Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2025. Том 66, № 6

УДК 517.51

ОТОБРАЖЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА МЕЖДУ МЕТРИЧЕСКИМИ ПРОСТРАНСТВАМИ С МЕРОЙ. ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ

А. С. Романов

Аннотация. Изучаются свойства отображений, индуцирующих при замене переменной операторы композиции в функциональных пространствах соболевского типа на метрических пространствах с мерой.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.611

Ключевые слова: метрические пространства, функции соболевского типа, отображения метрических пространств, операторы композиции.

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

Уже больше трех десятилетий активно развивается анализ на разнообразных метрических структурах, в том числе и в наиболее общей ситуации — непосредственно на метрических пространствах. Наряду с привычным определением, основанным на существовании обобщенных производных, соболевские пространства функций с первыми производными в регулярных областях $G \subset R^n$ допускают альтернативные описания, формулируемые в терминах метрики и меры Лебега и не использующие в явном виде линейной структуры евклидова пространства и дифференцирования. Это позволяет на метрических пространствах с мерой помимо классов суммируемых функций определить различные классы функций с «обобщенной гладкостью», которые можно считать функциональными пространствами соболевского типа, поскольку в евклидовом случае они совпадают с пространствами Соболева $W_p^1(G)$. При таком подходе к определению пространств соболевского типа они наследуют в метрическом случае некоторые свойства классических пространств Соболева $W_p^1(G)$. Получены метрические аналоги различных евклидовых результатов, в том числе аналоги соболевских теорем вложения.

Цель изучения на метрических пространствах с мерой различных функциональных классов соболевского типа и связанных с ними отображений метрических пространств заключается в получении весьма универсальных метрических результатов и в разработке новых методов доказательств, не использующих линейную структуру в области определения. Метрические результаты применимы в различных ситуациях, поскольку не связаны с конкретными метрическими пространствами и, как правило, определяются соотношением меры и метрики. К примеру, введенные Хайлашем [1] функциональные пространства соболевского типа $M_p^1(X, d, \mu)$ использовались при изучении пространств Соболева в

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0005).

евклидовых областях с нерегулярными границами [2] и при описании следов соболевских функций на фракталах [3].

В работе [4] имеется краткий обзор по данной тематике, в котором можно найти ссылки на статьи, содержащие более полную библиографию. Основными объектами изучения в [4] были функциональные пространства $M_p^1(X,d,\mu)$ и связанные с ними отображения класса $M_p^1(X,Y)$, действующие из метрического пространства (X,d) в метрическое пространство (Y,ρ).

В этой работе мы продолжаем изучение различных вопросов, связанных с пространствами соболевского типа $M_p^1(X,d,\mu)$.

В первом параграфе работы содержатся необходимые сведения о свойствах функций из пространств соболевского типа $M_p^1(X,d,\mu)$. Во втором параграфе рассматриваются отображения класса $M_p^1(X,Y)$, формулируются известные и доказываются новые свойства таких отображений, в частности, доказывается полнота пространства $M_p^1(X,Y)$. В третьем параграфе изучаются свойства отображений метрических пространств $\varphi:(X,d)\to(Y,\rho)$, индуцирующих по правилу $\varphi^*u=u\circ\varphi$ ограниченные операторы композиции в шкале пространств соболевского типа

$$\varphi^*:S_p^1(Y,\rho,\nu)\to S_q^\alpha(X,d,\mu).$$

§ 1. Функциональные пространства соболевского типа $M_p^1(X,d,\mu)$

В этом параграфе приведем для удобства формулировки основных определений и известных результатов, которые потребуются в дальнейшем.

Далее будем предполагать, что полное метрическое пространство (X,d) имеет конечный диаметр, а конечная регулярная борелевская мера μ имеет носитель в множестве X.

Функцию $g:X\to[0,\infty)$ будем называть *допустимой для μ-измеримой функции* $u:X\to\overline{R}$, если существует такое множество $E\subset X$, что $\mu(E)=0$ и неравенство

$$|u(x)-u(y)|\le d(x,y)(g(x)+g(y)) \tag{1.1}$$

выполняется для всех точек $x,y\in X\setminus E$.

Для функции $u:X\to\overline{R}$ при $p\ge1$ символом $D_p(u)$ обозначим множество всех допустимых функций, принадлежащих пространству Лебега $L_p(X,\mu)$.

Определим два функциональных пространства следующим образом:

$$S_p^1(X,d,\mu)=\{u:X\to\overline{R}\mid D_p(u)\ne\varnothing\};$$

$$M_p^1(X,d,\mu)=\bigl\{u\in L_p(X,\mu)\mid u\in S_p^1(X,d,\mu)\bigr\}.$$

Полунорма в пространстве $S_p^1(X,d,\mu)$ и норма в пространстве $M_p^1(X,d,\mu)$ определяются равенствами

$$\bigl\|u\mid S_p^1(X,d,\mu)\bigr\|=\inf_{g\in D_p(u)}\|g\mid L_p(X,\mu)\|,$$

$$\bigl\|u\mid M_p^1(X,d,\mu)\bigr\|=\|u\mid L_p(X,\mu)\|+\bigl\|u\mid S_p^1(X,d,\mu)\bigr\|.$$

В работе [1] показано, что пространство $M_p^1(X,d,\mu)$ банахово. Отметим, что в силу конечности диаметра метрического пространства и конечности меры следствием неравенства (1.1) является совпадение пространств $S_p^1(X,d,\mu)$ и $M_p^1(X,d,\mu)$ как множеств функций.

В евклидовых областях $G \subset R^n$ с липшицевой границей пространство $M_p^1(G, |\cdot|, m_n)$, рассматриваемое относительно стандартной евклидовой метрики и меры Лебега, и классическое пространство Соболева $W_p^1(G)$ совпадают как множества функций, а их нормы эквивалентны [1]. Это свойство позволяет считать пространство $M_p^1(G, |\cdot|, m_n)$ естественным метрическим аналогом пространства Соболева $W_p^1(G)$ и называть его *пространством соболевского типа.*

Различные свойства пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ и их взаимосвязь с другими классами функций изучались многими авторами. Отметим некоторые нужные нам результаты.

Для пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ содержательную теорию, включающую в себя различные варианты теорем вложения, удается получить в случае, когда мера μ удовлетворяет простому геометрическому «условию удвоения»

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_d \mu(B(x, r)), \tag{1.2}$$

т. е. мера шара удвоенного радиуса допускает оценку сверху через меру исходного шара.

Условие удвоения обеспечивает выполнение леммы Витали о покрытии и связанных с ней свойств локально суммируемых функций.

Следствием условия удвоения является оценка снизу меры произвольного шара $B(x, r)$ при $r \leq \operatorname{diam}(X)$:

$$\mu(B(x, r)) \geq Cr^s. \tag{1.3}$$

В различных теоремах вложения показатель $s \leq \log_2 C_d$, называемый *показателем регулярности меры* μ, играет в некотором смысле роль «размерности» метрического пространства (X, d) относительно меры μ.

Далее мы будем предполагать, что мера μ удовлетворяет условию удвоения и имеет показатель регулярности $s > 1$.

Символом u_E будем обозначать среднее значение функции u на множестве E:

$$u_E = \fint_E u \, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u \, d\mu.$$

Следующее утверждение было доказано в теореме 6 работы [1].

Лемма 1.1 [1]. *Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения, является s-регулярной и $u \in M_p^1(X, d, \mu)$. Тогда*

1) *при $1 < p < s$ функция u принадлежит $L_q(X, \mu)$, где $1 \leq q \leq \frac{ps}{s-p}$, и*

$$\|u \mid L_q(X, \mu)\| \leq C \|u \mid M_p^1(X, d, \mu)\|;$$

2) *если $p = s$, то функция u принадлежит $L_q(X, \mu)$ при всех $q \in [1, \infty)$;*
3) *при $p > s$ функция u принадлежит $L_\infty(X, \mu)$ и*

$$\|u - u_X \mid L_\infty(X, \mu)\| \leq C\mu(X)^{1/s - 1/p} \|u \mid S_p^1(X, d, \mu)\|. \tag{1.4}$$

Нам будет удобнее вместо п. 3 использовать довольно простое следствие оценки (1.4).

Лемма 1.2 [4]. *Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения и s-регулярна, $s < p < \infty$. Тогда для всякой функции $u \in M_p^1(X, d, \mu)$ существует эквивалентная ей непрерывная функция $\widetilde{u}$, для которой при всех $x, y \in X$ выполняется неравенство*

$$|\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y)| \leq C[d(x, y)]^{1 - s/p} \|u \mid S_p^1(X, d, \mu)\|. \tag{1.5}$$

Пусть $\alpha \in (0,1)$. Заменяя в определении пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ и $S_p^1(X,d,\mu)$ неравенство (1.1) на

$$|u(x) - u(y)| \leq [d(x,y)]^\alpha (g(x) + g(y)),$$

получим функциональные пространства $M_p^\alpha(X,d,\mu)$ и $S_p^\alpha(X,d,\mu)$.

Функциональные пространства $M_p^\alpha(X,d,\mu)$, быть может, не совсем привычны, но, с одной стороны, они имеют простое определение и полученные для них результаты являются весьма универсальными, с другой стороны, они близки к пространствам Бесова $B_{p,p}^\alpha(X,d,\mu)$. Как показано в работе [5], для любого $\varepsilon > 0$

$$B_{p,p}^\alpha(X,d,\mu) \subset M_p^\alpha(X,d,\mu) \subset B_{p,p}^{\alpha-\varepsilon}(X,d,\mu).$$

Рассмотрим на множестве X новую гёльдерову метрику d_α, полагая

$$d_\alpha(x,y) = [d(x,y)]^\alpha.$$

Для шара в метрике d_α будем использовать обозначение $B_\alpha(x,r)$. Поскольку

$$\mu(B_\alpha(x,r)) = \mu(B(x,r^{1/\alpha})) \geq Cr^{s/\alpha},$$

относительно метрики d_α мера μ является s/α-регулярной.

Далее будем использовать термин «гёльдеровы классы», имея в виду пространства соболевского типа M_p^α, связанные с соответствующей гёльдеровой метрикой. Вполне очевидно, что $M_p^\alpha(X,d,\mu) = M_p^1(X,d_\alpha,\mu)$ и $S_p^\alpha(X,d,\mu) = S_p^1(X,d_\alpha,\mu)$. Таким образом, гёльдеровы классы относительно исходной метрики являются пространствами функций, имеющих «гладкость», равную единице относительно гёльдеровой метрики. Это означает, что при получении, к примеру, теорем вложения для функциональных пространств $M_p^\alpha(X,d,\mu)$ достаточно в утверждениях для пространств $M_p^1(X,d,\mu)$ заменить показатель регулярности s на s/α.

Приведем лишь нужные нам следствия лемм 1.1 и 1.2.

Лемма 1.3. *Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения и s-регулярна. Тогда*

1) *при $1 < \alpha p < s$ пространство $M_p^\alpha(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство Лебега $L_q(X,\mu)$, где $1 \leq q \leq \frac{ps}{s-\alpha p}$;*

2) *при $s < \alpha p < \infty$ для всякой функции $u \in M_p^\alpha(X,d,\mu)$ существует эквивалентная ей непрерывная функция $\widetilde{u}$, для которой при всех $x, y \in X$ выполняется неравенство*

$$|\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y)| \leq C[d(x,y)]^{\alpha - s/p} \big\| u \mid S_p^\alpha(X,d,\mu) \big\|.$$

Отметим существование в шкале пространств $M_p^\alpha(X,d,\mu)$ внутренней теоремы вложения.

Лемма 1.4 [2]. *Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения и s-регулярна, $1 < p < \infty$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда пространство $M_p^1(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство $M_q^\alpha(X,d,\mu)$, где*

1) $1 \leq q \leq \frac{sp}{s-(1-\alpha)p}$ *при* $(1-\alpha)p < s$;

2) $1 \leq q < \infty$ *при* $(1-\alpha)p = s$;

3) $1 \leq q \leq \infty$ *при* $(1-\alpha)p > s$.

При учете равенства $M_p^\alpha(X,d,\mu) = M_p^1(X,d_\alpha,\mu)$ соответствующее вложение пространства $M_p^\alpha(X,d,\mu)$ в пространство $M_q^\beta(X,d,\mu)$ при $\beta < \alpha$ является простым следствием леммы 1.4.

§ 2. Отображения метрических пространств класса $M_p^1(X,Y)$

Определим интересующие нас классы отображений, действующих из метрического пространства (X,d) в метрическое пространство (Y,ρ). В некоторых работах авторы используют изометрическое вложение метрического пространства (Y,ρ) в пространство ограниченных функций и изучают далее отображения со значениями в банаховом пространстве. При таком подходе возникает определенная зависимость от выбранного способа вложения. Будем рассматривать отображения с областью значений непосредственно в метрическом пространстве.

Рассмотрим полное сепарабельное метрическое пространств (Y,ρ) и, следуя работе Ю. Г. Решетняка [6], при $p \geq 1$ определим принадлежность отображения $\varphi : (X,d) \to (Y,\rho)$ лебеговскому классу $L_p(X,Y)$ условием: вещественные функции $\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x),y)$ принадлежат пространству Лебега $L_p(X,\mu)$ при всех $y \in Y$.

Замечание. Первоначально такое условие использовалось в работе Кореваара и Шоэна [7] для функций, определенных в областях риманова пространства. В [6] областью определения является произвольное пространство с мерой (M,S,μ), где M — произвольное множество, S — σ-алгебра подмножеств M и $\mu : S \to R$ — неотрицательная мера.

Элементом класса $L_p(X,Y)$ будем считать совокупность отображений, совпадающих μ-почти всюду в X.

Из неравенства

$$|\varphi_{y_1}(x) - \varphi_{y_2}(x)| \leq \rho(y_1,y_2)$$

и конечности меры μ следует, что отображение φ принадлежит классу $L_p(X,Y)$, если хотя бы для одного $y \in Y$ функция φ_y принадлежит $L_p(X,\mu)$. Пусть φ и ψ — произвольные отображения класса $L_p(X,Y)$. Поскольку

$$\rho(\varphi(x),\psi(x)) \leq \rho(\varphi(x),y) + \rho(\psi(x),y) = \varphi_y(x) + \psi_y(x),$$

функция $H_{\varphi,\psi}(x) = \rho(\varphi(x),\psi(x))$ принадлежит пространству Лебега $L_p(X,\mu)$. Несложно проверить, что функция

$$\rho_p(\varphi,\psi) = \left(\int\limits_X [\rho(\varphi(x),\psi(x))]^p \, d\mu\right)^{1/p} = \|H_{\varphi,\psi} \mid L_p(X,\mu)\|$$

является метрикой на множестве отображений класса $L_p(X,Y)$. При этом метрическое пространство $(L_p(X,Y),\rho_p)$ полное [6, 7].

Впоследствии нам будет удобнее использовать другую метрику η_p, согласованную с определением класса $L_p(X,Y)$.

Если $\varphi,\psi \in L_p(X,Y)$, то для функции

$$\eta_p(\varphi,\psi) = \sup_{z\in Y} \|\varphi_z - \psi_z \mid L_p(X,\mu)\|$$

симметричность, неравенство треугольника и равенство $\eta_p(\varphi,\varphi) = 0$ вполне очевидны.

Совпадение почти всюду отображений φ и ψ в случае $\eta_p(\varphi,\psi) = 0$ проверяется довольно просто. Из свойств нормы пространства $L_p(X,\mu)$ и равенства

$\eta_p(\varphi,\psi)=0$ следует, что при всяком $z\in Y$ равенство $\varphi_z(x)-\psi_z(x)=0$ выполняется при почти всех $x\in X$. Положим

$$E_z=\{x\in X\mid \varphi_z(x)-\psi_z(x)\neq 0\}.$$

Пусть P — счетное всюду плотное подмножество в Y и

$$E=\bigcup_{z\in P}E_z.$$

Отметим, что $\mu(E)=0$ и при всех $x\in X\setminus E$ и всех $z\in P$

$$\rho(\varphi(x),z)-\rho(\psi(x),z)=0.$$

Если $x\in X\setminus E$ и $\psi(x)\in P$, то, полагая $z=\psi(x)$, получаем $\rho(\varphi(x),\psi(x))=0$. Если $\psi(x)\notin P$, то существует такая последовательность $\{z_k\}$, что $z_k\in P$ и $z_k\to\psi(x)$ в Y. В силу непрерывности метрики

$$\rho(\varphi(x),\psi(x))=\lim_{k\to\infty}\rho(\varphi(x),z_k)=0.$$

Поэтому

$$\eta_p(\varphi,\psi)=0\iff\varphi(x)=\psi(x)\quad\text{при}\quad x\in X\setminus E.$$

Отображения φ и ψ совпадают почти всюду. Таким образом, функция η_p является метрикой на множестве отображений класса $L_p(X,Y)$.

Метрическое пространство (Y,ρ) будем называть *регулярным*, если оно является полным, сепарабельным и всякий замкнутый шар $\overline{B}\subset Y$ является компактным множеством.

Если метрическое пространство (Y,ρ) регулярно, то с точки зрения сходимости метрики η_p и ρ_p эквивалентны.

Поскольку

$$|\varphi_z(x)-\psi_z(x)|=|\rho(\varphi(x),z)-\rho(\psi(x),z)|\leq\rho(\varphi(x),\psi(x)),$$

то $\eta_p(\varphi,\psi)\leq\rho_p(\varphi,\psi)$.

С другой стороны, если последовательность отображений $\{\varphi_k\}$ класса $L_p(X,Y)$ фундаментальна относительно метрики η_p, то при всяком $z\in Y$ последовательность вещественных функций $\{[\varphi_k]_z\}$ сходится в полном пространстве $L_p(X,\mu)$. Остается воспользоваться леммой 2.3 работы [6], согласно которой последовательность отображений $\{\varphi_k\}$ сходится по метрике ρ_p к некоторому отображению $\varphi\in L_p(X,Y)$.

В работе Кореваара и Шоэна [7] рассматриваются отображения соболевского типа с областью определения в римановом пространстве и областью значений в метрическом пространстве (X,d). Авторы используют довольно сложную конструкцию: для отображения $u\in L_p(\Omega,X)$ определяют специального вида функционал энергии $E_p(u)$ и полагают по определению, что отображение u принадлежит классу $KS_p(\Omega,X)$, если $E_p(u)<\infty$. В работах [6, 8] доказано, что всякая вещественная функция класса $KS_p(\Omega,R)$ принадлежит пространству Соболева $W^1_p(\Omega)$.

Нам удобнее при определении классов отображений соболевского типа использовать подход, предложенный Ю. Г. Решетняком [6]. С одной стороны, определение работы [6] весьма универсально, условия легко формулируются и с ними легче работать, с другой стороны Ю. Г. Решетняк показал [8], что определение работы [6] приводит к тому же классу отображений, что и определение работы [7].

Модифицируя схему Ю. Г. Решетняка, определим связанные с пространствами $M_p^1(X,d,\mu)$ классы отображений соболевского типа, действующих из метрического пространства (X,d) в метрическое пространство (Y,ρ).

Определение класса $\mathscr{M}_p^1(X,Y)$. Будем говорить, что определенное почти всюду в X отображение $\varphi:(X,d)\to(Y,\rho)$ *принадлежит классу* $\mathscr{M}_p^1(X,Y)$, если

1) для всякого $y\in Y$ функция $\varphi_y(x)=\rho(\varphi(x),y)$ принадлежит функциональному пространству $M_p^1(X,d,\mu)$;

2) существует такая функция $\omega\in L_p(X,\mu)$, что при всех $y\in Y$ функция ω является допустимой для функции φ_y.

Заметим, что из п. 1 следует принадлежность отображения φ классу $L_p(X,Y)$.

Лемма 2.1. *Пусть отображение $\varphi:(X,d)\to(Y,\rho)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\varphi\in L_p(X,Y)$;

2) *существуют такое множество $E\subset X$ и такая неотрицательная функция $g\in L_p(X,\mu)$, что $\mu(E)=0$ и неравенство*

$$\rho(\varphi(x_1),\varphi(x_2))\le d(x_1,x_2)(g(x_1)+g(x_2)) \tag{2.1}$$

выполняется для всех точек $x_1,x_2\in X\setminus E$.

Тогда $\varphi\in\mathscr{M}_p^1(X,Y)$. Если метрическое пространство (Y,ρ) сепарабельно, то для принадлежности отображения φ классу $\mathscr{M}_p^1(X,Y)$ выполнение условий 1 *и* 2 *является необходимым.*

Это утверждение в несколько иной формулировке доказано в лемме 2.1 работы [4].

В случае, когда множество X является липшицевой областью $G\subset R^n$, а $Y=R$, получаем класс вещественных функций $\mathscr{M}_p^1(G,R)$, для которого согласно лемме 2.1 и отмеченному ранее результату работы [1] выполняются соотношения

$$\mathscr{M}_p^1(G,R)=M_p^1(G,|\cdot|,m_n)=W_p^1(G).$$

В некоторых случаях использование неравенства (2.1) позволяет получить простые доказательства утверждений, касающихся отображений класса $\mathscr{M}_p^1(X,Y)$.

Говорят, что отображение метрических пространств $\psi:(Y,\rho)\to(Z,\delta)$ *удовлетворяет условию Липшица*, если существует постоянная $K<\infty$ такая, что для любых $y_1,y_2\in Y$

$$\delta[\psi(y_1),\psi(y_2)]\le K\rho(y_1,y_2).$$

Если $\varphi\in\mathscr{M}_p^1(X,Y)$, а $\psi:(Y,\rho)\to(Z,\delta)$ удовлетворяет условию Липшица, то, используя лемму 2.1, легко показать, что отображение $\Lambda=\psi\circ\varphi$ принадлежит классу $\mathscr{M}_p^1(X,Z)$ [4].

Рассмотрим еще один класс отображений.

Определение класса $\mathbb{M}_p^1(X,Y)$. Будем говорить, что определенное почти всюду в X отображение $\varphi:(X,d)\to(Y,\rho)$ *принадлежит классу* $\mathbb{M}_p^1(X,Y)$, если

1) для всякого $y\in Y$ функция $\varphi_y(x)=\rho(\varphi(x),y)$ принадлежит функциональному пространству $M_p^1(X,d,\mu)$;

2) при всех $y\in Y$ нормы всех функций φ_y равномерно ограничены, т. е.

$$\left\|\varphi_y \mid S_p^1(X,d,\mu)\right\|\le C_0<\infty.$$

Введем обозначение

$$\langle\varphi\rangle_p = \sup_{y\in Y}\big\|\varphi_y \mid S_p^1(X,d,\mu)\big\|.$$

Принадлежность отображения φ классу $\mathbb{M}_p^1(X,Y)$ эквивалентна выполнению условий $\varphi\in L_p(X,Y)$ и $\langle\varphi\rangle_p<\infty$.

На множестве отображений $\mathbb{M}_p^1(X,Y)$ можно определить метрику, полагая для отображений $\varphi,\psi\in\mathbb{M}_p^1(X,Y)$

$$\eta_{1,p}(\varphi,\psi) = \sup_{y\in Y}\big\|\varphi_y-\psi_y \mid M_p^1(X,d,\mu)\big\|.$$

Выполнение аксиом метрики в данном случае вполне очевидно.

Лемма 2.2. *Если пространство (Y,ρ) регулярно, то множество отображений $\mathbb{M}_p^1(X,Y)$ с метрикой $\eta_{1,p}(\cdot,\cdot)$ является полным метрическим пространством.*

Доказательство. Если $\{\varphi_n\}$ — фундаментальная относительно метрики $\eta_{1,p}(\cdot,\cdot)$ последовательность отображений класса $\mathbb{M}_p^1(X,Y)$, то при фиксированном $y\in Y$ последовательность функций $[\varphi_n]_y$ фундаментальна в полном пространстве $M_p^1(X,d,\mu)$ и сходится к некоторой функции $h_y\in M_p^1(X,d,\mu)$. При этом

$$\|[\varphi_n]_y-h_y \mid L_p(X,\mu)\|\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Вполне очевидно, что последовательность $\{\varphi_n\}$ является фундаментальной и относительно метрики $\eta_p(\cdot,\cdot)$, сходимость по которой эквивалентна сходимости по метрике $\rho_p(\cdot,\cdot)$. Поэтому последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится в полном метрическом пространстве $L_p(X,Y)$ к некоторому отображению $\varphi\in L_p(X,Y)$. Поскольку

$$|[\varphi_n]_y(x)-\varphi_y(x)|\le\rho(\varphi_n(x),\varphi(x)),$$

то

$$\|[\varphi_n]_y-\varphi_y \mid L_p(X,\mu)\|\le\left(\int\limits_X[\rho(\varphi_n(x),\varphi(x))]^p\,d\mu\right)^{1/p} = \rho_p(\varphi_n,\varphi)\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Следовательно, $\varphi_y=h_y$ почти всюду и поэтому $\varphi_y\in M_p^1(X,d,\mu)$.

Согласно определению метрики $\eta_{1,p}(\cdot,\cdot)$

$$\sup_{y\in Y}\big\|[\varphi_n]_y-h_y \mid M_p^1(X,d,\mu)\big\|\to 0 \quad \text{при } n\to\infty. \tag{2.2}$$

Из свойства (2.2) следует существование такого номера n_0, что при произвольном $y\in Y$ выполняется неравенство $\big\|[\varphi_{n_0}]_y-\varphi_y \mid M_p^1(X,d,\mu)\big\|<1$. Поэтому при всех $y\in Y$

$$\big\|\varphi_y \mid S_p^1(X,d,\mu)\big\|\le\big\|\varphi_y \mid M_p^1(X,d,\mu)\big\|\le 1+\big\|[\varphi_{n_0}]_y \mid M_p^1(X,d,\mu)\big\|<\infty.$$

Это означает, что предельное отображение φ принадлежит классу $\mathbb{M}_p^1(X,Y)$ и согласно свойству (2.2) $\eta_{1,p}(\varphi_n,\varphi)\to 0$. $\square$

Вполне очевидно, что $\mathscr{M}_p^1(X,Y)\subset\mathbb{M}_p^1(X,Y)$. С одной стороны, проверить принадлежность отображения классу $\mathbb{M}_p^1(X,Y)$ проще, чем принадлежность классу $\mathscr{M}_p^1(X,Y)$, с другой стороны, многие результаты, к примеру, теоремы вложения, получаемые для класса $\mathbb{M}_p^1(X,Y)$, не только верны для класса $\mathscr{M}_p^1(X,Y)$, но и точны.

Согласно определениям соответствующих классов отображений принадлежность отображения φ класса $\mathbb{M}_p^1(X,Y)$ лебеговскому классу $L_q(X,Y)$ является непосредственным следствием принадлежности вещественной функции φ_y пространству $M_p^1(X,d,\mu)$, непрерывно вложенному в пространство Лебега $L_q(X,\mu)$ (лемма 1.1).

Лемма 2.3 [4]. *Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения и s-регулярна. Тогда*

1) *если $1 < p < s$, то включение*

$$\mathbb{M}_p^1(X,Y) \subset L_q(X,Y)$$

имеет место при всех $1 \le q \le \frac{ps}{s-p}$, при этом для всякого отображения $\varphi \in \mathbb{M}_p^1(X,Y)$ и для произвольной точки $y \in Y$ выполняется оценка

$$\|\varphi_y \mid L_q(X,\mu)\| \le C\big\|\varphi_y \mid M_p^1(X,d,\mu)\big\|;$$

2) *если $p = s$, то $\mathbb{M}_p^1(X,Y) \subset L_q(X,Y)$ при всех $q \in [1,\infty)$;*

3) *если $p > s$, то $\mathbb{M}_p^1(X,Y) \subset L_\infty(X,Y)$ и для всякого отображения $\varphi \in \mathbb{M}_p^1(X,Y)$ и произвольной точки $y \in Y$ выполняется оценка*

$$\|\varphi_y - [\varphi_y]_X \mid L_\infty(X,\mu)\| \le C\mu(X)^{1/s-1/p}\big\|\varphi_y \mid S_p^1(X,d,\mu)\big\|.$$

Несколько сложнее доказывается утверждение, уточняющее результат п. 3.

Лемма 2.4 [4]. *Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения и s-регулярна, $s < p < \infty$, а метрическое пространство (Y,ρ) регулярно. Тогда для всякого отображения $\varphi \in \mathbb{M}_p^1(X,Y)$ существует эквивалентное ему непрерывное отображение ψ, для которого при всех $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство*

$$\rho(\psi(x_1),\psi(x_2)) \le C[d(x_1,x_2)]^{1-s/p}\langle\varphi\rangle_p. \tag{2.3}$$

Замечание. Поскольку $\mathscr{M}_p^1(X,Y) \subset \mathbb{M}_p^1(X,Y)$, то для отображений класса $\mathscr{M}_p^1(X,Y)$ верны утверждения лемм 2.3 и 2.4. С другой стороны, на евклидовом шаре $B \subset R^n$ согласно лемме 2.1 $\mathscr{M}_p^1(B,R) = M_p^1(B,|\cdot|,m_n) = W_p^1(B)$. Следовательно, показатели в леммах 2.3 и 2.4 точные, так как на шаре B они совпадают с показателями классических соболевских теорем вложения.

Естественным образом определяются гёльдеровы классы отображений: определенное почти всюду в X отображение $\varphi : (X,d) \to (Y,\rho)$ *принадлежит классу* $\mathbb{M}_p^\alpha(X,Y)$, если

1) для всякого $y \in Y$ функция $\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x),y)$ принадлежит функциональному пространству $M_p^\alpha(X,d,\mu)$;

2) при всех $y \in Y$ нормы всех функций φ_y ограничены, т. е.

$$\big\|\varphi_y \mid S_p^\alpha(X,d,\mu)\big\| \le C_0 < \infty.$$

Как и в леммах 2.3 и 2.4, формальная переформулировка утверждений для пространств функций $M_p^1(X,d,\mu)$ в леммах 1.3 и 1.4 позволяет получить теоремы вложения для отображений, принадлежащих гёльдеровым классам $\mathbb{M}_p^\alpha(X,Y)$.

Лемма 2.5 [4]. *Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения и s-регулярна, а метрическое пространство (Y,ρ) регулярно. Тогда*

1) *если $1 < \alpha p < s$, то включение*

$$\mathbb{M}_p^\alpha(X,Y) \subset L_q(X,Y)$$

имеет место при всех $1 \le q \le \frac{ps}{s-\alpha p}$;

2) *если $s < \alpha p < \infty$, то для всякого отображения $\varphi \in \mathbb{M}_p^\alpha(X,Y)$ существует эквивалентное ему непрерывное отображение ψ, для которого при всех $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство*

$$\rho(\psi(x_1),\psi(x_2)) \le C[d(x_1,x_2)]^{\alpha-\frac{s}{p}}.$$

§ 3. Операторы композиции

Задача об описании классов отображений, сохраняющих при замене переменной пространства Соболева $L_p^1(G), G \subset R^n$, была сформулирована Ю. Г. Решетняком в 1968 г. Первые результаты, полученные С. К. Водопьяновым и В. М. Гольдштейном [9, 10], способствовали дополнительному интересу к этой задаче, поскольку оказалось, что соответствующие замены переменной связаны с классами квазиконформных и квазиизометрических отображений.

Впоследствии менялись постановки задач, изучались классы отображений, индуцирующих при замене переменной ограниченные операторы в весовых пространствах Соболева, в пространствах Бесова и в других классах функций, определенных в областях евклидова пространства R^n. С. К. Водопьянов и его ученики активно изучали замены переменной в пространствах Соболева на группах Карно. В настоящее время тематика активно развивается и остается актуальной. Работа С. К. Водопьянова и Н. А. Евсеева [11] содержит небольшой обзор результатов, связанных с инвариантностью функциональных классов при замене переменной.

Далее рассматриваются полные метрические пространства (X,d), (Y,ρ), имеющие конечный диаметр, и конечные борелевские меры — μ с носителем в множестве X и ν с носителем в множестве Y.

Нас интересуют свойства отображений метрических пространств $\varphi : (X,d) \to (Y,\rho)$, индуцирующих при замене переменной ограниченные операторы композиции в пространствах соболевского типа, т. е. операторы

$$\varphi^* : S_p^1(Y,\rho,\nu) \to S_q^1(X,d,\mu),$$

действующие по правилу $\varphi^* u = u \circ \varphi$.

Учитывая, с одной стороны, разнообразие возникающих в метрическом случае ситуаций, с другой стороны, ограниченность доступных в этом случае методов доказательств и технических приемов, решение сформулированной задачи в полном объеме в данный момент не представляется возможным. Даже в евклидовом случае окончательное решение поставленной Ю. Г. Решетняком проблемы было получено С. К. Водопьяновым спустя три десятилетия после начала исследований по данной тематике [12].

Мы лишь рассмотрим различные постановки задачи и некоторые результаты, касающиеся операторов композиции в пространствах соболевского типа M_p^1.

Из содержания § 1 следует, что структура функционального пространства соболевского типа M_p^1 зависит от взаимосвязи метрики и меры. Поэтому и свойства операторов композиции естественным образом зависят от свойств соответствующих метрик и мер. Мы не предполагаем изначально явной взаимосвязи между метриками d и ρ, а также между мерами μ и ν, но нам понадобятся некоторые соотношения, связывающие меру μ с метрикой d, а меру ν — с метрикой ρ.

Кроме использованного ранее условия удвоения нам потребуется двусторонняя оценка меры шара.

Метрическое пространство (X, d) будем называть *s-однородным* ($s > 1$), если существует такая мера μ, что при $0 < r < \operatorname{diam}(X)$ для всех шаров $B(x, r) \subset X$ выполняется оценка

$$L_1 r^s \le \mu(B(x, r)) \le L_2 r^s, \quad 0 < L_1, L_2 < \infty. \tag{3.1}$$

Поскольку

$$B(x, r) \subset \overline{B(x, r)} \subset B(x, r + \varepsilon),$$

оценка (3.1) выполняется и для замкнутых шаров. Из неравенства (3.1) следует, что мера μ удовлетворяет условию удвоения и является s-регулярной.

Далее, рассматривая s-однородное метрическое пространство, будем предполагать, что для заданной на нем меры выполняется оценка (3.1). Для меры в пространстве (X, d) будем использовать обозначение μ, а меру в пространстве (Y, ρ) обозначим символом ν.

Взаимно однозначное отображение $\varphi : (X, d) \to (Y, \rho)$ будем называть *квазиизометрическим* (*квазиизометрией*), если для всех $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство

$$C_1\, d(x_1, x_2) \le \rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \le C_2\, d(x_1, x_2), \quad 0 < C_1, C_2 < \infty.$$

В работе [4] показано, что квазиизометрия φ полных s-однородных метрических пространств (X, d) и (Y, ρ) индуцирует по правилу $\varphi^* u = u \circ \varphi$ изоморфизм пространств соболевского типа

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \to S_p^1(X, d, \mu)$$

при всех показателях $p \in [1, \infty)$.

При показателях суммируемости p, бо́льших «размерности» метрического пространства, выполняется и обратное свойство: если s-однородные метрические пространства (X, d) и (Y, ρ) регулярны, $p > s$ и отображение $\varphi : (X, d) \to (Y, \rho)$ индуцирует при замене переменной изоморфизм пространств соболевского типа

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \to S_p^1(X, d, \mu), \quad \|\varphi^*\| < \infty,$$

то существует такое квазиизометрическое отображение ψ, что $\psi = \varphi$ почти всюду [4].

Заметим, что s-однородное пространство относительно метрики d при $\alpha \in (0, 1]$ является s/α-однородным относительно метрики d^α, а условия квазиизометричности относительно метрик d, ρ и метрик d^α, ρ^α с точностью до пересчета констант эквивалентны. Поэтому условие квазиизометричности отображения φ является достаточным для изоморфности оператора композиции

$$\varphi^* : S_p^\alpha(Y, \rho, \nu) \to S_p^\alpha(X, d, \mu),$$

при всех $p \in [1, \infty)$, а при $\alpha p > s$ является необходимым [4].

Следующее утверждение является простым обобщением соответствующего результата работы [4], в котором предполагалась изоморфность оператора композиции.

Лемма 3.1. *Если отображение $\varphi : X \to Y$ индуцирует при замене переменной ограниченный оператор*

$$\varphi^* : S^1_p(Y,\rho,\nu) \to S^1_q(X,d,\mu) \quad (1 \le q \le p),$$

то отображение φ принадлежат классу $\mathbb{M}^1_q(X,Y)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y \in Y$, функцию $f_y(t) = \rho(t,y)$ и функцию $g(t) \equiv 1/2$, $\|g \mid L_p(Y,\nu)\| = 2^{-1}[\nu(Y)]^{1/p} = C_0 < \infty$. Поскольку

$$|f_y(t_1) - f_y(t_2)| = |\rho(t_1,y) - \rho(t_2,y)| \le \rho(t_1,t_2) = \rho(t_1,t_2)(g(t_1) + g(t_2)),$$

то $f_y \in S^1_p(Y,\rho,\nu)$ и $\big\|f_y \mid S^1_p(X,d,\mu)\big\| \le C_0$.

Поскольку оператор φ^* ограничен, то функция $\varphi^* f_y$ принадлежит пространству $S^1_q(X,d,\mu)$ и $\big\|\varphi^* f_y \mid S^1_q(X,d,\mu)\big\| < \infty$. При этом

$$\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x),y) = \varphi^* f_y(x) \in S^1_q(X,d,\mu).$$

Имеем $\varphi_y(x) \le \operatorname{diam}(Y) < \infty$ и мера μ конечна. Поэтому $\varphi_y \in L_q(X,\mu) \cap S^1_q(X,d,\mu)$, следовательно, $\varphi_y \in M^1_q(X,d,\mu)$. При этом

$$\big\|\varphi_y \mid S^1_q(X,d,\mu)\big\| \le \|\varphi^*\| \big\|f_y \mid S^1_p(X,d,\mu)\big\| \le C_0\|\varphi^*\| < \infty.$$

В силу произвольности выбора y это и означает, что отображение φ принадлежит классу $\mathbb{M}^1_q(X,Y)$. $\square$

Пусть s-однородные метрические пространства (X,d) и (Y,ρ) регулярны и $s < q \le p < \infty$. Чтобы выяснить степень искажения метрики отображением $\varphi : (X,d) \to (Y,\rho)$, индуцирующим при замене переменной ограниченный оператор

$$\varphi^* : S^1_p(Y,\rho,\nu) \to S^1_q(X,d,\mu),$$

нам понадобятся две оценки.

1. Пусть $a \in Y$, $0 < r < \operatorname{diam}(Y)$. Рассмотрим пробную функцию

$$h_{a,r}(y) = \begin{cases} \frac{r-\rho(a,y)}{r}, & \text{если } \rho(a,y) \le r, \\ 0, & \text{если } \rho(a,y) > r. \end{cases}$$

По построению $h_{a,r}(a) = 1$ и $h_{a,r}(y) \equiv 0$ вне шара $B(a,r)$.

Покажем, что функция

$$g_{a,r}(y) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{если } \rho(a,y) \le r, \\ 0, & \text{если } \rho(a,y) > r, \end{cases}$$

является допустимой для функции $h_{a,r}$.

Пусть $y_1, y_2 \in \overline{B(a,r)}$, тогда

$$|h_{a,r}(y_1) - h_{a,r}(y_2)| = \frac{1}{r}|\rho(a,y_1) - \rho(a,y_2)| \\ \le \frac{1}{r}\rho(y_1,y_2) \le \rho(y_1,y_2)(g_{a,r}(y_1)) + g_{a,r}(y_2)).$$

Если $\rho(a,y_1) \le r$ и $\rho(a,y_2) > r$, то

$$|h_{a,r}(y_1) - h_{a,r}(y_2)| = \frac{1}{r}|r - \rho(a,y_1)| \le \frac{1}{r}\rho(y_1,y_2) \le \rho(y_1,y_2)(g_{a,r}(y_1)) + g_{a,r}(y_2)).$$

Если $\rho(a, y_1) > r$ и $\rho(a, y_2) > r$, то

$$|h_{a,r}(y_1) - h_{a,r}(y_2)| = 0.$$

Учитывая s-однородность пространства (Y, ρ), получаем

$$\left\|h_{a,r} \mid S_p^1(Y, \rho, \nu)\right\| \leq \|g_{a,r} \mid L_p(Y, \nu)\| = \frac{1}{r}[\nu(B(a, r))]^{1/p} \leq C_1 r^{s/p-1}. \tag{3.2}$$

2. Если $q > s$, непрерывная функция u принадлежит $S_q^1(X, d, \mu)$ и $|u(x_1) - u(x_2)| \geq 1$, то согласно лемме 1.2

$$\left\|u \mid S_q^1(X, d, \mu)\right\| \geq C_2[d(x_1, x_2)]^{s/q-1}. \tag{3.3}$$

Лемма 3.2. *Пусть s-однородные метрические пространства (X, d) и (Y, ρ) регулярны. Если $s < q \leq p < \infty$ и отображение $\varphi : (X, d) \to (Y, \rho)$ индуцирует при замене переменной ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \to S_q^1(X, d, \mu), \quad \|\varphi^*\| < \infty,$$

то существует совпадающее почти всюду с φ такое гёльдерово отображение ψ, что

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq C_0[d(x_1, x_2)]^\gamma, \quad \text{где } \gamma = \frac{p(q-s)}{q(p-s)} \leq 1. \tag{3.4}$$

Доказательство. Согласно лемме 3.1 отображение φ принадлежит $\mathbb{M}_q^1(X, Y)$ и по лемме 2.4 существует непрерывное отображение ψ, совпадающее с отображением φ почти всюду. Поскольку для всякой функции $u \in S_p^1(Y, \rho, \nu)$ функции $u \circ \varphi$ и $u \circ \psi$ совпадают почти всюду, т. е. принадлежат одному классу эквивалентности, то отображение ψ по правилу $\psi^* u = u \circ \psi$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\psi^* = \varphi^*$. При этом для всякой непрерывной функции $u \in S_p^1(Y, \rho, \nu)$ функция $\psi^* u$ непрерывна.

Пусть $x_1, x_2 \in X$, $\psi(x_1) = a$, $\psi(x_2) = b$ и $\rho(a, b) = r > 0$. Рассмотрим функцию $v = h_{a,r}$, принадлежащую пространству $S_p^1(Y, \rho, \nu)$. Функция $u = \psi^* v$ принадлежит $S_q^1(X, d, \mu)$ и непрерывна, при этом

$$u(x_1) = v(\psi(x_1)) = h_{a,r}(a) = 1, \quad u(x_2) = v(\psi(x_2)) = h_{a,r}(b) = 0.$$

Используя оценки (3.2) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned} C_2[d(x_1, x_2)]^{s/q-1} \leq \left\|u \mid S_q^1(X, d, \mu)\right\| &\leq \|\psi^*\| \left\|h_{a,r} \mid S_p^1(Y, \rho, \nu)\right\| \\ &\leq \|\psi^*\| C_1 r^{s/p-1} \leq K_2 \|\psi^*\| [\rho(\psi(x_1), \psi(x_2))]^{s/p-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $s/p - 1 < 0$ и $s/q - 1 < 0$, для отображения ψ выполняется оценка

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2) \leq C_0[d(x_1, x_2)]^\gamma. \quad \square$$

Следствие 3.3. *Рассмотрим регулярные s-однородные метрические пространства (X, d) и (Y, ρ). Если $s < p < \infty$ и отображение $\varphi : (X, d) \to (Y, \rho)$ индуцирует при замене переменной ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \to S_p^1(X, d, \mu),$$

то существует совпадающее почти всюду с φ липшицево отображение ψ, обладающее N-свойством Лузина.

Доказательство. Существование отображения ψ и его липшицевость являются следствием леммы 3.2 при $q = p$.

Поскольку метрические пространства s-однородны, меры шаров одинакового радиуса $\overline{B(x,R)} \subset X$ и $\overline{B(y,R)} \subset Y$ сравнимы, в частности,

$$\nu(\overline{B(y,R)}) \leq C_1 \mu(\overline{B(x,R)}), \quad \mu(\overline{B(x,Kr)}) \leq C_2 K^s \mu(\overline{B(x,r)}).$$

Рассмотрим произвольное открытое множество $U \subset X$. Для каждой точки $x \in U$ существует замкнутый шар $\overline{B_x} = \overline{B(x,r_x)} \subset U$. Семейство таких шаров $\mathscr{B} = \{B_x\}$ образует покрытие множества U и согласно лемме Витали о покрытии существует такой счетный набор непересекающихся шаров $\overline{B(x_k,r_k)} \in \mathscr{B}$, что

$$U \subset \bigcup_k \overline{B(x_k, 5r_k)}.$$

Пусть $y_k = \psi(x_k)$. Для отображения ψ выполняется неравенство

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2) \leq C_0[d(x_1,x_2)],$$

поэтому множество $\psi(\overline{B(x_k,5r_k)})$ принадлежит замкнутому шару $\overline{B(y_k,R_k)}$, где $R_k = C_0 5 r_k$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\nu(\psi(U)) \leq \nu\Big(\bigcup_k \overline{B(y_k,R_k)}\Big) \leq \sum_k \nu(\overline{B(y_k,R_k)}) \leq C_1 \sum_k \mu(\overline{B(x_k,R_k)}) \\ \leq C_1 C_2 5^s C_0^s \sum_k \mu(\overline{B(x_k,r_k)}) \leq C_3 \mu(U).\end{aligned}$$

В силу регулярности меры μ для всякого множества нулевой меры $E \subset X$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество U, что $E \subset U$ и $\mu(U) < \varepsilon$. Очевидным следствием оценки искажения меры открытых множеств является равенство $\nu(\psi(E)) = 0$, что и означает выполнение N-свойства Лузина. $\square$

Для отображений, индуцирующих ограниченные операторы композиции в пространствах M_p^1 при показателях суммируемости, меньших «размерности» метрического пространства, удается получить оценку меры прообраза шара.

Нам потребуется оценка нормы еще одной пробной функции Пусть $a \in Y$, $0 < 2r < \operatorname{diam}(Y)$. Рассмотрим функцию

$$H_{a,r}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho(a,y) \leq r, \\ \frac{2r - \rho(a,y)}{r}, & \text{если } r \leq \rho(a,y) \leq 2r, \\ 0, & \text{если } \rho(a,y) > 2r. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция

$$G_{a,r}(y) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{если } \rho(a,y) \leq 2r, \\ 0, & \text{если } \rho(a,y) > 2r, \end{cases}$$

является допустимой для функции $H_{a,r}$.

Учитывая s-однородность пространства (Y,ρ), получаем

$$\begin{aligned}\big\|H_{a,r} \mid M_p^1(Y,\rho,\nu)\big\| \leq \|H_{a,r} \mid L_p(Y,\nu)\| + \|G_{a,r} \mid L_p(Y,\nu)\| \\ \leq [\nu(B(a,2r))]^{1/p} + \frac{1}{r}[\nu(B(a,2r))]^{1/p} \leq C_1[\nu(B(a,r))]^{1/p-1/s}. \quad (3.5)\end{aligned}$$

Лемма 3.4. *Пусть s-однородные метрические пространства (X,d) с мерой μ и (Y,ρ) с мерой ν регулярны. Если $1<q\le p<s$ и гомеоморфизм $\varphi:(X,d)\to(Y,\rho)$ индуцирует при замене переменной ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^*: M^1_p(Y,\rho,\nu)\to M^1_q(X,d,\mu),\quad \|\varphi^*\|<\infty,$$

то при $2r<\operatorname{diam}Y$ для всякого шара $B(a,r)\subset Y$ выполняется оценка

$$\mu(\varphi^{-1}(B(a,r)))\le K_0[\nu(B(a,r))]^\sigma,\quad \text{где } \sigma=\frac{q(s-p)}{p(s-q)}<1. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $2r<\operatorname{diam}Y$. Рассмотрим шар $B(a,r)\subset Y$ и соответствующую пробную функцию $H_{a,r}$. Поскольку отображение φ является гомеоморфизмом, то $v(x)=\varphi^*H_{a,r}(x)=H_{a,r}(\varphi(x))=1$ на множестве $\varphi^{-1}(B(a,r))$.

Согласно лемме 1.1 при $1<q<s$ пространство $M^1_q(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство Лебега $L_\omega(X,\mu)$, где $1/\omega=1/q-1/s$. Учитывая оценку (3.5), получаем

$$\begin{aligned}[\mu(\varphi^{-1}(B(a,r)))]^{1/\omega}&\le\|v\mid L_\omega(X,\mu)\|^{1/\omega}\le C_2\big\|\varphi^*H_{a,r}\mid M^1_q(X,d,\mu)\big\|^{1/q}\\&\le C_2\|\varphi^*\|\big\|H_{a,r}\mid M^1_p(Y,\rho,\nu)\big\|^{1/p}\le C_3[\nu(B(a,r))]^{1/p-1/s}.\end{aligned}$$

Простой пересчет показателей приводит к оценке (3.6). □

Замечание. Поскольку диаметры множеств X и Y конечны, $\mu(X)<\infty$ и $\nu(Y)<\infty$, то оценки лемм 3.2 и 3.4 представляют интерес для малых значений $d(x_1,x_2)$ и малых шаров, так как при больших размерах они очевидно выполняются.

Чтобы получить достаточные условия для оператора композиции, действующего из пространства $S^1_p(Y,\rho,\nu)$ в пространство $S^1_q(X,d,\mu)$, нам потребуются некоторые простые конструкции из теории меры.

Рассмотрим полные метрические пространства (X,d) с мерой μ, (Y,ρ) с мерой ν и отображение $\varphi:(X,d)\to(Y,\rho)$. Предположим, что отображение φ является гомеоморфизмом и обладает N-свойством Лузина (если $\mu(E)=0$, то $\nu(\varphi(E))=0$). В этом случае мера ω, определяемая равенством $\omega(E)=\nu(\varphi(E))$, абсолютно непрерывна относительно меры μ. Согласно теореме Радона — Никодима существует такая суммируемая по μ функция J, что

$$\int\limits_E J(x)\,d\mu=\omega(E)=\nu(\varphi(E))$$

для всякого измеримого множества $E\subset X$.

Докажем подходящую для наших целей формулу замены переменной в интеграле Лебега. Пусть неотрицательная функция u принадлежит $L_1(Y,\nu)$. Для измеримой функции $h(x)=u(\varphi(x))$ воспользуемся разложением по характеристическим функциям измеримых множеств — теорема 7 в п. 1.1.2 из [13]:

$$h(x)=\sum_{k=1}^\infty\frac1k\chi_{E_k}(x).$$

Если $y=\varphi(x)$, то $y\in\varphi(E_k)$ тогда и только тогда, когда $x\in E_k$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^\infty\frac1k\chi_{\varphi(E_k)}(y)=\sum_{k=1}^\infty\frac1k\chi_{E_k}(x)=h(x)=u(\varphi(x))=u(y).$$

Согласно теореме о монотонной сходимости

$$\int\limits_X u(\varphi(x))J(x)\,d\mu = \int\limits_X h(x)J(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int\limits_X \chi_{E_k}(x)J(x)\,d\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int\limits_{E_k} J(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\nu(\varphi(E_k)) = \int\limits_Y \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\chi_{\varphi(E_k)}(y)\,d\nu = \int\limits_Y u(y)\,d\nu. \tag{3.7}$$

С отображением φ свяжем две функции, характеризующие искажение метрики и меры,

$$\Delta(x) = \sup_{z\in X}\frac{\rho(\varphi(x),\varphi(z))}{d(x,z)}, \quad H(x) = \frac{\Delta(x)}{(J(x))^{1/p}}.$$

Теорема 3.5. *Рассмотрим полные метрические пространства (X,d) с мерой μ, (Y,ρ) с мерой ν и отображение $\varphi : (X,d) \to (Y,\rho)$. Если выполнены следующие условия:*

1) *отображение φ является гомеоморфизмом и обладает N-свойством Лузина;*

2) *функция H принадлежит $L_\sigma(X,\mu)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$,*

то при $1 \le q \le p$ отображение φ индуцирует по правилу $\varphi^*u = u\circ\varphi$ ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : S^1_p(Y,\rho,\nu) \to S^1_q(X,d,\mu).$$

Доказательство. Если $x,z \in X$ и $x \ne z$, то в силу гомеоморфности отображения φ

$$\Delta(x) \ge \frac{\rho(\varphi(x),\varphi(z))}{\operatorname{diam} X} > 0.$$

Поэтому из второго условия следует, что $J(x) > 0$ почти всюду в X. Если $A \subset X$ и $\mu(A) > 0$, то

$$\nu(\varphi(A)) = \int\limits_A J(x)\,d\mu > 0.$$

Следовательно, гомеоморфизм φ обладает N^{-1}-свойством Лузина (если $\nu(B) = 0$, то $\mu(\varphi^{-1}(B)) = 0$).

Пусть $u \in S^1_p(Y,\rho,\nu)$. Тогда существуют такое множество $D \subset Y$ и такая допустимая функция $g \in L_p(Y,\nu)$, что $\nu(D) = 0$ и

$$|u(y_1) - u(y_2)| \le \rho(y_1,y_2)(g(y_1) + g(y_2))$$

для всех $y_1, y_2 \in Y \setminus D$.

Пусть $v(x) = (\varphi^*u)(x) = u(\varphi(x))$, $h(x) = g(\varphi(x))$, $E = \varphi^{-1}(D)$, $x_1 = \varphi^{-1}(y_1)$, $x_2 = \varphi^{-1}(y_2)$.

Поскольку отображение φ обладает N^{-1}-свойством Лузина, то $\mu(E) = 0$ и для точек $x_1, x_2 \in X \setminus E$ выполняется оценка

$$|v(x_1) - v(x_2)| = |u(\varphi(x_1)) - u(\varphi(x_2))| \le \rho(\varphi(x_1),\varphi(x_2))[g(\varphi(x_1)) + g(\varphi(x_2))]$$

$$= d(x_1,x_2)\frac{\rho(\varphi(x_1),\varphi(x_2))}{d(x_1,x_2)}(h(x_1)+h(x_2)) \le d(x_1,x_2)(\Delta(x_1)h(x_1)+\Delta(x_2)h(x_2)).$$

Таким образом, функция $\Delta(x)h(x)$ является допустимой для функции $v(x)$. При $1 \le q < p$, используя неравенство Гёльдера и формулу замены переменной (3.7), оценим норму допустимой функции в пространстве Лебега $L_q(X,\mu)$:

$$\int\limits_X [\Delta(x)h(x)]^q \, d\mu = \int\limits_X [g(\varphi(x))J^{1/p}(x)]^q \left(\frac{\Delta(x)}{J^{1/p}(x)}\right)^q d\mu$$

$$\le \Bigg(\int\limits_X [g(\varphi(x))]^p J(x)\, d\mu\Bigg)^{q/p} \Bigg(\int\limits_X H^\sigma(x)\, d\mu\Bigg)^{(p-q)/p} \le C_0 \Bigg(\int\limits_Y g^p(y)\, d\nu\Bigg)^{q/p} < \infty.$$

Это означает, что функция $\Delta(x)h(x)$ принадлежит $L_q(X,\mu)$, а функция $v = v \circ u = \varphi^* u$ принадлежит пространству $S^1_q(X,d,\mu)$ и $\|\varphi^*\| \le C_0^{1/q}$.

При $q = p$ оценка получается еще проще, без использования неравенства Гёльдера. $\square$

Замечание. Простые достаточные условия в теореме 3.5 похожи на условия, использованные С. К. Водопьяновым и его учениками при изучении операторов композиции в пространствах Соболева на группах Карно, к примеру, см. [14, 15]. Основное отличие заключается в замене нормы дифференциала отображения на функцию $\Delta(x)$, что связано со спецификой определения допустимой функции в пространствах $M^1_p(X,d,\mu)$.

Поскольку

$$\int\limits_X J(x)\, d\mu = \nu(Y) < \infty,$$

то $J(x) < \infty$ почти всюду, а из принадлежности функции H пространству $L_\sigma(X,\mu)$ следует, что и $\Delta(x) < \infty$ почти всюду.

Пусть при $\varepsilon > 0$ множество E_ε состоит из всех точек $x \in X$, для которых найдется такая точка $z \in X$, что $d(x,z) \ge \varepsilon$ и $2\rho(\varphi(x),\varphi(z)) \ge d(x,z)\Delta(x)$. При $x \in E_\varepsilon$

$$\Delta(x) \le \frac{2\,\mathrm{diam}(Y)}{\varepsilon} < \infty,$$

поэтому при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ значения функции $\Delta(x)$ на множестве E_ε не влияют на сходимость соответствующего интеграла. Вопрос о сходимости интеграла во втором условии зависит от локальных свойств отображения φ в сколь угодно малой окрестности множества нулевой меры, на котором функция $\Delta(x)$ может быть равна бесконечности.

Согласно следствию 3.3 на s-однородных пространствах при $q = p > s$ можно изначально предполагать, что отображение φ липшицево и обладает N-свойством Лузина, а функция $\Delta(x)$ ограничена.

Наличие шкалы пространств S^α_p позволяет рассматривать операторы композиции со значениями в гёльдеровых классах, т. е. операторы

$$\varphi^* : S^1_p(Y,\rho,\nu) \to S^\alpha_q(X,d,\mu). \tag{3.8}$$

Практически дословно повторяя доказательство леммы 3.1, легко показать, что отображение $\varphi : X \to Y$, индуцирующее при замене переменной ограниченный оператор (3.8), принадлежат классу $\mathbb{M}^\alpha_q(X,Y)$.

С точки зрения выполнения соответствующих теорем вложения оператор композиции не может улучшить свойства сразу всего класса функций. Это накладывает определенные ограничения на выбор показателей α и q. Пусть

$\alpha \in (0,1)$ и $1/\tau = 1/p - (1-\alpha)/s$. Согласно лемме 1.4 при $q \le \tau$ пространство $M_p^1(X,d,\mu)$ вложено в пространство $M_q^\alpha(X,d,\mu)$. Заметим, что при $p > s$ будет $\tau > s/\alpha$, поэтому существуют такие значения q, что $s/\alpha < q \le \tau$.

Доказательство следующего утверждения вполне аналогично доказательству леммы 3.2.

Лемма 3.6. *Пусть s-однородные метрические пространства (X,d) и (Y,ρ) регулярны. Если $s < p < \infty, s/\alpha < q \le \tau$ и отображение $\varphi : (X,d) \to (Y,\rho)$ индуцирует при замене переменной ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : S_p^1(Y,\rho,\nu) \to S_q^\alpha(X,d,\mu), \quad \|\varphi^*\| < \infty,$$

то существует совпадающее почти всюду с φ такое гёльдерово отображение ψ, что

$$\rho(\psi(x_1),\psi(x_2)) \le C_0[d(x_1,x_2)]^\lambda, \quad \text{где } \lambda = \frac{p(\alpha q - s)}{q(p-s)} \le 1. \tag{3.9}$$

Доказательство. Поскольку φ принадлежит классу $\mathbb{M}_q^\alpha(X,Y)$ и $\alpha q > s$, согласно лемме 2.5 существует эквивалентное φ непрерывное отображение ψ. При этом оператор композиции $\psi^* = \varphi^*$.

Пусть $x_1, x_2 \in X, \psi(x_1) = a, \psi(x_2) = b$ и $\rho(a,b) = r > 0$. Рассмотрим функцию $v = h_{a,r}$, принадлежащую пространству $S_p^1(Y,\rho,\nu)$. Функция $u = \psi^* v$ принадлежит $S_q^1(X,d,\mu)$ и непрерывна, при этом

$$u(x_1) = v(\psi(x_1)) = h_{a,r}(a) = 1, \quad u(x_2) = v(\psi(x_2)) = h_{a,r}(b) = 0.$$

Поскольку $\alpha q > s$, непрерывная функция u принадлежит $S_q^\alpha(X,d,\mu)$ и $|u(x_1) - u(x_2)| \ge 1$, то согласно лемме 1.3

$$\left\| u \mid S_q^\alpha(X,d,\mu) \right\| \ge C_2[d(x_1,x_2)]^{s/q-\alpha}. \tag{3.10}$$

Используя оценки (3.2) и (3.10), получаем

$$\begin{aligned} C_2[d(x_1,x_2)]^{s/q-\alpha} &\le \left\| u \mid S_q^\alpha(X,d,\mu) \right\| \le \|\psi^*\| \left\| h_{a,r} \mid S_p^1(Y,\rho,\nu) \right\| \\ &\le \|\psi^*\| C_1 r^{s/p-1} \le K_2 \|\psi^*\| [\rho(\psi(x_1),\psi(x_2))]^{s/p-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $s/p - 1 < 0$ и $s/q - \alpha < 0$, то для отображения ψ выполняется оценка

$$\rho(\psi(x_1),\psi(x_2) \le C_0[d(x_1,x_2)]^\lambda.$$

Учитывая неравенство $q \le \tau$ легко проверить, что $\lambda \le 1$. $\square$

Заметим, что при $q = \tau$ будет $\lambda = 1$, т. е. отображение φ липшицево.

Если отображение $\varphi : (X,d) \to (Y,\rho)$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : S_p^1(Y,\rho,\nu) \to S_\omega^1(X,d,\mu), \quad s < \omega \le p,$$

то по лемме 3.2 показатель гёльдеровости γ равен $\frac{p(\omega-s)}{\omega(p-s)}$.

Согласно лемме 1.4 пространство $M_\omega^1(X,d,\mu)$ вложено в $M_q^\alpha(X,d,\mu)$, если $1/q = 1/\omega - (1-\alpha)/s$. Следовательно, можно рассматривать оператор φ^* как оператор композиции, действующий из пространства $S_p^1(Y,\rho,\nu)$ в пространство $S_q^\alpha(X,d,\mu)$.

Выражая ω через q и подставляя в равенство для показателя γ, получаем то же самое значение, что и в лемме 3.6:

$$\gamma = \frac{p(\alpha q - s)}{q(p - s)}.$$

В работе установлены лишь некоторые свойства отображений, индуцирующих операторы композиции в пространствах соболевского типа. Помимо рассмотренных постановок задачи на метрических пространствах возможны и другие ситуации, к примеру, случай, когда меры, определенные в пространствах (X, d) и (Y, ρ), имеют различные порядки регулярности. Для более полного рассмотрения вопроса требуются дополнительные исследования и новые подходы к изучению свойств функций и отображений, определенных на метрических пространствах с мерой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Analysis. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
2. *Романов А. С.* О следах функций, принадлежащих обобщенным классам соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 848–866.
3. *Hajłasz P., Martio O.* Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains // J. Funct. Anal. 1997. V. 143. P. 221–246.
4. *Романов А. С.* Отображения метрических пространств, связанные с функциональными классами соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 794–814.
5. *Романов А. С.* О непрерывности функций соболевского типа на однородных метрических пространствах // Сиб. электрон. мат. изв. 2022. Т. 19, № 2. С. 460–483.
6. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
7. *Korevaar N. J., Schoen R. M.* Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets // Comm. Anal. Geom. 1993. V. 1, N 4. P. 561–659.
8. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. II // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 855–870.
9. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W^1_n и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.
10. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 768–773.
11. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1001–1039.
12. *Vodop'yanov S. K.* Composition operators on Sobolev spaces // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 327–342.
13. *Evans L. C., Gariepy R. F.* Measure theory and fine properties of functions. New York: CRC Press, 1992.
14. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.
15. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.

Поступила в редакцию 7 февраля 2025 г.
После доработки 20 августа 2025 г.
Принята к публикации 27 августа 2025 г.

Романов Александр Сергеевич (ORCID 0000-0001-7906-3933)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru