, 25] представляет собой гибрид метода направляющих функционалов М. Г. Крейна [1, 26] и метода В. А. Ильина [20].

4. О других классах разрешимости задачи (1)–(3)

В предыдущем разделе для разрешимости задачи (1)–(3) правая часть $f(x,t)$ по t предполагалась дифференцируемой. Однако можно ослабить требования по t к $f(x,t)$. Вместо этого можно требовать к $f(x,t)$ дополнительные условия гладкости по x. Для этого в данном разделе докажем следующую лемму.

Лемма 2. *При любом натуральном p и при всех $k \geq 1$ и $t \in (0,T)$ справедливы оценки*

$$\left|I_{k\mu}^{(j)}(t)\right| \leq \rho_k \int\limits_0^t |f_k(\tau)|\,d\tau,\ j=1,2, \quad \left|I_{k\mu s}^{(i)}(t)\right| \leq \rho_k \int\limits_0^t |f_k(\tau)|\,d\tau,\ i=3,4,5,6, \tag{23}$$

при всех допустимых индексах μ, s.

Доказательство. Лемма 2 непосредственно следует из леммы 1.

В теореме 1 условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \left(\int\limits_0^T |f_k(\tau)|\,d\tau \right)^2 < \infty$$

накладывает условия на поведение $f(x,t)$ по переменной x. В то же время условия теоремы 1 на $f(x,t)$ накладывали требования на поведение $f(x,t)$ по t.

Пусть m — целое число, удовлетворяющее неравенству $m \geq -1$. Для заданной числовой последовательности ρ, состоящей из положительных чисел, вводим пространство $W_{2,\rho}^{m,m+1}(Q)$ функций $f(x,t) \in L_2(Q)$ таких, что

$$\frac{\partial^{m+1} f(x,t)}{\partial t^{m+1}} \in L_2(Q),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^{2m}} \left(\sum_{\sigma=0}^{m} \rho_k^{-2\sigma} \left(\left|f_k^{(\sigma)}(T)\right|^2 + \left|f_k^{(\sigma)}(0)\right|^2 \right) + \int\limits_0^T \left|f_k^{(m+1)}(\tau)\right|^2 d\tau \right) < \infty.$$

Теорема 2. *Пусть p — натуральное число. Считаем, что для оператора A выполняется условие Агмона* (A). *При всех $k \geq 1$ пусть выполняется условие $\Delta(\lambda_k) \neq 0$. Предположим, что $f(x,t) \in W_{2,\rho}^{m,m+1}(Q)$. Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ задачи* (1)–(3), *которое удовлетворяет оценке*

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\|_{L_2(Q)}^2 + \|A(x,D)u(x,t)\|_{L_2(Q)}^2 + \left\| l\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) \right\|_{L_2(Q)}^2 \\ \leq M \cdot \Bigg[\|f\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_k^{2m}} \Bigg(\sum_{\sigma=0}^{m} \rho_k^{-2\sigma} \left(\left|f_k^{(\sigma)}(T)\right|^2 \right.\\ \left. + \left|f_k^{(\sigma)}(0)\right|^2 \right) + \int\limits_0^T \left|f_k^{(m+1)}(\tau)\right|^2 d\tau \Bigg) \Bigg], \end{aligned} \tag{24}$$

где M — некоторая константа, не зависящая от $f(x,t)$.

Доказательство. Оценку (24) докажем для $\|u(x,t)\|_{L_2(Q)}^2$. Используя обозначения (16), внутренние слагаемые (17) преобразуем следующим образом:

$$I_{k\mu}^{(1)}(t) = \frac{1}{\rho_k^m} \rho_k^{m+1} \omega_\mu \int\limits_0^t e^{\rho_k \omega_\mu (t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\rho_k^m}\left(-\rho_k^m\int\limits_0^t f_k(\tau)\frac{d}{d\tau}e^{\rho_k\omega_\mu(t-\tau)}\,d\tau\right)$$

$$= -f_k(t) + f_k(0)e^{\rho_k\omega_\mu t} - \frac{1}{\rho_k^m}\frac{\rho_k^{m-1}}{\omega_\mu}\int\limits_0^t f_k'(\tau)\frac{d}{d\tau}e^{\rho_k\omega_\mu(t-\tau)}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\rho_k^m}\left(\sum_{\sigma=0}^m \frac{\rho_k^{-\sigma}}{\omega_\mu^\sigma}\bigl(-f_k^{(\sigma)}(t) + f_k^{(\sigma)}(0)e^{\rho_k\omega_\mu t}\bigr) - \frac{1}{\omega_\mu^m}\int\limits_0^t f_k^{(m+1)}(\tau)e^{\rho_k\omega_\mu(t-\tau)}\,d\tau\right).$$

Отсюда вытекает оценка для $\bigl|\rho_k^m I_{k\mu}^{(1)}(t)\bigr|$:

$$\bigl|\rho_k^m I_{k\mu}^{(1)}(t)\bigr| \le \sum_{\sigma=0}^m \rho_k^{-2\sigma}\bigl(\bigl|f_k^{(\sigma)}(t)\bigr| + \bigl|f_k^{(\sigma)}(0)\bigr|e^{-\gamma\rho_k t}\bigr)$$
$$+ \int\limits_0^t \bigl|f_k^{(m+1)}(\tau)\bigr|e^{-\gamma\rho_k(t-\tau)}\,d\tau, \quad \mu = 1,\dots,p.$$

Оценивая остальные слагаемые (17) аналогичным образом, получим оценку (24). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 82–93.
3. *Кожанов А. И., Кошанов Б. Д., Султангазиева Ж. Б.* Новые краевые задачи для квазигиперболического типа четвертого порядка // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1410–1436.
4. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Commun. Pure Appl. Math. 1962. V. 15, N 2. P. 119–143.
5. *Кожанов А. И., Пинигина Н. Р.* Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 3. С. 403–412.
6. *Ашуров Р. Р., Мухиддинова А. Т.* Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений с эллиптическим оператором произвольного порядка // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 30, № 1. С. 8–19.
7. *Сабитов К. Б.* Колебания балки с заделанными концами // Вест. Сам. гос. техн. ун-та, Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324.
8. *Сабитов К. Б.* К теории начально-краевых задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 1. С. 89–100.
9. *Дезин А. А.* Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач. М.: Наука, 2000.
10. *Grisvard P.* Equations operaationnelles abstraites et problemes aux limites // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. 1967. N 3. P. 308–347.
11. *Дубинский А. Ю.* Об одной абстрактной теореме и ее приложениях к краевым задачам для неклассических уравнений // Мат. сб. 1969. Т. 79, № 1. С. 91–117.
12. *Романко К. R.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 117–131.
13. *Орынбасаров М. О.* О разрешимости краевых задач для параболического и полипараболического уравнений в нецилиндрической области с негладкими боковыми границами // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 1. С. 151–161.
14. *Кангужин Б. Е., Кошанов Б. Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимск. мат. журн. 2010. № 2. С. 41–52.

15. *Шелухин В. В.* Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 32, № 2. С. 154–165.

16. *Шелухин В. В.* Проблема прогнозирования температуры океана по средним данным за предыдущий период времени // Докл. РАН. 1991. № 4. С. 760–764.

17. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

18. *Miranda C.* Partial differential equations of elliptic type. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1970.

19. *Бицадзе А.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1959.

20. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.

21. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 2. С. 133–166.

22. *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 3. С. 396–405.

23. *Кангужин Б. Е., Кошанов Б. Д.* Критерии единственности решения краевой задачи для оператора $\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} - A$ с эллиптическим оператором A произвольного порядка // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 6. С. 1266–1275.

24. *Kanguzhin B., Koshanov B.* Uniqueness criteria for solving a time nonlocal problem for a high-order differential operator equation $l(\cdot) - A$ with a wave operator with displacement // Symmetry. 2022. V. 6, N 2. P. 1239–1252.

25. *Кангужин Б. Е., Кошанов Б. Д.* Критерии единственности решения нелокальной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения $l(\cdot) - A$ с оператором Трикоми A // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 1. С. 4–14.

26. *Crane M.* On Hermitian operators with directional functionals // Collection of works of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. 1948. N 10. P. 83–105.

Поступила в редакцию 10 декабря 2024 г.
После доработки 28 мая 2025 г.
Принята к публикации 25 июня 2025 г.

Кангужин Балтабек Есматович (ORCID 0000-0001-5504-6362),
Кошанов Бакытбек Данебекович (ORCID 0000-0002-0784-5183)
Казахский Национальный Университет имени Аль-Фараби,
пр. Аль-Фараби 71, Алматы 050040, Казахстан;
Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина 125, Алматы 050010, Казахстан
`kanguzhin53@gmail.com`, `koshanov@math.kz`