Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2025. Том 66, № 6

УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С ПАМЯТЬЮ

В. Г. Романов

Аннотация. Рассматриваются уравнения электродинамики, в которых диэлектрическая проницаемость и проводимость среды обладают «памятью». Благодаря этому решение уравнений зависит от всей предыстории процесса распространения волн. Предполагается, что ядра интегральных операторов, моделирующие свойство памяти, зависят от пространственных и временной переменных, причем эти ядра допускают представление в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от пространственных переменных, а вторая — от временной. Функции, зависящие от временной переменной, считаются заданными, а зависящие от пространственных переменных неизвестными и подлежат отысканию. Принимается, что эти функции $p(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$, отвечающие ядрам, описывающим свойства памяти диэлектрической проницаемости и проводимости, соответственно являются финитными функциями, их носитель содержится внутри некоторого шара B конечного радиуса. Для решения обратной задачи рассматривается прямая задача с полностью известными ядрами и ее специальное решение для однородной среды, соответствующее бегущей дельта-образной волне, распространяющейся в направлении ν. Эта волна падает на неоднородность, сосредоточенную в B, и на границе этого шара измеряется амплитуда сингулярной части решения и амплитуда первой производной по времени его регулярной части на фронте волны. Соответствующая информация, зафиксированная для различных направлений ν, и является исходной для решения обратной задачи. В работе показано, что задачи об определении функций $p(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ сводятся к последовательному решению хорошо известной задачи рентгеновской томографии. Следовательно, решение рассматриваемой обратной задачи единственно и может быть эффективно найдено как аналитически, так и численно.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.612

Ключевые слова: уравнения электродинамики с памятью, обратная задача, структура решения, томография, единственность.

Памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

1. Введение

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{x},t)+\int\limits_{-\infty}^{t}\widehat{\varepsilon}(\mathbf{x},t-s)E(\mathbf{x},s)\,ds\right)$$
$$+\,\sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t)+\int\limits_{-\infty}^{t}\widehat{\sigma}(\mathbf{x},t-s)\mathbf{E}(\mathbf{x},s)\,ds-\mathrm{rot}\mathbf{H}(\mathbf{x},t)=0,\quad (1)$$

"Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}(\mathbf{x},t)+\mu\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=0;\quad (\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^4.$$

В уравнениях (1) $\mathbf{E}=(E_1,E_2,E_3)$ и $\mathbf{H}=(H_1,H_2,H_3)$ — векторы электрической и магнитной напряженностей поля, ε и μ — некоторые положительные числа, $\sigma(\mathbf{x})\geq 0$ — проводимость среды. Эти уравнения описывают распространение электромагнитных волн в неоднородной среде с памятью, определяемой функциями $\widehat{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ и $\widehat{\sigma}(\mathbf{x},t)$.

Пусть $B=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\mid |\mathbf{x}|<R\}$ — шар радиуса R и S — его граница. Примем, что

$$\sigma(\mathbf{x})=0,\ \mathbf{x}\in(\mathbb{R}^3\setminus B);\quad \widehat{\varepsilon}(\mathbf{x},t)=0,\quad \widehat{\sigma}(\mathbf{x},t)=0,\ (\mathbf{x},t)\in(\mathbb{R}^3\setminus B)\times\mathbb{R}. \tag{2}$$

В дальнейшем будем рассматривать для уравнений (1) задачу Коши с начальными данными

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\ell\,\delta(t-\tau(\mathbf{x},\nu)),\quad \mathbf{H}(\mathbf{x},t)=\varepsilon^{1/2}\mu^{-1/2}(\nu\times\ell)\delta(t-\tau(\mathbf{x},\nu)),\quad t<0, \tag{3}$$

в которых ν и ℓ — единичные векторы, ортогональные друг другу, $\nu\cdot\ell=0$, функция $\tau(\mathbf{x},\nu)$ определена формулой

$$\tau(\mathbf{x},\nu)=(\varepsilon\mu)^{1/2}(\mathbf{x}\cdot\nu+R),$$

$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Формулы (3) описывают дельта-образную плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении ν и поляризованную в направлении ℓ. В момент времени $t=0$ эта волна касается границы S шара B в точке $\mathbf{x}=-R\nu$ и далее распространяется уже в неоднородной среде. Ее фронт $t=\tau(\mathbf{x},\nu)$ остается плоским, но амплитуда его меняется.

Решение задачи (1), (3) зависит от параметров ν и ℓ. Поэтому оно будет обозначаться через $\mathbf{E}(\mathbf{x},t.\nu,\ell),\mathbf{H}(\mathbf{x},t.\nu,\ell)$, но иногда для сокращения записи зависимость от параметров ν и ℓ будет опускаться.

Задачу (1), (3) назовем *прямой* задачей. Основной задачей, которую будем изучать, является обратная задача, заключающаяся в отыскании функций $\widehat{\varepsilon}$ и $\widehat{\sigma}$, характеризующих память среды. При этом принимаем, что эти функции представимы в виде

$$\widehat{\varepsilon}(\mathbf{x},t)=p(\mathbf{x})K_1(t),\ K_1(0)=1,\quad \widehat{\sigma}(\mathbf{x},t)=q(\mathbf{x})K_2(t),\ K_2(0)=1, \tag{4}$$

в котором $K_1(t)$ и $K_2(t)$ — известные гладкие функции для $t\geq 0$, а носители функций $p(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ содержатся в B. В дальнейшем будем предполагать, что $p(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ являются гладкими функциями в $\mathbb{R}^3$. Под термином *гладкая* функция подразумевается функция бесконечно дифференцируемая в соответствующей области.

Определим плоскость

$$P(\psi)=\{\mathbf{x}\cdot\chi(\psi)=0\},\quad \chi(\psi)=(-\sin\psi,\cos\psi,0),\quad \psi\in[0,\pi),$$

и векторы

$$\begin{aligned}&\ell(\varphi,\psi)=(\sin\varphi\cos\psi,\sin\varphi\sin\psi,\cos\varphi),\\ &\nu(\varphi,\psi)=(\cos\varphi\cos\psi,\cos\varphi\sin\psi,-\sin\varphi),\ (\varphi,\psi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi).\end{aligned}$$

Заметим, что единичные векторы χ,ν и ℓ попарно ортогональны. Следовательно, векторы ν и ℓ расположены в плоскости $P(\psi)$. Обозначим $S^+(\nu)=\{\mathbf{x}\in S\mid \mathbf{x}\cdot\nu>0\}$.

Обратная задача. *Пусть положительные числа* ε *и* μ *и неотрицательная функция* $\sigma(\mathbf{x})$ *известны. Требуется найти функции* $p(\mathbf{x})$ *и* $q(\mathbf{x})$ *по следующей информации о решениях прямой задачи: заданы функции*

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x},\varphi,\psi) &= \lim_{t\to\tau(\mathbf{x},\nu)+0}\int\limits_{-\infty}^{t}(\mathbf{E}(\mathbf{x},s,\nu(\varphi,\psi),\ell(\varphi,\psi))\cdot\ell(\varphi,\psi))\,ds,\\ F_2(\mathbf{x},\varphi,\psi) &= \lim_{t\to\tau(\mathbf{x},\nu)+0}(\mathbf{E}(\mathbf{x},t,\nu(\varphi,\psi),\ell(\varphi,\psi))\cdot\ell(\varphi,\psi)) \end{aligned} \tag{5}$$

для всех $\mathbf{x}\in(P(\psi)\cap S^+(\nu(\varphi,\psi)))$, $\psi\in[0,\pi)$, *и всех* $\ell(\varphi,\psi)$ *и* $\nu(\varphi,\psi)$, $(\varphi,\psi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi)$.

Заметим, что $F_1(\mathbf{x},\varphi,\psi)$ и $F_2(\mathbf{x},\varphi,\psi)$ являются функциями трех скалярных переменных, так как $\mathbf{x}$ принадлежит полуокружности $(P(\psi)\cap S^+(\nu(\varphi,\psi)))$ при фиксированных φ и ψ. Поэтому обратная задача не является переопределенной: для отыскания двух функций трех переменных используется информация той же самой размерности.

Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений математической физики, в которых изучаются свойства ядер некоторых интегральных операторов, описывающих предысторию процесса распространения волн, начали изучаться сравнительно давно. По-видимому, первая из работ принадлежит Лоренци и Синестрари и относится к 1988 г. (см. [1]). В ней авторы изучают ядра памяти, связанные с упругими материалами. Затем в 1994 г. появилась работа Д. К. Дурдиева [2] для волнового уравнения с ядром, зависящим только от времени. Задачам определения ядер памяти в уравнениях вязкоупругости посвящены работы [3–9]. В них изучены различные варианты постановок обратных задач, использующие разнообразную информацию о решениях прямых задач для этих уравнений. В работах [10, 11] рассматриваются проблемы изучения ядер интегро-дифференциальных операторов для уравнений электродинамики. В [12] изучена задача определения ядра памяти в нелинейном волновом уравнении. Отметим также книгу [13], в которой приведен большой круг задач об определении ядер памяти для различных уравнений математической физики и собрана обширная библиография по таким задачам.

В настоящей работе изучается сформулированная выше обратная задача. Она существенно отличается по постановке и методам исследования от работ [10, 11]. Полученные результаты являются новыми. В следующем разделе изучается прямая задача, выписывается структура решения в окрестности фронта волны, выводятся амплитудные формулы для сингулярной части решения и его регулярной части на фронте волны. В разд. 3 проводится анализ задач об определении функций $p(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$. Показывается, что задание функции $F_1(\mathbf{x},\varphi,\psi)$ определяет интегралы от $p(\mathbf{x})$ по всевозможным прямым, пересекающим область B. Тем самым задача о построении $p(\mathbf{x})$ приводится к задаче рентгеновской томографии. Это позволяет однозначно ее найти. После этого оказывается возможным найти по функции $F_2(\mathbf{x},\varphi,\psi)$ интегралы от $q(\mathbf{x})$ также по всевозможным прямым, пересекающим область B. Это обстоятельство сводит проблему построения $q(\mathbf{x})$ к полностью аналогичной задаче томографии.

2. Представление решения прямой задачи

Найдем формулы для амплитуды сингулярной части электрической напряженности поля и значения ее регулярной части на фронте волны. Чтобы это сделать, удобно использовать для функции $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ интегро-дифференциальное уравнение второго порядка. Выведем его следующим образом. Вначале продифференцируем оба уравнения (1) по переменной t, а затем исключим из первого уравнения $\mathrm{rot}\mathbf{H}_t$. Тогда получим уравнение

$$\varepsilon\mathbf{E}_{tt} + (p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))\mathbf{E}_t + p(\mathbf{x})\int\limits_{-\infty}^{t} K_1'(t-s)\mathbf{E}(\mathbf{x},s)\,ds + q(\mathbf{x})\mathbf{E} + q(\mathbf{x})\int\limits_{-\infty}^{t} K_2'(t-s)\mathbf{E}(\mathbf{x},s)\,ds + \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0. \tag{6}$$

Воспользуемся равенством $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E} + \nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}$. В результате из (6) получаем уравнение

$$\varepsilon\mu\mathbf{E}_{tt} + \mu(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))\mathbf{E}_t + \mu p(\mathbf{x})\int\limits_{-\infty}^{t} K_1'(t-s)\mathbf{E}(\mathbf{x},s)\,ds + \mu q(\mathbf{x})\mathbf{E} + \mu q(\mathbf{x})\int\limits_{-\infty}^{t} K_2'(t-s)\mathbf{E}(\mathbf{x},s)\,ds = \Delta\mathbf{E} - \nabla\mathrm{div}\,\mathbf{E}. \tag{7}$$

Вычислим $\mathrm{div}\,\mathbf{E}$ с помощью первого равенства (1). В результате вычислений получаем соотношение

$$\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}(\mathbf{x},t) + \int\limits_{-\infty}^{t} K_1'(t-s)\,\mathrm{div}[p(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},s)]\,ds\right) + \mathrm{div}[(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))\mathbf{E}(\mathbf{x},t)] + \int\limits_{-\infty}^{t} K_2(t-s)\,\mathrm{div}[q(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},s)]\,ds = 0.$$

Из него следует формула

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{\varepsilon}\left\{\int\limits_{-\infty}^{t} (t-s)K_1'(t-s)\,\mathrm{div}[p(\mathbf{x})E(\mathbf{x},s)]\,ds + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{div}[(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))\mathbf{E}(\mathbf{x},s)]\,ds + \int\limits_{-\infty}^{t} (t-s)K_2(t-s)\,\mathrm{div}[q(\mathbf{x})E(\mathbf{x},s)]\,ds\right\}. \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8) получаем уравнение

$$\varepsilon\mu\mathbf{E}_{tt} + \mu(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))\mathbf{E}_t - \Delta\mathbf{E} + \mu p(\mathbf{x})\int\limits_{-\infty}^{t} K_1'(t-s)\mathbf{E}(\mathbf{x},s)\,ds + \mu q(\mathbf{x})\mathbf{E} + \mu q(\mathbf{x})\int\limits_{-\infty}^{t} K_2'(t-s)\mathbf{E}(\mathbf{x},s)\,ds$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\left\{\int\limits_{-\infty}^{t} (t-s)K_1'(t-s)\nabla\,\mathrm{div}[p(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},s)]\,ds + \int\limits_{-\infty}^{t} \nabla\,\mathrm{div}\,\big[\big(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})\big)\mathbf{E}(\mathbf{x},s)\big]\,ds\right.$$

$$+\int_{-\infty}^{t}(t-s)K_2(t-s)\nabla\operatorname{div}[q(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},s)]\,ds\Bigg\}=0. \quad (9)$$

Представим решение уравнения (9), удовлетворяющее первому условию (3), в виде асимптотического разложения в окрестности фронта $t=\tau(\mathbf{x},\nu)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t,\nu,\ell)=\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)\delta(t-\tau(\mathbf{x},\nu))+\theta_0(t-\tau(\mathbf{x},\nu))[\beta(\mathbf{x},\nu,\ell) \\ +\gamma(\mathbf{x},\nu,\ell)(t-\tau(\mathbf{x},\nu))+\dots], \quad (10)$$

в котором $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t)=1$ для $t\geq 0$ и $\theta_0(t)=0$ для $t<0$, а многоточием обозначены члены более высокого порядка малости, чем $(t-\tau(\mathbf{x},\nu))$.

Теорема 1. *Пусть*

$$\mathbb{R}^3_-(\nu)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x}\cdot\nu+R\leq 0\}, \quad \mathbb{R}^3_+(\nu)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x}\cdot\nu+R>0\}.$$

Для функций $\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)$ и $\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)$ имеют место равенства

$$\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)=\ell, \quad \beta(\mathbf{x},\nu,\ell)=0, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3_-, \quad (11)$$

$$\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)=A(\mathbf{x},\nu)\ell, \quad A(\mathbf{x},\nu)=\exp\Bigg(-\frac{\mu^{1/2}}{2\varepsilon^{1/2}}\int_{L(\mathbf{x},\nu)}\big[p(\xi)+\sigma(\xi)\big]\,ds\Bigg),\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3_+, \quad (12)$$

$$\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)=B(\mathbf{x},\nu)\ell, \quad B(\mathbf{x},\nu)=-\frac{A(\mathbf{x},\nu)}{2(\varepsilon\mu)^{1/2}}\int_{L(\mathbf{x},\nu)}\left[\mu q(\xi)-\frac{\Delta_\xi A(\xi,\nu)}{A(\xi,\nu)}\right]ds,\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3_+, \quad (13)$$

в которых $L(\mathbf{x},\nu)$ — луч, выходящий из точки $\mathbf{x}$ в направлении $-\nu$, $\xi=\mathbf{x}-s\nu$ — промежуточная точка интегрирования на $L(\mathbf{x},\nu)$, $s>0$. В качестве положительного направления на $L(\mathbf{x},\nu)$ принимается направление возрастания параметра s.

Доказательство. Непосредственные вычисления приводят к формулам

$$\mathbf{E}_{tt}(\mathbf{x},t,\nu,\ell)=\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)\delta''(t-\tau(\mathbf{x},\nu))+\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)\delta'(t-\tau(\mathbf{x},\nu)) \\ +\gamma(\mathbf{x},\nu,\ell)\delta(t-\tau(\mathbf{x},\nu))+\dots, \quad (14)$$

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{x},t,\nu,\ell)=\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)|\nabla\tau(\mathbf{x},\nu)|^2\delta''(t-\tau(\mathbf{x},\nu)) \\ -[2(\nabla\tau(\mathbf{x},\nu)\cdot\nabla)\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)+\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)\Delta\tau(\mathbf{x},\nu)-\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)|\nabla\tau(\mathbf{x},\nu)|^2]\delta'(t-\tau(\mathbf{x},\nu)) \\ -[2(\nabla\tau(\mathbf{x},\nu)\cdot\nabla)\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)+\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)\Delta\tau(\mathbf{x},\nu)-\gamma(\mathbf{x},\nu,\ell)|\nabla\tau(\mathbf{x},\nu)|^2 \\ -\Delta\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)]\delta(t-\tau(\mathbf{x},\nu))+\dots, \quad (15)$$

в которых выписаны только сингулярные составляющие, а многоточием обозначены регулярные члены.

Подставим выражения для $\mathbf{E}_{tt}$ и $\Delta\mathbf{E}$ из формул (14), (15) в уравнение (9). Используем при этом очевидные равенства

$$|\nabla\tau(\mathbf{x},\nu)|^2=\varepsilon\mu, \quad \Delta\tau(\mathbf{x},\nu)=0.$$

В вычислениях член с сингулярностью $\delta''(t-\tau(\mathbf{x},\nu))$ исчезнет. Приравняем к нулю члены при сингулярностях $\delta'(t-\tau(\mathbf{x},\nu))$ и $\delta(t-\tau(\mathbf{x},\nu))$. Тогда получим уравнения

$$2(\nabla\tau(\mathbf{x},\nu)\cdot\nabla)\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)+\mu(p(\mathbf{x})+\sigma(\mathbf{x}))\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)=0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}2(\nabla\tau(\mathbf{x},\nu)\cdot\nabla)\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)+\mu(p(\mathbf{x})+\sigma(\mathbf{x}))\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)+\mu q(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)\\+(p(\mathbf{x})+\sigma(\mathbf{x}))(\nabla\tau(\mathbf{x},\nu)\cdot\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell))-\Delta\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)=0.\end{aligned} \tag{17}$$

Заметим, что коэффициент $\gamma(\mathbf{x},\nu,\ell)$ в этих формулах не участвует. Уравнение для него можно было бы найти, а затем и вычислить сам коэффициент, если выписать разложение (10) со следующим членом $\gamma^1(\mathbf{x},\nu,\ell)(t-\tau(\mathbf{x},\nu))^2$, сосчитать возникающие коэффициент при $\theta_0(t-\tau(\mathbf{x},\nu))$ и приравнять его к нулю. Однако для исследования обратной задачи нам этот коэффициент $\gamma(\mathbf{x},\nu,\ell)$ не нужен, поэтому вычислять его не будем.

Введем в рассмотрение плоскость $\Sigma(\nu)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\mid\mathbf{x}\cdot\nu+R=0\}$, касающуюся в точке $\mathbf{x}=-R\nu$ сферы S и являющуюся общей границей полупространств $\mathbb{R}^3_-(\nu)$ и $\mathbb{R}^3_+(\nu)$. Из начальных условий (3) следует формула (11). Таким образом, чтобы найти $\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)$ и $\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)$ нужно их продолжить в полупространство $\mathbb{R}^3_+(\nu)$ с помощью уравнений (16), (17). При этом целесообразно использовать начальные условия на $\Sigma(\nu)$, вытекающие из равенств (11):

$$\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)=\ell,\quad \beta(\mathbf{x},\nu,\ell)=0\quad \text{для } \mathbf{x}\in\Sigma(\nu). \tag{18}$$

Опишем процедуру построения функций $\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)$ и $\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)$ в полупространстве $\mathbb{R}^3_+(\nu)$. Пусть $\mathbf{x}^0$ — произвольная точка плоскости $\Sigma(\nu)$. Выпустим из нее луч $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0+s\nu$, $s\geq 0$. Вдоль этого луча имеет место равенство

$$(\nabla\tau(\mathbf{x},\nu)\cdot\nabla)\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)=(\varepsilon\mu)^{1/2}(\nu\cdot\nabla)\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)=(\varepsilon\mu)^{1/2}\frac{d}{ds}\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell).$$

Поэтому уравнение (16) и начальные данные для него можно записать в виде

$$2(\varepsilon\mu)^{1/2}\frac{d}{ds}\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)+\mu(p(\mathbf{x})+\sigma(\mathbf{x}))\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)=0,\quad \alpha|_{s=0}=\ell.$$

Интегрируя это уравнение, находим, что

$$\alpha(\mathbf{x}^0+s\nu,\nu,\ell)=\ell\exp\left(-\frac{\mu^{1/2}}{2\varepsilon^{1/2}}\int_0^s\left[p(\mathbf{x}^0+s'\nu)+\sigma(\mathbf{x}^0+s'\nu)\right]ds'\right),\ s>0. \tag{19}$$

Из формулы (19) видно, что вектор $\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)$ имеет в неоднородной среде то же направление ℓ, что и в однородной. В связи с этим первый член второй строки в уравнении (17) равен нулю. Само уравнение можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения вдоль прямой $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0+s\nu$:

$$2(\varepsilon\mu)^{1/2}\frac{d}{ds}\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)+\mu(p(\mathbf{x})+\sigma(\mathbf{x}))\beta(\mathbf{x},\nu,\ell)+\mu q(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)-\Delta\alpha(\mathbf{x},\nu,\ell)=0 \tag{20}$$

с начальными данными

$$\beta|_{s=0}=0. \tag{21}$$

Интегрируя линейное уравнение (20) с учетом начальных данных (21), получаем формулу

$$\beta(\mathbf{x}^0+s\nu,\nu,\ell)=-\frac{1}{2(\varepsilon\mu)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\mu^{1/2}}{2\varepsilon^{1/2}}\int_0^s\left[p(\mathbf{x}^0+s'\nu)+\sigma(\mathbf{x}^0+s'\nu)\right]ds'\right)$$

$$\times \int_0^s [\mu q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\alpha(\mathbf{x}^0 + s'\nu, \nu, \ell) - \Delta_{\mathbf{x}^0}\alpha(\mathbf{x}^0 + s'\nu, \nu, \ell)]$$

$$\times \exp\left(\frac{\mu^{1/2}}{2\varepsilon^{1/2}} \int_0^{s'} [p(\mathbf{x}^0 + s''\nu) + \sigma(\mathbf{x}^0 + s''\nu)]\, ds''\right) ds', \quad s > 0. \quad (22)$$

Равенства (19) и (22) удобно переписать в виде (12) и (13). Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3_+$. Тогда расстояние от точки $\mathbf{x}$ до ее проекции $\mathbf{x}^0$ на плоскость $\Sigma(\nu)$ равно $s(\mathbf{x}, \nu) = \mathbf{x} \cdot \nu + R$, а произвольная точка ξ на отрезке прямой, соединяющей $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^0$, может быть представлена в виде $\xi = \mathbf{x} - s\nu$, $s \in [0, s(\mathbf{x}, \nu)]$. С учетом того, что функции $p(\mathbf{x})$, $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ равны нулю вне B, можно интегрирование по отрезку, соединяющему точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^0$, заменить интегрированием по лучу $L(\mathbf{x}, \nu) = \{\xi = \mathbf{x} - s\nu, s \geq 0\}$. Тогда равенства (19) и (22) преобразуются в (12) и (13).

3. Исследование обратной задачи

Из данных (5) обратной задачи, представления (10) и формул (12), (13) следуют равенства

$$F_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi) = A(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi)), \quad F_2(\mathbf{x}, \varphi, \psi) = B(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi)) \quad (23)$$

для всех $\mathbf{x} \in (P(\psi) \cap S^+(\nu(\varphi, \psi)))$, $\psi \in [0, \pi)$, и всех $\nu(\varphi, \psi)$, $(\varphi, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi)$.

Таким образом, функции $A(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))$ и $B(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))$ в обратной задаче известны для указанных выше значений их аргументов. Рассмотрим первое равенство (23). В этом случае, используя формулу (12), находим интегралы

$$\int_{L(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))} p(\xi)\, ds = h_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi) \quad (24)$$

$$\forall\, \mathbf{x} \in (P(\psi) \cap S^+(\nu(\varphi, \psi))),\ \psi \in [0, \pi);\ \forall\, \nu(\varphi, \psi),\ (\varphi, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi),$$

в которых функция $h_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi)$ определена равенством

$$h_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi) = -2\varepsilon^{1/2}\mu^{-1/2} \ln A(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi)) - \int_{L(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))} \sigma(\xi)\, ds.$$

Для любого фиксированного значения $\psi \in (0, \pi)$ множество $P(\psi) \cap B$ представляет собой круг радиуса R. Объединение этих кругов для всех $\psi \in [0, \pi)$ образует шар B. Формула (24) при фиксированном $\psi \in [0, \pi)$ задает интегралы по всевозможным прямым, пересекающим круг $P(\psi) \cap B$. Действительно, если зафиксировать еще и угол φ, то формула (24) определяет интегралы вдоль пучка параллельных лучей, выходящих из точек полуокружности $(P(\psi) \cap S^+(\nu(\varphi, \psi)))$ в направлении $-\nu(\varphi, \psi)$. При изменении угла φ от 0 до 2π это семейство лучей делает полный оборот в плоскости $P(\psi)$. Говоря об интегралах вдоль прямых и лучей, мы, конечно, имеем в виду финитность подынтегральных функций $p(\mathbf{x})$ и $\sigma(\mathbf{x})$. Из сказанного выше следует, что задача решения интегрального уравнения (24), т. е. отыскания подынтегральной функции $p(\mathbf{x})$, представляет собой хорошо известную задачу рентгеновской томографии. Решение ее единственно и устойчиво в соответствующих пространствах. Кроме того, существуют аналитические формулы обращения и большое число численных алгоритмов, решающих эту задачу.

Примем теперь, что $p(\mathbf{x})$ найдена. Тогда функция $A(\mathbf{x},\nu)$ может быть вычислена для любых $\mathbf{x}\in(B\cup S)$ и любых $\nu\in\mathbb{S}^2$. В этом случае, используя формулу (13), можно найти интегралы

$$\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu(\varphi,\psi))} q(\xi)\,ds = h_2(\mathbf{x},\varphi,\psi) \tag{25}$$

$$\forall\,\mathbf{x}\in(P(\psi)\cap S^+(\nu(\varphi,\psi))),\ \ \psi\in[0,\pi);\ \forall\,\nu(\varphi,\psi),\ (\varphi,\psi)\in[0,2\pi)\times[0,\pi),$$

в которых функция $h_2(\mathbf{x},\varphi,\psi)$ определена равенством

$$h_2(\mathbf{x},\varphi,\psi) = -\frac{2\varepsilon^{1/2}B(\mathbf{x},\nu(\varphi,\psi))}{\mu^{1/2}A(\mathbf{x},\nu(\varphi,\psi))} + \int\limits_{L(\mathbf{x},\nu(\varphi,\psi))} \frac{\Delta_\xi A(\xi,\nu(\varphi,\psi))}{\mu A(\xi,\nu(\varphi,\psi))}\,ds.$$

Задача об отыскании функции $q(\mathbf{x})$ по интегралам (25) представляет собой в точности такую же задачу томографии, как и предыдущая.

Резюмируя результат исследования обратной задачи, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Обратная задача редуцируется к двум последовательно решаемым задачам рентгеновской томографии* (24) *и* (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzi A., Sinestrari E.* An inverse problem in the theory of materials with memory. I // Nonlinear Analysis. Theory Methods & Applications. 1988. V. 12. P. 1317–1335.
2. *Дурдиев Д. К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 574–582.
3. *Janno J., von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.
4. *Lorenzi A., Messina F., Romanov V. G.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // Appl. Anal. 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.
5. *Lorenzi A., Romanov V. G.* Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system // Inverse Probl. Imaging. 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.
6. *Романов В. Г.* Трехмерная обратная задача вязкоупругости // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 4. С. 452–455.
7. *Романов В. Г.* Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
8. *Durdiev D. K., Totieva Z. D.* The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41, N 17. P. 8019–8032.
9. *Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolić V., Rajendran M. L., Wohlmuth B.* Determining kernels in linear viscoelasticity // J. Comput. Physics. 2022. V. 464. 111331.
10. *Durdiev D. K.* Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics // Differ. Equ. 2008. V. 44, N 7. P. 893–899.
11. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в обратной задаче электродинамики // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 4. С. 861–875.
12. *Романов В. Г.* Обратная задача для полулинейного волнового уравнения с нелинейным интегральным оператором // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 2. С. 245–265.
13. *Durdiev D. K., Totieva Z. D.* Kernel determination problems in hyperbolic integro-differential equations // Springer Singapore, "Infosys Science Foundation Series in Mathematical Sci-

ences". 2023. P. 368.

Поступила в редакцию 14 августа 2025 г.
После доработки 14 августа 2025 г.
Принята к публикации 22 августа 2025 г.

Романов Владимир Гаврилович (ORCID 0000-0002-5426-4277)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru