

МНОЖЕСТВЕННОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ
СЕРИЙ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ТРЕТЬЕЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С БОЛЬШИМ
ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ РОБЭНА

С. А. Назаров

Аннотация. Изучается асимптотика собственных чисел и функции спектральной задачи для оператора Лапласа в плоской области с третьим краевым условием на границе, причем (переменный) коэффициент Робэна в нем отрицательный и большой. Приведены известные и новые асимптотические формулы для собственных чисел, как отрицательных, так и положительных, и для собственных функций, выявляющие разнообразные способы их локализации. Помимо формального асимптотического анализа и краткого обзора предшествующих результатов изложена процедура обоснования асимптотики в неизученном ранее случае неизменного коэффициента Робэна и глобального вырожденного максимума кривизны границы, реализующегося в нескольких точках.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.610

Ключевые слова: третья краевая задача, большой отрицательный коэффициент Робэна, асимптотика собственных чисел, локализация собственных функций, множественность асимптотических серий.

Посвящаю статью Семёну Самсоновичу Кутателадзе
с благодарностью за подарок¹⁾ в виде слова «околовершинная».

1. Постановки задач. Пусть Ω — область на плоскости, ограниченная простым замкнутым гладким (класса C^∞ , см. разд. 10, 1°) контуром Γ , в d -окрестности \mathcal{V}_d которого введем систему криволинейных координат (n, s) , где $d > 0$, s — длина дуги на контуре, измеряемая против часовой стрелки, а n — ориентированное расстояние до него, причем $n < 0$ на $\Omega \cap \mathcal{V}_d$. Собственные числа краевой задачи

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\partial_n u^\varepsilon(x) - \varepsilon^{-1} a(s) u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (2)$$

или соответствующего интегрального тождества [1]

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla \psi^\varepsilon)_\Omega - \varepsilon^{-1} (a u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Gamma = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega \quad \forall \psi^\varepsilon \in H^1(\Omega) \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН).

¹⁾Семён Самсонович подсказал, как исправить первоначально корявое название статьи [29].

образуют монотонную неограниченную последовательность

$$\lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leq \lambda_3^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_p^\varepsilon \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon \in (0, 1]$ — малый параметр, $\nabla = \text{grad}$, Δ — оператор Лапласа, ∂_n — производная вдоль внешней нормали, $(\cdot, \cdot)_\Omega$ и $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ — скалярные произведения в пространствах Лебега $L^2(\Omega)$ и $L^2(\Gamma)$, $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева, а $a \in C^\infty(\Gamma)$ — положительный (вообще говоря, переменный) коэффициент, часто называемый коэффициентом Робэна (после добавления знака минус — на это далее не обращаем внимания). Собственные функции $u_p^\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$ сформулированной задачи подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(u_p^\varepsilon, u_q^\varepsilon)_\Omega = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера, а $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — натуральный ряд.

Основная цель работы — указать асимптотику собственных пар {число; функция} задачи (1), (2) при стремлении малого параметра $\varepsilon > 0$ к нулю. Асимптотическое строение ее собственных чисел из нижнего диапазона спектра давно привлекает внимание математиков и далее при рассмотрении разных ситуаций будут перечислены публикации с основными результатами в этом направлении, однако пристальное внимание уделяется двум вопросам: во-первых, обоснованию асимптотических формул в так называемом «вырожденном» случае (разд. 7–9) и, во-вторых, выявлению множественности серий собственных чисел с «устойчивыми асимптотиками» (разд. 6). Схема обоснования асимптотики, отличающаяся от опубликованных ранее для задач с большим отрицательным коэффициентом Робэна и легко приспособляемая для других рассмотренных в работе случаев, — основное техническое нововведение, так как сами алгоритмы построения асимптотики известны с прошлого века и достаточно нетрудоемки.

Сформировать асимптотику положительных членов последовательности (4) совсем несложно (разд. 5), однако билинейная форма из левой части интегрального тождества (3) не является положительной, а значит, в спектре имеются и отрицательные собственные числа — именно им и отвечают собственные функции, которым характерны различные типы локализации. Приведем предварительные и краткие пояснения.

Оператор Лапласа в криволинейных координатах принимает вид

$$\Delta = \mathcal{J}(n, s)^{-1} \partial_n \mathcal{J}(n, s) \partial_n + \mathcal{J}(n, s)^{-1} \partial_s \mathcal{J}(n, s)^{-1} \partial_s, \quad (6)$$

где $\mathcal{J}(n, s) = 1 + n\kappa(s)$ — якобиан, а κ — кривизна контура Γ , вообще говоря, знакопеременная, т. е. отрицательная на вогнутых дугах. Именно поведение функций a и κ определяет асимптотическое строение собственных чисел и разномасштабные эффекты локализации. На множестве $\Omega \cap \mathcal{V}_d$ вводится растянутая нормальная координата $n \mapsto \zeta = -\varepsilon^{-1}n \geq 0$, придающая дифференциальному оператору (6) расщепление

$$\Delta = \varepsilon^{-2} \partial_\zeta^2 - \varepsilon^{-1} \kappa(s) \partial_\zeta + \partial_s^2 - \zeta \kappa(s)^2 \partial_\zeta + \dots. \quad (7)$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, которыми можно пренебречь при формальном асимптотическом анализе. Кроме того, замена $\lambda^\varepsilon \mapsto \varepsilon^{-2}\mu$ спектрального параметра, «заморозка» коэффициентов в какой-либо точке $s_0 \in \Gamma$ и переход к $\varepsilon = 0$ преобразуют соотношения (1), (2) в краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\partial_\zeta^2 w(\zeta) = \mu w(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty), \quad -\partial_\zeta w(0) = a(s_0)w(0), \quad (8)$$

у которой имеется собственная пара

$$\{\mu_0 = -a(s_0)^2; w_0(\zeta) = e^{-a(s_0)\zeta}\} \in \mathbb{R}_- \times H^1(\mathbb{R}_+), \quad (9)$$

характеризующаяся экспоненциальной скоростью затухания функции при $\zeta \rightarrow +\infty$ или при удалении от границы вдоль внутренней нормали. Вместе с тем при вариации точки s_0 величина μ_0 может изменяться, и это обстоятельство вынуждает каким-либо способом произвести еще одно растяжение координаты

$$s \mapsto \eta = \varepsilon^{-\theta}(s - s_0) \in \mathbb{R} \quad (10)$$

с сопутствующим выбором показателя $\theta > 0$, обеспечивающим разные темпы концентрации собственных функций u_k^ε около точки s_0 (разд. 4, 5 и 7). При этом, как окажется, в качестве s_0 выступают точки экстремумов коэффициента Робэна a и кривизны κ , а наличие нескольких таких точек вызывает множественность асимптотических серий отрицательных собственных чисел $\{\lambda_{m_k^\varepsilon}^\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$ в последовательности (4) в дополнение к уже упоминавшейся серии положительных собственных чисел, не провоцирующих эффект локализации.

Величина показателя θ зависит от многих обстоятельств и, в частности, по-стоянство коэффициента $a(s)$ при $s \in \Gamma$ вовсе не обеспечивает локализацию собственных функций около всего контура (разд. 2, 3). Показатель определяется и качеством экстремума, а в разд. 7–9 подробно исследуется случай вырожденных экстремумов, ранее не рассмотренный в литературе. Наконец, в разд. 10 перечислены легкодоступные обобщения и оставленные открытыми вопросы.

2. Локализация около всей границы.

Пусть сначала Ω — круг и

$$a(s) = a_0, \quad \text{причем, разумеется, } \kappa(s) = \kappa_0 > 0. \quad (11)$$

Кроме того, $n = r$ и $s = R\varphi$ — полярные координаты и $\Gamma = \{x : |x| = R\}$ — окружность радиусом $R = \kappa_0^{-1} > 0$. Подставим в задачу (1), (2) расщепление (7) и асимптотические ансатзы

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mu_0 + \varepsilon^{-1}\mu' + \mu'' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (12)$$

$$u^\varepsilon(x) = \chi_\Omega(x)(v(s)(w_0(\zeta) + \varepsilon w'(\zeta)) + w''(\zeta, s)) + \tilde{u}^\varepsilon(x), \quad (13)$$

где $\chi_\Omega \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \cap \mathcal{V}_d)$ — срезающая функция, зависящая только от переменной n ,

$$\chi_\Omega = 1 \text{ при } n \geq -d/2 \text{ и } \chi_\Omega = 0 \text{ при } n \leq -d. \quad (14)$$

В результате сбора множителей при одинаковых степенях малого параметра ε получим задачу (8) для главных асимптотических членов и следующую для первых поправок:

$$-\partial_\zeta^2 w'(\zeta) - \mu_0 w'(\zeta) = \mu' w_0(\zeta) - \kappa_0 \partial_\zeta w_0(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}_+, \quad -\partial_\zeta w'(0) = a_0 w'(0). \quad (15)$$

Поскольку решение определено с точностью до слагаемого $c w_0$, можно считать, что

$$\mu' = -\kappa_0 a_0 \quad \text{и} \quad w'(\zeta) = 0. \quad (16)$$

Следовательно, задача для вторых поправок выглядит так:

$$\begin{aligned} & -\partial_\zeta^2 w''(\zeta, s) - \mu_0 w''(\zeta, s) \\ & = f(\zeta, s) := \mu'' w_0(\zeta) v(s) + w_0(\zeta) \partial_s^2 v(s) - \kappa_0^2 \zeta \partial_\zeta w_0(\zeta) v(s), \quad \zeta \in \mathbb{R}_+, \\ & -\partial_\zeta w''(0) = a_0 w''(0). \end{aligned} \quad (17)$$

Условием ее разрешимости (взаимная ортогональность функций f и w_0 в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$) служит простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\partial_s^2 v(s) = \sigma v(s), \quad s \in \Gamma,$$

которое порождает собственные пары $\{\sigma_p; v_p\}$, $p \in \mathbb{N}$, заданные формулами

$$\{0; 2^{-1/2}\} \text{ при } p = 1,$$

$$\{(2\pi\kappa_0 q)^2; \sin(2\pi\kappa_0 s)\}, \quad \{(2\pi\kappa_0 q)^2; \cos(2\pi\kappa_0 s)\} \text{ при } p = 2q, 2q+1, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Вторая поправка в представлении (12) собственного числа λ_p^ε имеет вид $\mu_p'' = \sigma_p - \kappa_0^2/2$ (первые два асимптотических члена не зависят от p ; см. первые равенства в списках (9) и (16)), а анзац (13) для собственной функции u_p^ε начинается с произведения $c_p v_p(s) w_0(\zeta)$, за которым следует нуль и решение ставшей разрешимой задачи (17).

Алгоритм построения асимптотики мало чем отличается от классического метода Вишника — Люстерника [2–4]. Обоснование асимптотики также приводится при помощи известных приемов (см., например, [5, 6]), причем благодаря симметрии круга Ω двукратные собственные числа можно расцепить искусственными краевыми условиями на диаметре круга. Собственные функции u_p^ε , нормированные²⁾ равенством (5), можно зафиксировать так, чтобы выполнялись оценки

$$|\tilde{\lambda}_p^\varepsilon| \leq c_p \varepsilon^{1/2} \text{ и } \varepsilon \|u_p^\varepsilon - u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| + \|u_p^\varepsilon - u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \leq C_p \varepsilon^{1/2} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p], \quad (18)$$

где ε_p и c_p , C_p — положительные величины, зависящие от номера $p \in \mathbb{N}$; кроме того,

$$u_{p0}^\varepsilon(x) = (4a_0 \varepsilon)^{-1/2} \kappa_0^{1/2} \chi_\Omega(x) v_p(s) w_0(-\varepsilon^{-1} n).$$

3. Локализация около точки. Первый случай.

Пусть теперь

$$a(s) = a_0, \quad \kappa(s) = \kappa_0 - K(s - s_0)^2 + O(|s - s_0|^3), \quad K > 0 \text{ и } \kappa(s) < \kappa_0 \text{ при } s \in \Gamma \setminus \{s_0\}. \quad (19)$$

Иными словами, коэффициент Робэна постоянен, а кривизна имеет строгий (т. е. невырожденный) глобальный максимум в одной точке $s_0 \in \Gamma$. Тогда, как известно из множества публикаций (см. ссылки ниже, но также далее разд. 7 и, в частности, формулу (42)), следует ввести растянутую координату (10) с показателем $\theta = 1/4$ и принять такие асимптотические анзацы для собственных пар задачи (1), (2):

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \mu_0 + \varepsilon^{-1} \mu' + \varepsilon^{-1/2} \mu'' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (20)$$

$$u^\varepsilon(x) = \chi_\Omega(x) \chi_\Gamma(x) (v(\eta) (w_0(\zeta) + \varepsilon w'(\zeta)) + \varepsilon^{3/2} w''(\zeta, \eta)) + \tilde{u}^\varepsilon(x). \quad (21)$$

Здесь помимо срезки (14) присутствует срезающая функция $\chi_\Gamma \in C^\infty(\Gamma)$, равная единице в фиксированной окрестности точки s_0 и нулю на расстоянии от нее. Числа μ_0 , μ' и функции w_0 , w' определены прежними формулами (9), (16), однако при этом из-за переменности кривизны в дифференциальном уравнении осталась невязка

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} a_0 (\kappa_0 - \kappa(s)) w_0(\zeta) &= \varepsilon^{-1} a_0 (K(s - s_0)^2 + O(|s - s_0|^3)) \\ &= \varepsilon^{-1/2} a_0 K \eta^2 + O(\varepsilon^{-1/4} |\eta|^3). \end{aligned} \quad (22)$$

²⁾ В формальных конструкциях на нормировку собственных функций внимание не обращаем и потому не пишем номер собственной пары в асимптотических анзацах.

Сбор множителей при $\varepsilon^{-1/2}$ в формулах $\varepsilon^{3/2}\partial_n^2 w''(\zeta) = \varepsilon^{-1/2}\partial_\zeta^2 w''(\zeta)$, $\partial_s^2 v(\eta) = \varepsilon^{-1/2}\partial_\eta^2 v(\eta)$ и соотношении (22) приводит к такой задаче для вторых поправочных членов в анзатах (20) и (21):

$$\begin{aligned} -\partial_\zeta^2 w''(\zeta, \eta) - \mu_0 w''(\zeta, \eta) &= ((\mu'' - a_0 K \eta^2)v(\eta) + \partial_\eta^2 v(\eta))w_0(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}_+, \quad (23) \\ -\partial_\zeta w''(0, \eta) &= a_0 w''(0, \eta). \end{aligned}$$

Условие разрешимости задачи (23) сводится к уравнению гармонического осциллятора [7]

$$-\partial_\eta^2 V(\eta) + A^2 \eta^2 V(\eta) = M V(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

с дискретным спектром $\{M_k = A(2k - 1)\}_{k \in \mathbb{N}}$ и параметром

$$A = \sqrt{a_0 K}. \quad (25)$$

Соответствующие собственные функции V_k , нормированные в $L^2(\mathbb{R})$, затухают на бесконечности как $O(|\eta|^{k-1} e^{-A\eta^2/2})$, — громоздкие выражения для них не понадобятся (см., например, [7]).

Итак, вторые поправки в асимптотическом анзате (20) принимают вид

$$\mu_k'' = (2k - 1)\sqrt{a_0 K}, \quad k \in \mathbb{N},$$

а множителями v_k в анзате (21) служат упомянутые собственные функции V_k обыкновенного дифференциального уравнения (24).

На этом построение формальных асимптотик заканчивается. Зависимость похожих асимптотических конструкций от кривизны и возникновение уравнения гармонического осциллятора были ранее³⁾ замечены в публикации [8] для смешанной краевой задачи в тонкой области со скошенной боковой поверхностью. Сама задача (1), (2) изучалась во многих статьях (см. [9–16] и др.), где поочередно были получены результаты разного свойства: оценка снизу, главный, первый и второй поправочные члены для первого собственного числа, оценки и старшие члены асимптотики всех собственных чисел из низкочастотного диапазона спектра и, наконец, полные асимптотические разложения спектральных пар. Несколько более общая чем (19) ситуация будет обсуждаться и далее, но здесь сформируем известный результат именно для нее: при любом $p \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные ε_p и c_p , C_p , что для остатков в асимптотических анзатах (11) и (12) верны оценки

$$\begin{aligned} |\tilde{\lambda}_p^\varepsilon| &\leq c_p \varepsilon^{-1/4}, \\ \varepsilon \|\nabla_x u_p^\varepsilon - \nabla_x u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| + \|u_p^\varepsilon - u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| &\leq C_p \varepsilon^{1/4} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p], \end{aligned} \quad (26)$$

где при учете нормировки всех собственных функций главный асимптотический член приобретает вид

$$u_{p0}^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-5/8} (2a_0)^{-1/2} \chi_\Gamma(s) \chi_\Omega(x) v_p(\varepsilon^{-1/4}(s - s_0)) w_0(-\varepsilon^{-1} n).$$

4. Локализация около точки. Второй случай. Пусть теперь контур и его кривизна любые, но коэффициент a имеет единственный глобальный строгий максимум в точке $s_0 \in \Gamma$, т. е.

$$a(s) = a_0 - K(s - s_0)^2 + O(|s - s_0|^3), \quad K > 0 \text{ и } a(s) < a_0 \text{ при } s \in \Gamma \setminus \{s_0\}. \quad (27)$$

³⁾Оставляем в стороне многочисленные исследования задач акустики и дифракции.

После замены (10) с показателем $\theta = 1/2$ примем асимптотические анзацы для собственных пар

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \mu_0 + \varepsilon^{-1} \mu' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (28)$$

$$u^\varepsilon(x) = \chi_\Omega(x) \chi_\Gamma(x) (v(\eta) w^0(\zeta, s) + \varepsilon w'(\zeta, \eta)) + \tilde{u}^\varepsilon(x), \quad (29)$$

где $\mu_0 = -a_0^2$, но в сравнении с разд. 3 показатель экспоненциальной функции

$$w^0(\zeta, s) = e^{-a(s)\zeta} \quad (30)$$

зависит от переменной s . Следовательно,

$$\begin{aligned} -\partial_\zeta^2 w^0(\zeta, s) + a_0^2 w^0(\zeta, s) &= e^{-a(s)\zeta} (a_0^2 - a(s)^2) \\ &= e^{-a(s)\zeta} (2a_0 K(s - s_0)^2 + O(|s - s_0|^3)) = \varepsilon e^{-a(s)\zeta} (2a_0 K \eta^2 + O(\varepsilon^{1/2} |\eta|^3)). \end{aligned} \quad (31)$$

Итак, собираем члены порядка ε^{-1} , возникшие в результате подстановки анзацев (28) и (29) в уравнение (1), и выводим похожую на (23) задачу для первых поправочных членов

$$\begin{aligned} -\partial_\zeta^2 w'(\zeta, \eta) - \mu_0 w'(\zeta, \eta) &= ((\mu' - 2a_0 K \eta^2) v(\eta) + \partial_\eta^2 v(\eta)) w_0(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}_+, \\ -\partial_\zeta w'(0, \eta) &= a_0 w'(0, \eta). \end{aligned} \quad (32)$$

Условие ее разрешимости превращается в уравнение гармонического осциллятора (24) с отличающимся от (25) параметром

$$A = \sqrt{2a_0 K}. \quad (33)$$

В результате основной поправкой в асимптотическом анзаце (28) служит собственное число

$$\mu'_k = (2k - 1) \sqrt{2a_0 K}, \quad k \in \mathbb{N},$$

обыкновенного дифференциального уравнения (24), а множителем v_k в анзаце (29) — соответствующая собственная функция V_k .

Представленная выше формальная асимптотика решений задачи (1), (2) в ситуации (27) была выписана в статье [17] среди прочих, однако большое количество работ (см. [18–23] и др.) содержит вполне аналогичные подходы и относится к родственным задачам Дирихле для оператора Лапласа в тонких областях переменного сечения. В этих работах, в частности, помимо главных членов построены полные асимптотические разложения собственных пар и выведены асимптотически точные оценки погрешностей.

Для остатков в представлениях (28) и (29) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |\tilde{\lambda}_p^\varepsilon| &\leq c_p \varepsilon^{-1/4}, \\ \varepsilon \|u_p^\varepsilon - u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| + \|u_p^\varepsilon - u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| &\leq C_p \varepsilon^{1/2} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p], \end{aligned} \quad (34)$$

где положительные величины ε_p и c_p , C_p зависят от номера $p \in \mathbb{N}$ и, кроме того,

$$u_{p0}^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-3/4} (2a_0)^{-1/2} \chi_\Gamma(s) \chi_\Omega(x) v_p(\varepsilon^{-1/2}(s - s_0)) w^0(-\varepsilon^{-1} n, s).$$

Отметим, что поправочные слагаемые из анзацев (29) и (21), (13) не включены в финальные оценки точности (36) и (26), (18) потому, что они (слагаемые) не определены полностью: например, остался произвол sw_0 в выборе решений w' и w'' обеих задач (15) и (17), который удается устраниТЬ лишь путем построения младших асимптотических членов (см. разд. 10, 3°). Соответствующие итерационные процессы известны в полной мере (см. [4, 24, 25] и др.).

5. Положительные собственные числа. Алгоритм построения асимптотики собственных чисел задачи (1), (2) на положительной полуоси \mathbb{R}_+ элементарен, причем единственными препятствиями в интерпретации возмущения как регулярного (ср. монографию [5]) — малый параметр и «неправильный» знак (см. статью [3]) при старшей производной в преобразованном краевом условии (2)

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon a(s)^{-1} \partial_n u^\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma. \quad (35)$$

Приведем краткие пояснения для κ_ℓ -кратного собственного числа β_ℓ задачи Дирихле

$$-\Delta v(x) = \beta v(x), \quad x \in \Omega, \quad v(x) = 0, \quad x \in \Gamma;$$

иными словами, считаем, что $\beta_{\ell-1} < \beta_\ell = \dots = \beta_{\ell+\kappa_\ell-1} < \beta_{\ell+\kappa_\ell}$. Соответствующие собственные функции $v_\ell, \dots, v_{\ell+\kappa_\ell-1}$ подчиним условиям ортогональности и нормировки вида (5) в пространстве $L^2(\Omega)$.

В качестве асимптотических представлений собственных пар $\{\lambda_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon; u_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon\}$ задачи (1), (2) в количестве κ_ℓ штук (т. е. $p = \ell, \dots, \ell + \kappa_\ell - 1$) возьмем выражения

$$\lambda_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon = \beta_\ell + \varepsilon \beta'_{\ell p} + \tilde{\lambda}_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon, \quad (36)$$

$$u_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon(x) = \sum_{q=\ell}^{\ell+\kappa_\ell-1} b_q^p v_q(x) + \varepsilon v'_{\ell p}(x) + \tilde{u}_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon(x). \quad (37)$$

Здесь $b^{\ell p} = (b_\ell^{\ell p}, \dots, b_{\ell+\kappa_\ell-1}^{\ell p})$ — ортонормированные в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{κ_ℓ} столбцы и $\{\beta'_{\ell p}; v'_{\ell p}\}$ — пары, подлежащие определению. Причины появления «странныго» индекса N_p^ε поясняются в очередном разделе.

Подставив ансамбли (36) и (37) в задачу (1), (35), видим, что члены порядка единицы взаимно уничтожаются, а коэффициенты при ε формируют следующую задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} -\Delta v'_{\ell p}(x) - \beta_\ell v'_{\ell p}(x) &= \beta'_{\ell p} \sum_{q=\ell}^{\ell+\kappa_\ell-1} b_q^p v_q(x), \quad x \in \Omega, \\ v'_{\ell p}(x) &= \frac{1}{a(s)} \sum_{q=\ell}^{\ell+\kappa_\ell-1} b_q^p \frac{\partial v_q}{\partial n}(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (38)$$

Посредством формулы Грина превратим условия разрешимости задачи (38) в количестве κ_ℓ штук в систему алгебраических уравнений

$$\mathcal{M}^\ell b^q = \beta'_{\ell p} b^q,$$

где \mathcal{M}^ℓ — симметричная $(\kappa_\ell \times \kappa_\ell)$ -матрица с элементами

$$\mathcal{M}_{pq}^\ell = \int_{\Gamma} \frac{1}{a(s)} \frac{\partial v_p}{\partial n}(x) \frac{\partial v_q}{\partial n}(x) ds, \quad p, q = \ell, \dots, \ell + \kappa_\ell - 1.$$

Матрица \mathcal{M}^ℓ положительно определенная, так как $a > 0$ и следы нормальных производных собственных функций не могут стать линейно зависимыми на контуре Γ по теореме о единственности продолжения (см., например, [26]). Собственные числа названной матрицы

$$\beta'_{\ell+\kappa_\ell-1} \geq \dots \geq \beta'_\ell > 0 \quad (39)$$

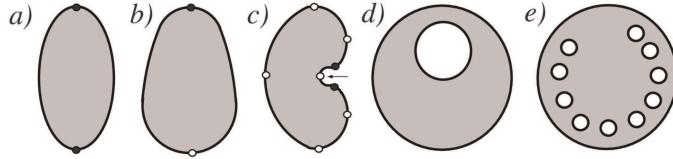


Рис. 1. Эллипс («огурец»), «яйцо» и «боб» (а–с). Глобальные максимумы кривизны указаны значком \bullet , а локальные — значком \circ , причем отрицательный — дополнительной стрелкой. Асимметричное кольцо («номерок в гардеробе») (д) и перфорированный круг («телефонный диск») (е).

конкретизируют поправочные члены асимптотических анзацев (36), а для фигурирующих в них остатков можно получить оценки $|\tilde{\lambda}_{N_p^\varepsilon}| \leq c_\ell \varepsilon^2$. Осложнения с оправданием асимптотик собственных функций поясняются далее в замечании 1.

6. О множественности асимптотических серий. В любой из ситуаций (19), (27) или (11) предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$ сопровождается насыщением отрицательной полуоси \mathbb{R}_- собственными числами (4). При фиксированном номере $k \in \mathbb{N}$ член λ_k^ε этой последовательности уходит на отрицательную бесконечность со скоростью $O(\varepsilon^{-2})$. Таким образом, номера N_p^ε обнаруженных в разд. 4 положительных чисел $\lambda_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon$ неограниченно возрастают при $\varepsilon \rightarrow +0$. Вместе с тем при увеличении параметра ε собственные числа согласно формулам (36) и (39) смещаются вверх от их предельных значений β_p , а значит, никак не могут осуществить упомянутое насыщение, происходящее, как будет пояснено на примере из разд. 10, 2°, из-за пересечения начала координат $\lambda = 0$ собственными числами, которым отвечают быстроосциллирующие собственные функции.

Асимптотические конструкции из разд. 3 или 4 приспособлены не только к глобальным, но и к локальным максимумам коэффициента Робэна a или кривизны κ . Если в первом случае максимумы обусловлены графиком положительной функции $\Gamma \ni s \mapsto a(s)$ и потому сами остаются положительными, то у функции $\Gamma \ni s \mapsto \kappa(s)$ помимо положительных (рис. 1, а и б) могут появиться и отрицательные (локальные) максимумы кривизны на вогнутых участках границы (рис. 1, в). Каждый из локальных максимумов по прежним формулам порождает серию $\{\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$ собственных чисел с устойчивыми асимптотиками, причем, как и в разд. 5, их номера N_k^ε приобретают рост при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Разумеется, может случиться, что обе функции a и κ имеют строгие глобальные максимумы на контуре Γ . Сравнивая анзацы (20) и (28), а также оценки (26) и (34), видим, что основной (самой нижней) асимптотической серией собственных чисел задачи (1), (2) всегда служит построенная в разд. 4. Именно поэтому в требование (19) включено постоянство коэффициента Робэна a .

Задача (1), (2) на круге допускает разделение переменных и поэтому, как и в разд. 10, 2°, появляется лишь одна серия отрицательных собственных чисел с устойчивой асимптотикой. Впрочем, отказ от односвязности области Ω (рис. 1, д и е) приводит к образованию нескольких асимптотических серий. Формулы (12) и (16) показывают, что собственные числа, отвечающие внутренним окружностям, имеющим меньшие радиусы, расположены выше тех, которые построены в разд. 2, т. е. их номера растут при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Если глобальный максимум (непостоянных) функций κ или a реализуется

в нескольких точках на контуре Γ (для эллипса на рис. 1, *a*, их две), то собственные числа из нескольких первых серий могут приобрести пару одинаковых асимптотических членов и тем самым серии перемешиваются (ср. разд. 7). Это обстоятельство не сказывается на строении асимптотических формул, так как носители главных частей собственных функций удалены один от другого (в противоположность анализу из разд. 5). Вместе с тем кратность собственного числа несколько влияет на процедуру обоснования асимптотики.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Асимптотические серии собственных чисел из низкочастотного диапазона спектра, порожденные в рассматриваемых случаях глобальными максимумами, называются *основными*, а остальные, расположенные выше основной, — *вторичными*. Для основной серии возможно обоснование асимптотик как собственных чисел, так и собственных функций (см. далее теоремы 3 и 4). Для вторичных серий классическая [2] и формулируемая в разд. 9 лемма 2 обнаруживает в малой окрестности построенного асимптотического приближения собственное число исходной задачи, однако идентифицировать все собственные числа в этой окрестности не удается по причине эпизодического или даже частого появления членов основной серии, «сторонних» для конструируемой асимптотики, получить приемлемые представления для собственных функций невозможно, точнее, формулы, гарантируемые леммой 2, оказываются абсолютно неинформативными.

7. Вырожденный экстремум — формальная асимптотика. Изменим ограничения, введенные в разд. 3, и допустим, что $a(s) = a_0$, но при $j = 1, \dots, J$ выполнены соотношения

$$e|\kappa(s) - \kappa_0 + K_j(s - s_j)^{2m}| \leq \mathcal{K}_j |s - s_j|^{2m+1} \text{ с коэффициентами } K_j, \mathcal{K}_j > 0, \\ \text{а также } \kappa(s) < \kappa_0 \text{ при } s \in \Gamma \setminus \{s_1, \dots, s_J\}. \quad (40)$$

При этом $m \in \mathbb{N}$ и $m > 1$, однако величина κ_0 не зависит от номера j , т. е. вырожденный глобальный максимум кривизны достигается в (попарно различных) точках $s_1, \dots, s_J := s_0 \in \Gamma$ — обсуждаем именно кратные собственные числа (см. рис. 2, *b*). Подберем показатель θ в формуле (10) для растянутых координат на дуге Γ . Главные члены асимптотики по-прежнему имеют вид (9) и (16), однако теперь формулы (40) изменяют невязку (22) следующим образом:

$$\varepsilon^{-1} a_0 (\kappa_0 - \kappa(s)) w_0(\zeta) = \varepsilon^{-1} a_0 (K_j (s - s_j)^{2m} + O(|s - s_j|^{1+2m})) \\ = \varepsilon^{-1+2m\theta} a_0 K_j \eta_j^{2m} + O(\varepsilon^{-1-(1+2m)\theta} |\eta_j|^{1+2m}), \quad (41)$$

где $\eta_j = \varepsilon^{-\theta} (s - s_j)$. Сравнение выражения (41) с еще одним соотношением $\partial_s^2 v(\eta_j) = \varepsilon^{-2\theta} \partial_{\eta_j}^2 v(\eta_j)$ требует соблюсти равенство $1 - 2m\theta = 2\theta$, а значит,

$$\theta = \frac{1}{2(1+m)} \quad \left(\text{отметим, что } \theta = \frac{1}{4} \text{ при } m = 1; \text{ ср. разд. 3} \right). \quad (42)$$

В итоге примем похожие на (20) и (21) асимптотические анзацы

$$\lambda^\varepsilon = -\varepsilon^{-2} a_0^2 - \varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0 + \varepsilon^{-1/(1+m)} \mu_j'' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (43)$$

$$u^\varepsilon(x) = \chi_j(x) v(\eta) (w_0(\zeta) + \varepsilon^{2-1/(1+m)} w''(\zeta, \eta_j)) + \tilde{u}^\varepsilon(x) \text{ в окрестности точки } s_j, \quad (44)$$

где $j = 1, \dots, J$, коэффициенты при ε^{-2} и ε^{-1} взяты из формул (9) и (16), а $\chi_j(s) = \chi_\Omega(n)\chi_\Gamma^j(s)$ — гладкие срезающие функции, χ_Ω — срезка из представления (21) и $\chi_\Gamma^j \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\chi_\Gamma^j(s) = 1 \text{ при } |s - s_j| \leq d_\Gamma/2 \text{ и } \chi_\Gamma^j(s) = 0 \text{ при } |s - s_j| \geq d_\Gamma, \quad (45)$$

$$d_\Gamma = \min\{s_j - s_{j-1} \mid j = 1, \dots, J\}.$$

В результате получим для поправочной пары $\{\mu_j''; w_j''\}$ набор задач (23) с заменами $a_0 K \eta^2 \mapsto a_0 K_j \eta^{2m}$ и индексами $j = 1, \dots, J$. Условием разрешимости таких задач служат обыкновенные дифференциальные уравнения аналогичного (24) строения:

$$-\partial_{\eta_j}^2 V_j(\eta_j) + A_j^2 \eta_j^{2m} V_j(\eta_j) = M_j V_j(\eta_j), \quad \eta_j \in \mathbb{R}, \quad \text{с коэффициентом } A_j = \sqrt{a_0 K_j}. \quad (46)$$

У этих уравнений по-прежнему дискретные спектры $\varphi_j = \{M_{pj}\}_{p \in \mathbb{N}}$, а собственные функции V_{jp} можно нормировать в $L^2(\mathbb{R})$, так как они затухают на бесконечности со степенно-экспоненциальной скоростью $O(|\eta_j|^{\phi_{pj}} e^{-A_j |\eta_j|^{1+m}/(1+m)})$ — точная формула далее не понадобится, но ее можно получить при помощи известных приемов (см. [7, 27] и др.).

Итак, в качестве предельной задачи выступает совокупность ($j = 1, \dots, J$) дифференциальных уравнений (46). Подчеркивая это наблюдение, выберем новую литеру « Λ » для членов упорядоченной последовательности $\{\Lambda_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \simeq \{M_{pj}\}_{p,j \in \mathbb{N}}$, т. е. объединения спектров $\varphi_1 \cup \dots \cup \varphi_J$.

Очередные разделы статьи посвящены обоснованию асимптотических разложений (43) и (44), но здесь приведем еще формальный анализ ситуации, в которой, как и в разд. 4, кривизна безразлична, а коэффициент a в краевом условии (2) достигает глобальный, но вырожденный максимум в одной точке s_0 (обобщение на несколько точек вполне очевидно):

$$a(s) = a_0 - K(s - s_0)^{2m} + O(|s - s_0|^{2m+1}), \quad K > 0 \text{ и } a(s) < a_0 \text{ при } s \in \Gamma \setminus \{s_0\}.$$

Показатели степеней малого параметра в поправочных членах из асимптотических анзацев

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \mu_0 + \varepsilon^{-2/(1+m)} \mu' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) = & \chi_0(x)(v(\varepsilon^{-1/(1+m)}(s - s_0))w^0(\zeta, s) \\ & + \varepsilon^{2m(1+m)}w'(\zeta, \varepsilon^{-1/(1+m)}(s - s_0))) + \tilde{u}^\varepsilon(x), \end{aligned} \quad (48)$$

в которых $\mu_0 = -a_0^{-2}$ и w^0 — экспонента (30), подобраны так, чтобы модифицированная (замена $(s - s_0)^2 \mapsto (s - s_0)^{2m}$) выкладка (31) привела к похожей на (32) задаче для пары $\{\mu'; w'\}$, условием разрешимости которой (задачи) служит уравнение (46) с параметром (33). Собственные числа этого уравнения дают выражения для поправок μ' в анзаце (47), а соответствующие собственные функции указывают множители $v(\varepsilon^{-1/(1+m)}(s - s_0))$ в анзаце (48). Оценки асимптотических остатков в принятых анзацах выводятся при помощи упрощенной схемы обоснования асимптотики для ситуации (40).

8. Экспоненциальное затухание собственных функций и сходимость атрибутов собственных пар. В соответствии с формулой (42) полож-

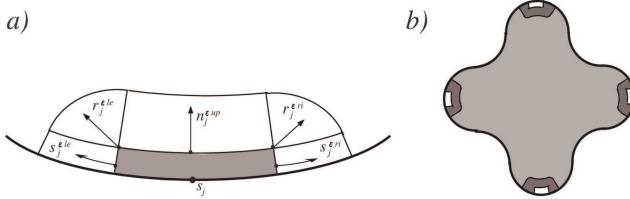


Рис. 2. Левые (le) и правые (ri) искривленные «прямоугольники» $\square_j^{\varepsilon le/ri}$ и секторы $\triangle_j^{\varepsilon le/ri}$, а также верхний (up) «прямоугольник» $\square_j^{\varepsilon up}$ (пропорции нарушены); стрелки указывают оси координат, участвующих в определении весовой функции $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$, а исходный «прямоугольник» \square_j^ε с точкой s_j на середине основания тонирован на рис. (a). На рис. (b) область изменения весовой функции тонирована сильно, а область, где она экспоненциально велика, — слабо; высветлены участки равенства ее единице.

жим $\theta = (2(1+m))^{-1}$ и начнем с рассмотрения простой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{d\zeta^2}(\zeta) + \frac{\mathbf{k}}{1-\zeta\mathbf{k}} \frac{d\mathbf{w}^\varepsilon}{d\zeta}(\zeta) &= \boldsymbol{\mu}^\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon(\zeta), \quad \zeta \in (0, \varepsilon^\theta h), \\ -\frac{d\mathbf{w}^\varepsilon}{d\zeta}(0) &= \frac{\mathbf{a}}{\varepsilon} \mathbf{w}^\varepsilon(0), \quad \frac{d\mathbf{w}^\varepsilon}{d\zeta}(\varepsilon^{-\theta} h) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

со спектральным параметром $\boldsymbol{\mu}^\varepsilon$ и положительными величинами \mathbf{k} , \mathbf{a} и h .

Лемма 1. Существуют такие положительные \mathbf{c} и ε , что первое собственное число задачи (49) удовлетворяет соотношению

$$|\boldsymbol{\mu}_1^\varepsilon + \varepsilon^{-2} \mathbf{a}^2 + \varepsilon^{-1} \mathbf{k} \mathbf{a}| \leq \mathbf{c} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon]. \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вывода асимптотической формулы достаточны вычисления из конца разд. 1 и начала разд. 2: основное приближение к собственной функции \mathbf{w}_1^ε имеет вид $e^{-\mathbf{a}\zeta/\varepsilon}$, но оставляет невязки — ограниченную $\zeta \mathbf{k}^2/(1-\zeta\mathbf{k})$ в уравнении и экспоненциально малую $-\varepsilon^{-1} \mathbf{a} e^{-\mathbf{a} h \varepsilon^{-\theta-1}}$ в (последнем) краевом условии Неймана. Первая и определяет оценку остатка в представлении (50), а схема обоснования традиционна (см. [4; 5, гл. 6; 6, гл. 9] и др.).

Для проверки экспоненциального затухания собственной функции задачи (1), (2) в условиях из разд. 6, отвечающей собственному числу

$$\lambda_p^\varepsilon \leq -\varepsilon^{-2} a_0^2 - \varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0 + \Lambda_p \varepsilon^{-2\theta}, \quad (51)$$

определим непрерывную и кусочно-гладкую весовую функцию $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon > 0$ в замыкании $\overline{\Omega}$; здесь $\Lambda_p > 0$ — некоторое число (см. далее формулу (84)). С этой целью около точек $s_j \in \Gamma$ нарисуем искаженные (в криволинейных координатах) «прямоугольники» $\square_j^\varepsilon = \{x \in \Omega \cap \mathcal{V}_d : |s - s_j| < \varepsilon^\theta h, n \in (-h\varepsilon^\theta, 0)\}$, на которых положим $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon(x) = 1$, а размер h зафиксируем так, чтобы

$$a_0 K_j h^{2m} \geq \Lambda_p + 2, \quad j = 1, \dots, J. \quad (52)$$

На рис. 2, a, к «прямоугольнику» \square_j^ε примыкают три «прямоугольника» $\square_j^{\varepsilon le/ri}$ и $\square_j^{\varepsilon up}$ с размерами $H \times h\varepsilon^\theta$ и $2h\varepsilon^\theta \times H$ соответственно, а также две четверти

«кругов» $\triangleleft_j^{\varepsilon le/ri}$ с центрами в вершинах $\mathcal{P}_j^{\varepsilon le/ri} \notin \Gamma$ первого «прямоугольника» и радиусом $H \leq \min\{d/2, d_\Gamma/3\}$ (см. формулы (14) и (45)). Считаем, что на указанных пяти множествах функция $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$ принимает соответственно значения $e^{\gamma\varepsilon^{-\theta}s_j^{le/ri}}$, $e^{\gamma\varepsilon^{-\theta}n_j^{up}}$ и $e^{\gamma\varepsilon^{-\theta}r_j^{le/ri}}$ (см. рис. 2, a, с продольными $s_j^{le/ri}$, поперечной n_j^{up} и радиальными $r_j^{le/ri}$ координатами, отмеренными от границы $\partial\Box_j^\varepsilon$), а вне названных фигур и, разумеется, вне «прямоугольников» \Box_j^ε , $j = 1, \dots, J$, она равна большой постоянной $e^{\gamma\varepsilon^{-\theta}h}$. Построенная весовая функция кусочно-гладкая и непрерывная, так как объединения \cap_j^ε шести фигур, отвечающие каждой из точек s_1, \dots, s_J , содержатся в окрестности \mathcal{V}_d и не пересекаются одна с другой (рис. 2, b). Подчеркнем еще раз, что вне множества $\Omega \setminus \cap^\varepsilon$ функция $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$ становится экспоненциально большой. Через \cap^ε и \Box^ε обозначаем объединения $\cap_1^\varepsilon \cup \dots \cup \cap_J^\varepsilon$ и $\Box_1^\varepsilon \cup \dots \cup \Box_J^\varepsilon$ соответственно.

В интегральное тождество (3) для пары $\{\lambda_p^\varepsilon; u_p^\varepsilon\}$ подставим пробную функцию $\psi^\varepsilon = \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon u_{p\gamma}^\varepsilon$, где $u_{p\gamma}^\varepsilon = \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon u_p^\varepsilon$, — обе функции принадлежат пространству $H^1(\Omega)$ благодаря свойствам веса $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$. После двукратного его коммутирования с оператором-градиентом ∇ получим равенство

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 - \lambda_p^\varepsilon \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 - \varepsilon^{-1} a_0 \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 \\ = \|u_{p\gamma}^\varepsilon(\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon)^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Для оценки правой части заметим, что

$$|\nabla \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon(x)| \leq \gamma \varepsilon^{-\theta} \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon(x), \quad \text{но } \nabla \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon(x) = 0 \text{ при } x \in (\Omega \setminus \cap^\varepsilon) \cup \Box^\varepsilon, \quad (54)$$

и, следовательно,

$$\|u_{p\gamma}^\varepsilon(\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon)^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq \gamma^2 \varepsilon^{-2\theta} \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\cap^\varepsilon)\|^2.$$

Правую часть обработаем при помощи леммы 1, в которой положим $\mathbf{a} = a_0$, $\mathbf{k} = \kappa(s)$, и, обратившись к вариационной постановке задачи (49) при учете якобиана $\mathcal{J}(n, s) = 1 + n\kappa(s)$, придем к такому неравенству для функции $u_{p\gamma}^\varepsilon$, записанной в локальных координатах n и s :

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon^\theta h}^0 \left(|\partial_n u_{p\gamma}^\varepsilon(n, s)|^2 + \left(\frac{a_0^2}{\varepsilon^2} + \frac{a_0}{\varepsilon} \kappa(s) \right) |u_{p\gamma}^\varepsilon(n, s)|^2 \right) \mathcal{J}(n, s) dn - \frac{a_0}{\varepsilon} |u_{p\gamma}^\varepsilon(0, s)|^2 \\ \geq -\mathbf{c} \int_{-\varepsilon^\theta h}^0 |u_{p\gamma}^\varepsilon(n, s)|^2 \mathcal{J}(n, s) dn. \end{aligned}$$

Проинтегрируем его по мелким дугам $\Gamma_j^\varepsilon = \{s \in \Gamma : |s - s_j| \leq \varepsilon^\theta h\} = \Gamma \cap \partial\Box_j^\varepsilon$ и продырявленному ими контуру $\Gamma \setminus \Gamma^\varepsilon = \Gamma \setminus \partial\Box^\varepsilon$, где $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \dots \cup \Gamma_J^\varepsilon$. В силу формул (40) и (52) на множестве Γ^ε при малом ε выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} a_0 (\kappa_0 - \kappa(s)) \geq \varepsilon^{-1} a_0 \min\{K_1, \dots, K_J\} (\varepsilon^\theta h)^{2m} \\ - \max\{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_J\} \varepsilon^{\theta(2m+1)} \geq \varepsilon^{-2\theta} (\mathbf{A}_p + 2), \end{aligned}$$

а значит, ограничение (51) гарантирует оценку

$$\int_{(\mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h} \cap \Omega) \setminus \Box^\varepsilon} (|\nabla u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 - \lambda_p^\varepsilon |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2) dx - \frac{a_0}{\varepsilon} \int_{\Gamma \setminus \Gamma^\varepsilon} |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 ds$$

$$\begin{aligned} &\geq \left(-\lambda_p^\varepsilon - \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} - \frac{a_0}{\varepsilon} \kappa_0 + \varepsilon^{-2\theta} (\Lambda_p + 1) + \mathbf{c} \right) \int_{(\mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h} \cap \Omega) \setminus \square^\varepsilon} |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 dx \\ &\geq (\varepsilon^{-2\theta} - \mathbf{c}) \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2((\mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h} \cap \Omega) \setminus \square^\varepsilon)\|^2. \end{aligned} \quad (55)$$

Кроме того, на исключенных «прямоугольниках» \square_j^ε верны равенства $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon = 1$ и $u_{p\gamma}^\varepsilon = u_p^\varepsilon$, а значит, ввиду нормировки $\|u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\| = 1$ (см. условие (5)) находим, что

$$\begin{aligned} &\int_{\square_j^\varepsilon} (|\nabla u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 - \lambda_p^\varepsilon |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2) dx - \frac{a_0}{\varepsilon} \int_{\Gamma_j^\varepsilon} |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 ds \\ &\geq - \left(\lambda_p^\varepsilon + \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} + \frac{a_0}{\varepsilon} \kappa_0 + K_j h^{2m} \varepsilon^{-2\theta} + \mathbf{c} \right) \int_{\square_j^\varepsilon} |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 dx \\ &\geq -C_j \varepsilon^{-2\theta} \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\square_j^\varepsilon)\|^2 = -C_j \varepsilon^{-2\theta} \|u_p^\varepsilon; L^2(\square_j^\varepsilon)\|^2 \geq -\varepsilon^{-2\theta} C_j. \end{aligned} \quad (56)$$

Наконец, вне окрестности $\mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h}$ контура Γ следующая примитивная формула очевидна:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h}} (|\nabla u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 - \lambda_p^\varepsilon |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2) \\ &\geq \|u_{p\gamma}^\varepsilon; H^1(\Omega \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h})\|^2 + c_a \varepsilon^{-2} \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h})\|^2, \quad c_a > 0. \end{aligned}$$

Собрав полученные оценки, превращаем соотношение (53) в неравенство

$$\|\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon u_p^\varepsilon; L^2(\Omega \setminus \square^\varepsilon)\|^2 \leq c_p, \quad (57)$$

причем ключевыми оказываются оценки (55) и (56), определяющие левую и правую части этого неравенства после сокращения множителя $\varepsilon^{-2\theta} \leq \varepsilon^{-2}$.

Теорема 1. Если собственное число λ_p^ε задачи (1), (2) удовлетворяет ограничению (51), то найдутся такие положительные величины γ_p и ε_p , \mathbf{c}_p , что соответствующая собственная функция, нормированная в $L^2(\Omega)$, подчинена оценке

$$\varepsilon^2 \|\mathcal{R}_{\gamma_p}^\varepsilon \nabla u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \|\mathcal{R}_{\gamma_p}^\varepsilon u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq \mathbf{c}_p \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p], \quad (58)$$

где $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$ — введенная выше экспоненциальная весовая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Добавив к формуле (57) соотношение $\|u_p^\varepsilon; L^2(\square^\varepsilon)\|^2 \leq \|u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 = 1$, приходим к нужной оценке для квадрата второй нормы в (58). Эта оценка, ограничение (51) и известное следовое неравенство [1, гл. 1]

$$\|v; L^2(\Gamma)\|^2 \leq C_\Omega \|v; H^1(\Omega)\| \|v; L^2(\Omega)\| \quad (59)$$

позволяют вывести из равенства (53) оценку $\|\nabla u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq C_p \varepsilon^{-2}$, а затем вынести вес $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$ из-под градиента при помощи формул (54), заканчивая тем самым доказательство теоремы.

Если выполнено неравенство (51), то найдется положительная бесконечно малая последовательность $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, вдоль которой имеет место сходимость

$$\varepsilon^{2\theta} (\lambda_p^\varepsilon + \varepsilon^{-2} a_0^2 + \varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0) \rightarrow \hat{\mu}_p \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0 \quad (60)$$

(индекс i у малого параметра не пишем для краткости). Соответствующую собственную функцию u_p^ε , нормированную в $L^2(\Omega)$ и гладкую вместе со своим следом $\Gamma \ni s \mapsto u_p^\varepsilon(0, s)$, умножим на срезки (45) и заметим, что в силу экспоненциального ее затухания при удалении от точек s_1, \dots, s_J (теорема 1) для произведений $u_{pj}^\varepsilon = \chi_j u_p^\varepsilon$ справедливо соотношение

$$\|u_{p1}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \dots + \|u_{pJ}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 = 1 - \dots \quad (61)$$

Здесь и далее многоточие замещает экспоненциально малые при $\varepsilon \rightarrow +0$ величины. Запишем функции в криволинейных координатах и на множествах $\Omega_j = \overline{\Omega} \cap \text{supp } \chi_j$ введем представления

$$u_{pj}^\varepsilon(x) = \chi_\Omega(n) u_{pj}^\varepsilon(0, s) e^{a_0 n / \varepsilon} + u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s). \quad (62)$$

Пусть еще $\Gamma_j = \Gamma \cap \Omega_j$. Вычислим левую часть равенства

$$\sum_{j=1}^J (\|\nabla u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Omega_j)\|^2 - \varepsilon^{-1} a_0 \|u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Gamma_j)\|^2 - \lambda_p^\varepsilon \|u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Omega_j)\|^2) = \dots,$$

обеспеченного интегральным тождеством (3), при помощи простых формул

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \left| \frac{d}{dn} e^{a_0 n / \varepsilon} \right|^2 dn &= \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^0 e^{2a_0 n / \varepsilon} dn = \frac{a_0}{2\varepsilon}, \\ \int_{-\infty}^0 n \left| \frac{d}{dn} e^{a_0 n / \varepsilon} \right|^2 dn &= \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^0 n e^{2a_0 n / \varepsilon} dn = -\frac{1}{4}, \\ 2 \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u_{pj}^{\varepsilon 0}}{\partial n}(n, s) \frac{d}{dn} e^{a_0 n / \varepsilon} dn &= -2 \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^0 u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) e^{a_0 n / \varepsilon} dn \quad (\text{так как } u_{pj}^{\varepsilon 0}(0, s) = 0), \\ \int_{-\infty}^0 e^{a_0 n / \varepsilon} \left(n \kappa(s) \partial_n u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) + \left(n \kappa(s) \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} + \frac{a_0 \kappa_0}{\varepsilon} \right) u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) \right) dn \\ &= \frac{a_0}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 (\kappa_0 - \kappa(s)) e^{a_0 n / \varepsilon} u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) dn. \end{aligned}$$

При учете якобиана $\mathcal{J}(n, s) = 1 + n\kappa(s)$ и формулы (51) обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J &\left(\frac{1}{2} \|(\kappa_0 - \kappa)^{1/2} u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot); L^2(\Gamma_j)\|^2 + \|\partial_n u_{pj}^{\varepsilon 0}; L^2(\Omega_j)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{\varepsilon^2} + \frac{a_0 \kappa_0}{\varepsilon} \right) \|u_{pj}^{\varepsilon 0}; L^2(\Omega_j)\|^2 + \|\mathcal{J}^{-1} \partial_s u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Omega_j)\|^2 \right) \\ &\leq \varepsilon^{-2\theta} \Lambda_p + \sum_{j=1}^J \left(\mathbf{I}_{pj}^\varepsilon + \frac{a_0}{\varepsilon} \int_{\Omega_j} \frac{|n| \kappa(s)}{1 + n\kappa(s)} e^{2a_0 n / \varepsilon} |u_{pj}^\varepsilon(0, s)|^2 dx \right) + \mathbf{c}_p e^{-\gamma_p \varepsilon^{-\theta}}, \quad (63) \end{aligned}$$

где γ_p — некоторый положительный показатель (см. теорему 1) и

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{pj}^\varepsilon &\leq \frac{a_0}{\varepsilon} \left(2 \left| \int_{\Omega_j} \frac{\kappa_0 - \kappa(s)}{1 + n\kappa(s)} u_{pj}^\varepsilon(0, s) e^{a_0 n/\varepsilon} u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) dx \right| \right. \\ &\quad \left. + \kappa_0 \left| \int_{\Omega_j} \frac{n\kappa(s)}{1 + n\kappa(s)} u_{pj}^\varepsilon(0, s) e^{a_0 n/\varepsilon} u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) dx \right| \right) \\ &\leq C_\kappa (\varepsilon^{-1/2} \|(\kappa_0 - \kappa)^{1/2} u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot); L^2(\Gamma_j)\| + \varepsilon^{1/2} \|u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot); L^2(\Gamma_j)\|) \|u_{pj}^{\varepsilon 0}; L^2(\Omega_j)\|. \end{aligned}$$

Благодаря ограничению (51), условию нормировки (5), исходному интегральному тождеству (3) и следовому неравенству (59) верны соотношения

$$\|\nabla u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq C_p \varepsilon^{-2} \|u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 = C_p, \quad \|u_p^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 \leq c_p \varepsilon^{-1}.$$

Таким образом, во-первых,

$$\mathbf{I}_{pj}^\varepsilon \leq C_\kappa (\|(\kappa_0 - \kappa)^{1/2} u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot); L^2(\Gamma_j)\| + c_p \varepsilon^{-1/2} \|u_{pj}^{\varepsilon 0}; L^2(\Omega_j)\|)$$

и, во-вторых, последний интеграл в формуле (63) (без множителя a_0/ε) оценивается сверху величиной $c_p \Gamma_\kappa \varepsilon^2 \|u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Gamma_j)\|^2$. В итоге видим, что при малом $\varepsilon > 0$ левая часть неравенства (63) не превосходит $c_p \varepsilon^{-\theta}$ — далее ссылаемся на обсуждаемую оценку именно с такой мажорантой.

В силу формул (61) и (63) имеем

$$\left| \frac{\varepsilon}{2a_0} \sum_{j=1}^J \|u_{pj}^\varepsilon(0, s); L^2(\Gamma_j)\|^2 - 1 \right| \leq c \varepsilon. \quad (64)$$

Определим еще функции $u_{pj}^{\varepsilon \perp}(n, s) = u_p^\varepsilon(n, s) - r_\varepsilon^{-1/2} \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) e^{a_0 n/\varepsilon}$ и

$$\bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) = \frac{1}{\sqrt{r_\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^0 e^{a_0 n/\varepsilon} u_p^\varepsilon(n, s) dn, \quad \text{где } r_\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^0 e^{2a_0 n/\varepsilon} dn = \frac{\varepsilon}{2a_0} (1 - e^{-2a_0}) > 0. \quad (65)$$

Заметим, что согласно оценке (63) для $L^2(\Omega_j)$ -нормы функции $u_{pj}^{\varepsilon 0}$ (ее появление отмечено фигурной скобкой снизу) выполнено соотношение

$$\begin{aligned} c_\kappa \|(\kappa_0 - \kappa)^{1/2} (\bar{u}_{pj}^\varepsilon - \sqrt{r_\varepsilon} u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot)); L^2(\Gamma_j)\|^2 &\leq \|\bar{u}_{pj}^\varepsilon - \sqrt{r_\varepsilon} u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot); L^2(\Gamma_j)\|^2 \\ &= \int_{\Gamma_j} \left(\frac{1}{\sqrt{r_\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^0 e^{a_0 n/\varepsilon} u_p^\varepsilon(n, s) dn - \sqrt{r_\varepsilon} u_{pj}^\varepsilon(0, s) \right)^2 ds \\ &= \frac{1}{r_\varepsilon} \int_{\Gamma_j} \left(\int_{-\varepsilon}^0 e^{a_0 n/\varepsilon} \left(\underbrace{u_p^\varepsilon(n, s)}_{-} - \underbrace{u_{pj}^\varepsilon(0, s)}_{+} \right) dn \right)^2 ds \\ &\leq \frac{c_\mathcal{J}}{r_\varepsilon} \|u_{pj}^{\varepsilon 0}; L^2(\Omega_j)\|^2 \leq c_j \varepsilon^{1-\theta} \quad (66) \end{aligned}$$

с положительным множителем c_κ . Кроме того, вытекающая из определений

(65) ортогональность

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_j} \int_{-\varepsilon}^0 e^{a_0 n / \varepsilon} \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) u_{pj}^{\varepsilon \perp}(n, s) dnds \\ &= \int_{\Gamma_j} \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) \left(\int_{-\varepsilon}^0 e^{a_0 n / \varepsilon} u_{pj}^\varepsilon(n, s) dn - \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) \frac{1}{\sqrt{r_\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^0 e^{2a_0 n / \varepsilon} dn \right) ds = 0 \end{aligned}$$

конечно же сохраняется для производных функций \bar{u}_{pj}^ε и $u_{pj}^{\varepsilon \perp}$ по переменной s , а значит,

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon \kappa_0) \left\| \mathcal{J}^{-1} \partial_s u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Omega_j) \right\|^2 \\ & \geq \int_{\Gamma_j} \int_{-\varepsilon}^0 (r_\varepsilon^{-1/2} \partial_s \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) e^{a_0 n / \varepsilon} + \partial_s u_{pj}^{\varepsilon \perp}(n, s))^2 dnds \\ &= \int_{\Gamma_j} \int_{-\varepsilon}^0 (|\partial_s \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s)|^2 + \int_{-\varepsilon}^0 |\partial_s u_{pj}^{\varepsilon \perp}(n, s)|^2 dn) ds \geq \left\| \partial_s \bar{u}_{pj}^\varepsilon; L^2(\Gamma_j) \right\|^2. \quad (67) \end{aligned}$$

Теперь введем функции v_{pj}^ε «быстрых» переменных $\varepsilon^{-\theta}(s - s_j) = \eta_j \in \mathbb{R}$,

$$v_{pj}^\varepsilon(\eta_j) = \varepsilon^{\theta/2} \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s_j + \varepsilon^\theta \eta_j), \quad (68)$$

продолжив \bar{u}_{pj}^ε нулем на всю вещественную ось. Формулы (64) и (66) влекут за собой соотношение

$$\left| \sum_{j=1}^J \left\| v_{pj}^\varepsilon; L^2(\mathbb{R}) \right\|^2 - 1 \right| \leq c_p \varepsilon^{1-\theta}. \quad (69)$$

Кроме того, оценки (66) и (67) показывают, что

$$\begin{aligned} \left\| v_{pj}^\varepsilon; \mathcal{W}_m^1(\mathbb{R}) \right\|^2 &:= \left\| \partial_{\eta_j} v_{pj}^\varepsilon; L^2(\mathbb{R}) \right\|^2 + \left\| \eta_j^m v_{pj}^\varepsilon; L^2(\mathbb{R}) \right\|^2 \\ &\leq c_{pj}^j (\varepsilon^{2\theta-\theta} \varepsilon^\theta \left\| \mathcal{J}^{-1} \partial_s u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Gamma_j) \right\|^2 + \varepsilon^{-2m\theta} \varepsilon^\theta r_\varepsilon \left\| (s - s_j)^m u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Gamma_j) \right\|^2). \end{aligned}$$

Поскольку $r_\varepsilon = O(\varepsilon)$, оба суммарных показателя степеней малого параметра равны 2θ (см. формулы (65) и (42)). Следовательно, оценка (63) гарантирует равномерную ограниченность сумм $\mathcal{W}_m^1(\mathbb{R})$ -норм функций (68), а понятная компактность вложения (гильбертова) весового пространства Соболева в пространство Лебега $L^2(\mathbb{R})$ означает, что вдоль бесконечно малой положительной подпоследовательности $\{\varepsilon_i\}_{i \in N}$ (сохранили обозначение) имеет место сходимость

$$v_{pj}^{\varepsilon_i} \rightarrow \hat{v}_{pj} \text{ слабо в } \mathcal{W}_m^1(\mathbb{R}), \text{ но сильно в } L^2(\mathbb{R}), \text{ причем } \sum_{j=1}^J \left\| \hat{v}_{pj}; L^2(\mathbb{R}) \right\|^2 = 1. \quad (70)$$

Важное последнее равенство, гарантирующее нетривиальность вектор-функции $(\hat{v}_{p1}, \dots, \hat{v}_{pJ})$, обеспечено оценкой (69) и проверенной сильной сходимостью (70).

Для произвольного набора функций $\Psi_1, \dots, \Psi_J \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ введем в формулу

$$(u_p^\varepsilon, (\Delta + \lambda_p^\varepsilon) \psi^\varepsilon)_\Omega = (u_p^\varepsilon, (\partial_n - \varepsilon^{-1} a_0) \psi^\varepsilon)_\Gamma, \quad (71)$$

происходящую от интегрального тождества (3), пробную функцию

$$\psi^\varepsilon(x) = \chi_1(x)w_0(-\varepsilon^{-1}n)\Psi_1(\varepsilon^{-\theta}(s-s_j)) + \dots + \chi_J(x)w_0(-\varepsilon^{-1}n)\Psi_J(\varepsilon^{-\theta}(s-s_j)),$$

имитирующую асимптотический анзац (44). По определению функций χ_j и w_0 правая часть формулы (71) обращается в нуль, а проведенные выше выкладки приводят к соотношению

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J & \left(\left(\chi_j w_0 u_p^\varepsilon, (\partial_s^2 - \varepsilon^{-1} K_j (s-s_j)^{2m}) \Psi_j \right)_{\Omega_j} \right. \\ & \left. + \left(\lambda_p^\varepsilon + \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} + \frac{a_0 \kappa_0}{\varepsilon} \right) (\chi_j w_0 u_p^\varepsilon, \Psi_j)_{\Omega_j} + (\chi_j u_p^\varepsilon, R_j^\varepsilon(\Psi_j))_{\Omega_j} \right) = 0, \end{aligned}$$

где для «остаточного» выражения $R_j^\varepsilon(\Psi_j)$, которое включает сомножителями экспоненту $e^{-a_0 n/\varepsilon}$ и линейную комбинацию функций $\Psi_j \partial_s \Psi_j$ с коэффициентами $O(1 + \varepsilon^{-1}|n|)$, верна оценка $\|R_j^\varepsilon(\Psi_j); L^2(\Omega_j)\| \leq c_\Psi \varepsilon^{-\theta+1/2}$. Теперь, умножив последнее равенство на $r_\varepsilon^{-1/2} \varepsilon^{2\theta}$, перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в согласии со сходимостями (60), (70) и связями (62), (65), (68). В итоге ввиду взаимной независимости функций Ψ_1, \dots, Ψ_J получаем совокупность ($j = 1, \dots, J$) интегральных тождеств

$$(\widehat{v}_{pj}, \partial_{\eta_j}^2 \Psi_j)_{\mathbb{R}} + K_j (\widehat{v}_{pj}, \eta_j^{2m} \Psi_j)_{\mathbb{R}} = \widehat{\mu}_p (\widehat{v}_{pj}, \Psi_j)_{\mathbb{R}} \quad \forall \Psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

которые как раз и означают, что пары $\{\widehat{\mu}_p; \widehat{v}_{pj}\}$ удовлетворяют предельным дифференциальным уравнениям (46). Приняв во внимание последнее равенство из списка (70), формулируем полученный результат.

Теорема 2. При ограничении (40) и постоянном коэффициенте Робэна $a_0 > 0$ предельные переходы (60) и (68) дают пары $\{\widehat{\mu}_p; \widehat{v}_{pj}\} \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{W}_m^1(\mathbb{R})$, $j = 1, \dots, J$, среди которых хотя бы одна является собственной для предельного дифференциального уравнения (40).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Установленная локализация собственных функций задачи (1), (2), а также полученные оценки, в частности, приведшие к формуле (69), показывают, что условия ортогональности и нормировки (5) порождают соотношения $(\widehat{v}_{p1}, \widehat{v}_{p1})_{\mathbb{R}} + \dots + (\widehat{v}_{pJ}, \widehat{v}_{pJ})_{\mathbb{R}} = \delta_{p,q}$.

9. Асимптотика собственных пар в случае вырожденных максимумов кривизны. Следовое неравенство (59) позволяет выбрать коэффициент $b > 0$ так, чтобы билинейная форма

$$\langle u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_\Omega + b \varepsilon^{-2} (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega - \varepsilon^{-1} a_0 (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Gamma \quad (72)$$

стала скалярным произведением в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon = H^1(\Omega)$, причем

$$\|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 \geq c_\Omega (\|\nabla_x u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{-2} \|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{-1} \|u^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2), \quad c_\Omega > 0. \quad (73)$$

Введем еще компактный положительный, непрерывный и симметричный, а значит, самосопряженный оператор \mathcal{T}^ε , заданный при помощи тождества

$$\langle \mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega \quad \forall u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon.$$

В силу теорем 10.1.5 и 10.2.2 из [28] его существенный спектр состоит из одной точки $\tau = 0$, а дискретный образует бесконечно малую положительную монотонную последовательность нормальных собственных чисел

$$\tau_1^\varepsilon \geq \tau_2^\varepsilon \geq \tau_3^\varepsilon \geq \dots \geq \tau_k^\varepsilon \geq \dots \rightarrow +0. \quad (74)$$

Неравенство (73) показывает, что $\tau_1^\varepsilon \leq c_\Omega^{-1} \varepsilon^2$. Интегральное тождество (3) эквивалентно абстрактному уравнению $\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon = \tau^\varepsilon u^\varepsilon$ в пространстве \mathcal{H}^ε с новым спектральным параметром

$$\tau^\varepsilon = \varepsilon^2(b + \varepsilon^2 \lambda^\varepsilon)^{-1}. \quad (75)$$

Последовательности (4) и (74) связаны именно формулой (75).

Следующее утверждение, известное как лемма о «почти собственных» числах и векторах (первоисточник [2]), вытекает из спектрального разложения решольвенты (см., например, [28; гл. 6]).

Лемма 2. Пусть $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ и $\tau^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ таковы, что

$$\|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon - \tau^\varepsilon u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| =: \delta^\varepsilon \in (0, T^\varepsilon).$$

Тогда имеется собственное число $\tau_{n(\varepsilon)}^\varepsilon$ оператора \mathcal{T}^ε , подчиненное неравенству $|\tau^\varepsilon - \tau_{n(\varepsilon)}^\varepsilon| \leq \delta^\varepsilon$. Более того, для любого $\delta_*^\varepsilon \in (\delta^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$ найдутся коэффициенты $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$, при которых верны формулы

$$\left\| u^\varepsilon - \sum_{i=\mathbf{N}^\varepsilon}^{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1} \mathcal{C}_i^\varepsilon \mathcal{U}_i^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq 2 \frac{\delta^\varepsilon}{\delta_*^\varepsilon}, \quad \sum_{i=\mathbf{N}^\varepsilon}^{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1} |\mathcal{C}_i^\varepsilon|^2 = 1, \quad (76)$$

где $\tau_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \tau_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ — набор всех собственных чисел оператора \mathcal{T}^ε из (замкнутого) сегмента $[\tau^\varepsilon - \delta_*^\varepsilon, \tau^\varepsilon + \delta_*^\varepsilon]$, а соответствующие собственные векторы $\mathcal{U}_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{U}_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ подчинены условиям ортогональности и нормировки $\langle \mathcal{U}_p^\varepsilon, \mathcal{U}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{p,q}$.

Пусть $\{\Lambda_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ — упорядоченная последовательность, полученная объединением последовательностей $\{M_{jp}\}_{p \in \mathbb{N}}$ собственных чисел предельных уравнений (46), $j = 1, \dots, J$, а Λ_ℓ — \varkappa_ℓ -кратный ее член, т. е.

$$\Lambda_{\ell-1} < \Lambda_\ell = \Lambda_{\ell+\varkappa_\ell-1} < \Lambda_{\ell+\varkappa_\ell}. \quad (77)$$

В качестве «почти собственных» пар оператора \mathcal{T}^ε возьмем

$$\{\tau_k^\varepsilon = \varepsilon^2(b - a_0^2 - \varepsilon a_0 \kappa_0 + \varepsilon^{2-\theta} \Lambda_\ell)^{-1}; \mathbf{u}_k^\varepsilon = \|v_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} v_k^\varepsilon\}, \quad k = \ell, \dots, \ell + \varkappa_\ell - 1, \quad (78)$$

причем для $\Lambda_k = M_{j_k p_k}$ положим $v_j^\varepsilon = 0$ при $j \neq k$ и

$$v_k^\varepsilon(x) = \chi_{j_k}(x) w_0(-\varepsilon^{-1} n) V_{j_k p_k}(\varepsilon^{-\theta}(s - s_{j_k})), \quad (79)$$

где w_0 — экспонента из формулы (9), $\{M_{j_k p_k}; V_{j_k p_k}\}$ — собственная пара уравнения (46), $\chi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ — произведение срезающих функций (14) и (45). Удобно считать, что $\partial_n \chi_j = 0$ на Γ .

Оценим величину δ_k^ε из леммы 2, найденную по собственной паре (78). Имеем

$$\begin{aligned} \delta_k^\varepsilon &= \|(\mathcal{T}^\varepsilon - \tau_k^\varepsilon) \mathbf{u}_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = \sup |\langle (\mathcal{T}^\varepsilon - \tau_k^\varepsilon) \mathbf{u}_k^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon| \\ &= \tau_k^\varepsilon \|v_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup |(\nabla v_k^\varepsilon, \nabla \psi^\varepsilon)_\Omega - \varepsilon^{-1} a_0 (v_k^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Gamma \\ &\quad + (\varepsilon^{-2} a_0^2 + \varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0 - \varepsilon^{-2\theta} \Lambda_k) (v_k^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega|. \end{aligned} \quad (80)$$

Здесь супремум вычисляется по единичной сфере в пространстве \mathcal{H}^ε , т. е. $\|\psi^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1$, и для пробной функции $\psi^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ правая часть неравенства (73) равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ограничена. Преобразуем выражение $I_k^\varepsilon(\psi^\varepsilon)$ между последними знаками модуля в цепочке (80), считая, что $\Lambda_k = M_{jp}$. Используя формулу интегрирования по частям, выводим равенство

$$I_k^\varepsilon(\psi^\varepsilon) = (\Delta v_k^\varepsilon - (\varepsilon^{-2} a_0^2 + \varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0 - \varepsilon^{-2\theta} M_{jp}) v_k^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega - (\partial_n v_k^\varepsilon - \varepsilon^{-1} a_0 v_k^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Gamma.$$

Последнее скалярное произведение обращается в нуль согласно определениям функции (79) и срезки χ_j , для которой по построению $\partial_n \chi_j = 0$ на Γ . Кроме того, благодаря экспоненциальному затуханию собственных функций w_0 и V_{jp} коммутирование срезки с оператором Δ привносит экспоненциально малую погрешность, обозначаемую по обыкновению многоточием. Итак,

$$I_k^\varepsilon(\psi^\varepsilon) = (\Delta(w_0 V_{jp}), \chi_j \psi^\varepsilon)_\Omega - ((\varepsilon^{-2} a_0^2 + \varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0 - \varepsilon^{-2\theta} M_{jp}) w_0 V_{jp}, \chi_j \psi^\varepsilon)_\Omega + \dots \quad (81)$$

Используя представление (6) оператора Лапласа, приходим к формуле

$$\begin{aligned} \Delta(w_0 V_{jp})(x) &= e^{a_0 n/\varepsilon} \left(\frac{a_0^2}{\varepsilon^2} V_{jp}(\eta_j) + \frac{a_0 \kappa(s) V_{jp}(\eta_j)}{\varepsilon(1 + n\kappa(s))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon^{-2\theta} \partial_{\eta_j}^2 V_{jp}(\eta_j)}{(1 + n\kappa(s))^2} - \frac{n \partial_s \kappa(s) \varepsilon^{-\theta} \partial_{\eta_j} V_{jp}(\eta_j)}{(1 + n\kappa(s))^3} \right). \end{aligned}$$

Обозначим выражения из правой части через $\mathcal{J}_0^\varepsilon, \dots, \mathcal{J}_3^\varepsilon$. Первое из них присутствует в обоих скалярных произведениях из суммы (81) и потому исчезает из нее. Для последнего получаем, что

$$\begin{aligned} |(\mathcal{J}_3^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega| &\leq c_3 \left(\int_{-2d_\chi}^0 n^2 e^{2a_0 n/\varepsilon} dn \right)^{1/2} \varepsilon^{-\theta} \left(\int_{-2d_\chi}^{2d_\chi} \left| \frac{dV_{jp}}{d\eta_j}(\eta_j) \right|^2 ds \right)^{1/2} \|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \\ &\leq C_3 \varepsilon^{3/2} \varepsilon^{-\theta} \varepsilon^{\theta/2} \varepsilon = C_3 \varepsilon^{(5-\theta)/2}. \end{aligned}$$

Здесь помимо непосредственных вычислений норм применена вытекающая из неравенства (73) оценка для множителя $\|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\|$.

В выражении $\mathcal{J}_2^\varepsilon$ воспользуемся уравнением (46) и преобразуем следующую сумму:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_4^\varepsilon(n, s) &:= \mathcal{J}_1^\varepsilon(n, s) + \mathcal{J}_2^\varepsilon(n, s) - (\varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0 - \varepsilon^{-2\theta} M_{jp}) w_0(\zeta) V_{jp}(\eta_j) \\ &= \frac{a_0(\kappa(s) - \kappa_0 + K_j(s - s_j)^{2m})}{\varepsilon(1 + n\kappa(s))} w_0(\zeta) V_{jp}(\eta_j) \\ &\quad + \frac{n\kappa(s)}{1 + n\kappa(s)} \left(\frac{a_0 K_j(s - s_j)^{2m}}{\varepsilon(1 + n\kappa(s))} - \frac{a_0 \kappa_0}{\varepsilon} - \varepsilon^{-2\theta} M_{jp}(2 + n\kappa(s)) \right) w_0(\zeta) V_{jp}(\eta_j). \end{aligned}$$

Таким образом, согласно представлению (40) имеем

$$\begin{aligned} |(\mathcal{J}_4^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega| &\leq c_4 \left(\left(\int_{-2d_\chi}^0 e^{2a_0 n/\varepsilon} dn \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{-2d_\chi}^{2d_\chi} \eta_j^{2(2m+1)} |V_{jp}(\eta_j)|^2 ds \right)^{1/2} + \left(\int_{-2d_\chi}^0 n^2 e^{2a_0 n/\varepsilon} dn \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\int_{-2d_\chi}^{2d_\chi} \eta_j^{2(2m+1)} |V_{jp}(\eta_j)|^2 ds \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\int_{-2d_\chi}^{2d_\chi} (\varepsilon^{-2}(s-s_j)^{4m} + \varepsilon^{-4\theta}) |V_{jp}(\eta_j)|^2 ds \right)^{1/2} \right) \|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \\ & \leq C_4(\varepsilon^{1/2}\varepsilon^{-\theta/2} + \varepsilon^{3/2}(\varepsilon^{-1+\theta/2} + \varepsilon^{-3\theta/2}))\varepsilon \leq 3C_4\varepsilon^{(3-\theta)/2}. \end{aligned}$$

Кроме того, посредством вычислений, более простых, чем приведенные, показываем, что в силу определений (72) и (79) выполнена следующая оценка снизу:

$$\|v_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 \geq c_0(\varepsilon^{-2}\varepsilon\varepsilon^\theta + \varepsilon^{-1}\varepsilon^\theta + \varepsilon^{-2}\varepsilon\varepsilon^\theta) = 3c_0\varepsilon^{\theta-1}, \quad c_0 > 0.$$

В итоге, собрав полученные неравенства, видим, что величина (80) не пре-
восходит

$$\mathbf{c}_k\varepsilon^2\varepsilon^{(1-\theta)/2}\varepsilon^{3/2} = \mathbf{c}_k\varepsilon^{4-\theta/2},$$

а значит, лемма 2 предоставляет собственные числа $\tau_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon$ и $\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon$ соответственно
оператора \mathcal{T}^ε и задачи (1), (2), для которых (чисел) верны соотношения

$$\begin{aligned} |\tau_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon - \tau_k^\varepsilon| & \leq \mathbf{c}_k\varepsilon^{4-\theta/2} \Leftrightarrow |\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon + \varepsilon^{-2}a_0^2 + \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 - \varepsilon^{-\theta}\Lambda_k| \\ & \leq \mathbf{c}_k\varepsilon^{-\theta/2}(b + \varepsilon^2\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon)(b - a_0^2 - \varepsilon a_0\kappa_0 + \varepsilon^{2-\theta}\Lambda_k). \end{aligned} \quad (82)$$

Отсюда сначала выводим, что

$$\frac{1}{2}(b + \varepsilon^2\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon) \leq b - a_0^2 - \varepsilon a_0\kappa_0 + \varepsilon^{2-\theta}\Lambda_k \text{ при } \mathbf{c}_k\varepsilon^{2-\theta/2}(b - a_0^2 - \varepsilon a_0\kappa_0 + \varepsilon^{2-\theta}\Lambda_k) \leq \frac{1}{2},$$

а затем, подобрав подходящие $\varepsilon_k > 0$ и $\mathbf{C}_k > 0$, получаем окончательную оценку

$$|\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon + \varepsilon^{-2}a_0^2 + \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 - \varepsilon^{-\theta}\Lambda_k| \leq \mathbf{C}_k\varepsilon^{-\theta/2} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_k]. \quad (83)$$

Несмотря на то, что мажоранта неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow +0$,
формула (83) оправдывает асимптотику какого-то члена последовательности
(4), поскольку все показатели степеней малого параметра в левой части строго
меньше $-\theta/2$. Ближайшая цель — убедиться в том, что в асимптотической
формуле (83) фигурирует именно собственное число λ_k^ε .

Теорема 3. *При ограничениях (40) и $a(s) = a_0$ для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся
такие положительные ε_k и \mathbf{C}_k , что для члена λ_k^ε последовательности (4) соб-
ственных чисел задачи (1), (2) выполнено неравенство (83), в котором $N_k^\varepsilon = k$, а
 $\{\Lambda_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ — упорядоченная объединенная последовательность собственных чисел
 M_{jp} предельных уравнений (46), $j = 1, \dots, J$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим кратное собственное число Λ_ℓ из
формулы (77) и, воспользовавшись второй частью леммы 2, убедимся в том,
что построенное отображение $k \mapsto N_k^\varepsilon$ можно сделать инъекцией. Положим
 $\delta^\varepsilon = \varepsilon^{-\theta/2} \max\{\mathbf{C}_\ell, \dots, \mathbf{C}_{\ell+\kappa_\ell-1}\}$ и $\delta_*^\varepsilon = t^{-1}\delta^\varepsilon$, а параметр $t \in (0, 1)$ зафик-
сируем далее. Обозначим через $\mathcal{C}_{(\ell)}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{(\ell+\kappa_\ell-1)}^\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}^\varepsilon}$ столбцы, а через
 $\mathcal{S}_{(\ell)}^\varepsilon, \dots, \mathcal{S}_{(\ell+\kappa_\ell-1)}^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ — линейные комбинации собственных векторов опе-
ратора \mathcal{T}^ε , возникшие в формуле (76) (при необходимости выравниваем высоты
столбцов добавлением нулевых элементов). Благодаря условиям ортогонально-
сти и нормировки собственных векторов имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_{(q)}^\varepsilon \cdot \mathcal{C}_{(p)}^\varepsilon - \delta_{p,q}| & = |\langle \mathcal{S}_{(p)}^\varepsilon, \mathcal{S}_{(q)}^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{p,q}| \leq |\langle \mathcal{S}_{(p)}^\varepsilon, \mathcal{S}_{(p)}^\varepsilon - \mathbf{u}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon| \\ & + |\langle \mathcal{S}_{(p)}^\varepsilon - \mathbf{u}_p^\varepsilon, \mathbf{u}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon| + |\langle \mathbf{u}_p^\varepsilon, \mathbf{u}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{p,q}| \leq 2t + 2t + 0 = 4t. \end{aligned}$$

Здесь учтены обе оценки (76) и определение величины δ_*^ε , а также дизьюнктность носителей функций \mathbf{u}_p^ε и \mathbf{u}_q^ε при $p \neq q$ вместе с равенством $\|\mathbf{u}_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1$. Следовательно, при малом t столбцы $\mathcal{C}_{(\ell)}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{(\ell+\kappa_\ell-1)}^\varepsilon$ «почти ортонормированы» в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbf{X}^\varepsilon}$, что возможно только в случае $\mathbf{X}^\varepsilon \geq \kappa_\ell$. Именно в этом и нужно было убедиться, так как после фиксации подходящего $t > 0$ не менее κ_ℓ собственных чисел $\tau_{N_\ell^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \tau_{N_{\ell+\kappa_\ell-1}^\varepsilon}^\varepsilon$ попадают на сегмент $[\tau_\ell^\varepsilon - t^{-1}\delta^\varepsilon, \tau_\ell^\varepsilon + t^{-1}\delta^\varepsilon]$, а некоторое увеличение его длины по существу не сказывается на финальной оценке (83).

Итак, каждому члену Λ_p последовательности $\{\Lambda_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ поставлено в соответствие свое собственное число $\lambda_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon$, а значит,

$$\lambda_p^\varepsilon \leq \lambda_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon \leq -\varepsilon^{-2}a_0^2 - \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 + \varepsilon^{-\theta}\Lambda_p + \mathbf{C}_p\varepsilon^{-\theta/2}. \quad (84)$$

Таким образом, во-первых, $p \leq N_p^\varepsilon$ и, во-вторых,

$$\lambda_p^\varepsilon \leq -\varepsilon^{-2}a_0^2 - \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 + \varepsilon^{-\theta}\Lambda_k + \mathbf{C}_k\varepsilon^{-\theta/2},$$

т. е. выполнено неравенство (51) с мажорантой $\Lambda_p = \Lambda_p + \mathbf{C}_p$. Возьмем $p = \ell + \kappa_\ell - 1$ из формулы (77) и предположим, что $N_p^{\varepsilon_i^p} > p$ для некоторой положительной бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_i^p\}_{i \in \mathbb{N}}$. Тогда найдутся удовлетворяющие неравенству (51) собственные числа $\lambda_{N_p^{\varepsilon_i^p}}^\varepsilon$ задачи (1), (2), для которых собственные функции $u_{N_p^{\varepsilon_i^p}}^\varepsilon$ ортогональны в пространстве $L^2(\Omega)$ другим и, что важно, разным собственным функциям $u_{q_1}^\varepsilon, \dots, u_{q_{\ell+\kappa_\ell-1}}^\varepsilon$ той же задачи, отвечающие собственным числам из сегмента $[0, -\varepsilon^{-2}a_0^2 - \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 + \varepsilon^{-\theta}\Lambda_{\ell+\kappa_\ell-1}]$. Для всех них справедлива теорема 2, а значит, ввиду установленной сильной сходимости (70) атрибут $\bar{v}_N \in H^1(\mathbb{R})^J$, найденный согласно формуле (68) по последовательности $\{u_{N_p^{\varepsilon_i^p}}^\varepsilon\}_{i \in \mathbb{N}}$, ортогонален не менее $\ell + \kappa_\ell - 1$ собственным функциям V_{jp} уравнений (46) при $j = 1, \dots, J$ и $M_{jp} \leq \Lambda_p$ (замечание 2). В то же время предельное собственное число $\tilde{\mu}_N$ также не превосходит $\Lambda_p = \Lambda_\ell = \dots = \Lambda_{\ell+\kappa_\ell-1}$. Эти наблюдения противоречат способу образования последовательности $\{\Lambda_q\}_{q \in \mathbb{N}}$. Следовательно, $p = N_p^\varepsilon$ и доказательство теоремы 3 закончено.

Займемся асимптотикой собственных функций. Если собственное число Λ_ℓ простое (например, точка глобального максимума кривизны единственна), то применение с этой целью второй части леммы 2 элементарно. Рассмотрим κ_ℓ -кратное собственное число Λ_ℓ из формулы (77). По доказанному в теореме 3 найдется такой множитель $\varrho_\ell > 0$, что в $\varrho_\ell\varepsilon^{4-\theta}$ -окрестности точки τ_ℓ^ε (ср. формулу (82)) располагаются собственные числа $\tau_\ell^\varepsilon, \dots, \tau_{\ell+\kappa_\ell-1}^\varepsilon$ оператора \mathcal{T}^ε и только они. Следовательно, найдутся нормированные столбцы $\mathcal{C}_{(\ell)}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{(\ell+\kappa_\ell-1)}^\varepsilon \in \mathbb{R}^{\kappa_\ell}$, для которых

$$\left\| \mathbf{u}_k^\varepsilon - \sum_{i=\ell}^{\ell+\kappa_\ell-1} \mathcal{C}_{(k)i}^\varepsilon \mathcal{U}_i^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq 2 \frac{\mathbf{c}_k \varepsilon^{4-\theta/2}}{\varrho_\ell \varepsilon^{4-\theta}} = 2 \frac{\mathbf{c}_k}{\varrho_\ell} \varepsilon^{\theta/2}.$$

Поскольку по построению $\langle \mathbf{u}_p^\varepsilon, \mathbf{u}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{p,q}$, условия ортогональности и нормировки для собственных векторов оператора \mathcal{T}^ε означают, что $(\kappa_\ell \times \kappa_\ell)$ -матрица $\mathcal{C}^\varepsilon := (\mathcal{C}_{(\ell)}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{(\ell+\kappa_\ell-1)}^\varepsilon)$ ортогональная (вещественная унитарная). После ее обращения $\mathcal{B}^\varepsilon := (\mathcal{C}^\varepsilon)^{-1}$ (т. е. транспонирования) остается принять во внимание различие нормировок собственных векторов и функций в пространствах \mathcal{H}^ε и $H^1(\Omega)$ (см. неравенство (73)) и сформулировать полученный результат.

Теорема 4. В условиях теоремы 3 для ортонормированных в пространстве $L^2(\Omega)$ собственных функций задачи (1), (2), отвечающих ее собственным числам $\lambda_\ell^\varepsilon, \dots, \lambda_{\ell+\kappa_\ell-1}^\varepsilon$ (см. формулу (77)) найдутся такие ортогональная $(\kappa_\ell \times \kappa_\ell)$ -матрица $\mathcal{B}^\varepsilon = (\mathcal{B}_{pq}^\varepsilon)$ и величины $\varepsilon_\ell > 0$, $\mathbf{c}_\ell > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\ell]$ выполнены оценки

$$\varepsilon^2 \|\nabla u_q^\varepsilon - \nabla \mathbf{S}_q^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \|u_q^\varepsilon - \mathbf{S}_q^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq \mathbf{c}_\ell \varepsilon^{\theta/2},$$

где $q = \ell, \dots, \ell + \kappa_\ell - 1$ и

$$\mathbf{S}_q^\varepsilon(x) = \frac{2a_0}{\varepsilon^{1+\theta}} \sum_{p=\ell}^{\ell+\kappa_\ell-1} \mathcal{B}_{pq}^\varepsilon \chi_{j_p}(x) w_0\left(-\frac{n}{\varepsilon}\right) V_{j_p k_p}\left(\frac{s - s_{j_p}}{\varepsilon^\theta}\right) \quad \text{в случае } \Lambda_p = M_{j_p k_p},$$

а w_0 — экспонента (9), $V_{j_p k_p}$ — собственная функция уравнения (46) и $\theta = \frac{1}{2(1+m)}$.

10. Разное. 1°. Гладкость границы и коэффициента Робэна. Требования $a \in C^\infty(\Gamma)$ и $\Gamma \in C^\infty$, разумеется, излишни — при выводе и обосновании асимптотических разложений принимали участие примитивные формулы Тейлора, и поэтому в разд. 3, 4 и 7 достаточно предположить принадлежность коэффициента Робэна и кривизны контура классам Гёльдера $C^{3,\delta}$. В разд. 5 при нахождении первых поправочных асимптотических членов достаточно двукратная непрерывная дифференцируемость границы.

Если a — непрерывная кусочно-гладкая положительная функция с глобальным максимумом в точке $s_0 \in \Gamma$, причем

$$a(s) = a_0 - K|s - s_0| + O((s - s_0)^2), \quad K > 0,$$

то алгоритм построения асимптотик в целом сохраняется, однако в растяжении (10) возникает показатель $\theta = 1/3$, а предельным уравнением вместо (24) становится уравнение Эйри на оси $\mathbb{R} \ni \eta$ с дифференциальным оператором $-\partial_\eta^2 + K|\eta|$ (см., например, [28]). Схожие процедуры можно найти в публикациях [29, 30], посвященных задачам Дирихле в тонких многогранниках и многоугольниках (треугольнике).

В случае кусочно-гладкой границы спектр задачи Робэна для оператора Лапласа приобретает разнообразные особенности строения, например, в областях с пикообразными заострениями могут появиться непустые существенный и остаточный спектры (см. [31–34] и др.). Не останавливаясь на подробностях, упомянем статьи [11, 35, 36], посвященные названной задаче в областях с угловыми и коническими точками. Приведенные списки ссылок конечно же неполные.

2°. Простой пример. В прямоугольнике $\Omega = (0, H) \times (0, 2\pi)$ рассмотрим дифференциальное уравнение (1) с краевыми условиями и условиями периодичности

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1}(0, x_2) &= \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon(0, x_2), \quad u^\varepsilon(H, x_2) = 0, \quad x_2 \in (0, 2\pi), \\ u^\varepsilon(x_1, 0) &= u^\varepsilon(x_1, 2\pi), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1, 2\pi), \quad x_1 \in (0, H). \end{aligned} \tag{85}$$

Разделив переменные и построив асимптотику собственных чисел обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке $(0, H)$, обнаруживаем следующие серии собственных чисел задачи (1), (85) с устойчивыми асимптотиками:

$$\{k^2 - \varepsilon^{-2} + O(e^{-1/\varepsilon})\}_{k \in \mathbb{N}_0^2} \text{ и } \{k^2 + 4H^{-2}\pi^2(1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2))\}_{k \in \mathbb{N}_0^2}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{86}$$

Здесь $\mathbb{N}_0^2 = \{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots\}$. Первая серия содержит отрицательные члены, которые при $\varepsilon \rightarrow +0$ уходят на отрицательную бесконечность, но при больших индексах $k \in \mathbb{N}_0^2$ также и положительные собственные числа, перемешивающиеся с членами остальных ($j \in \mathbb{N}$) серий (86). Тот факт, что последние члены остаются положительными при всех малых $\varepsilon > 0$, т. е. не проникают в отрицательную полуось, согласуется с асимптотическими формулами из разд. 5.

3°. Полные асимптотические разложения. При условиях гладкости из разд. 1 благодаря проверенной локализации собственных функций для отрицательной части спектра задачи (1), (2) и простоте собственных чисел индивидуальных предельных задач продолжение итерационных процессов, начатых в разд. 3, 4, 7, и построение полных асимптотических разложений собственных пар производится при помощи давно известных процедур (см. статьи [2, 4], монографии [25, 26, 37] и многие другие публикации). То же, разумеется, можно сказать и о ситуации из разд. 2. Следует подчеркнуть, что построение бесконечных рядов в сингулярно возмущенных спектральных задачах зачастую малополезное занятие, поскольку, как показано в [38, гл. 7] (см. также [39, 40]), привлечение в асимптотические формулы вида (83) даже всего двух-трех поправочных асимптотических членов обычно провоцирует несоразмерные увеличение коэффициента C_k в мажоранте и уменьшение грани ε_k допустимого изменения параметра. Лишь для некоторых весьма специфических способов возмущения границы установлена [41, 42] аналитическая зависимость простых собственных чисел от малых параметров. Вместе с тем построение младших членов асимптотики позволяет вывести точные оценки остатков в разложениях собственных пар — это относится и к теоремам 3 и 4, в которых таким путем мажоранты могут быть уменьшены до C_ℓ^\bullet и $C_\ell^\bullet \varepsilon^\theta$ соответственно, впрочем при неконтролируемом уменьшении величины ε_k .

Разложения в бесконечные асимптотические ряды доступны не только для основной, но и вторичных, в частности, положительной, серий собственных чисел. Автору известна лишь одна работа [43] с подобным, вполне неожиданным, результатом для разных диапазонов спектра.

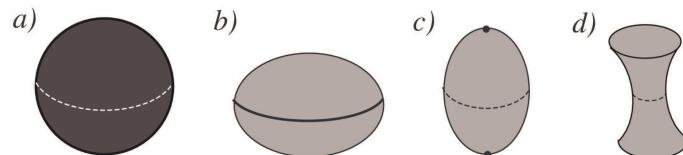


Рис. 3. Шар (a), «сплющенный» (b) и тонкий (c) эллипсоиды — зоны локализации: соответственно поверхность, линия и две точки. «Песочные часы» (d).

4°. Многомерные области. Исследование собственных пар спектральных краевых задач с большим отрицательным коэффициентом Робэна проводилось преимущественно в плоских областях. По поводу асимптотик в многомерных областях упомянем содержательную работу [44] и прокомментируем формальный анализ лишь при удобной — эллипсоидальной — геометрии области, предоставляющей различные типы локализации собственных функций, но в общем случае разнообразие асимптотических анзацев разрастается неимоверно. Пусть коэффициент Робэна $a = a_0$ постоянен и

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \alpha_1^{-2}x_1^2 + \alpha_2^{-2}x_2^2 + \alpha_3^{-2}x_3^2 = 1\}, \quad \alpha_j > 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Если $\alpha_j = 1$ и Ω — единичный шар (рис. 3, *a*), то метод Вишика — Люстерника [2–4] без труда дает асимптотику собственных пар задачи (1), (2) и, в частности, устанавливает локализацию собственных функций около всей сферической поверхности. Асимптотический анализ из разд. 3 и 2 (см. также [8]) подсказывает, что при $1 = \alpha_1 \geq \alpha_2 > \alpha_3$, т. е. в случае «сплющенного» эллипсоида (рис. 3, *b*), наблюдается концентрация собственных функций около длинного экватора. Наконец, при $\alpha_1, \alpha_2 < \alpha_3 = 1$, т. е. для сигарообразного эллипсоида нетрудно предсказать эффект локализации около точек $x = (0, 0, \pm 1)$ (рис. 3, *c*) и появление в качестве предельного уравнения двумерного аналога уравнения гармонического осциллятора (24)

$$-\Delta V(\eta) - (A_1^2\eta_1^2 + A_2^2\eta_2^2)V(\eta) = MV(\eta), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2,$$

собственные функции которого по-прежнему обладают экспоненциальным затуханием на бесконечности (см., например, [21, 29]).

Для сложно устроенной геометрии тела и при отсутствии ярко выраженных точек максимумов кривизн поверхности (ср. [44]), в частности, в случае «седловин» (рис. 3, *d*) асимптотика даже первых собственных пар задачи (1), (2) с постоянным коэффициентом Робэна остается неизученной.

Как и в плоской ситуации, наличие изолированных точек глобального максимума переменного коэффициента Робэна *a* существенно упрощает асимптотические конструкции (ср. разд. 4 и разд. 3, а также см. уже упоминавшиеся статьи [18–22], относящиеся к другим задачам задачам, но использующие похожие приемы анализа). Впрочем, если глобальный максимум реализуется на разомкнутой дуге, построение асимптотики встречает серьезные, пока не преодоленные трудности (см. обсуждение в публикации [29]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстроменяющимися коэффициентами и граничными условиями // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 4. С. 27–95.
4. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I. // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 3–80.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (релятивистская теория). М.: Наука, 1974.
8. Камоцкий И. В., Назаров С. А. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Науч. книга, 1999. Т. 18. С. 105–148.
9. Lacey A. A., Ockendon J. R., Sabina J. Multidimensional reaction diffusion equations with nonlinear boundary conditions // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 58, N 5. P. 1622–1647.
10. Lou Y., Zhu M. A singularly perturbed linear eigenvalue problem in C^1 domains // Pacific J. Math. 2004. V. 214, N 2. P. 323–334.
11. Levitin M., Parnovski L. On the principal eigenvalue of a Robin problem with a large parameter // Math. Nachr. 2008. V. 281, N 2. P. 272–281.
12. Pankrashkin K. On the asymptotics of the principal eigenvalue problem for a Robin problem with a large parameter in a planar domain // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2013. V. 4, N 4. P. 474–483.

13. Exner P., Minakov A., Parnovski L. Asymptotic eigenvalue estimates for a Robin problem with a large parameter // *Port. Math.* 2014. V. 71, N 2. P. 141–156.
14. Daners D., Kennedy J. B. On the asymptotic behaviour of the eigenvalues of a Robin problem // *Differ. Integr. Equ.* 2010. V. 23. P. 659–669.
15. Helffer B., Kachmar A. Eigenvalues for the Robin Laplacian in domains with variable curvature // *Trans. Am. Math. Soc.* 2017. V. 369, N 2. P. 3253–3287.
16. Helffer B., Kachmar A. Semi-classical edge states for the Robin Laplacian // *Mathematika*. 2022. V. 68, N 2. P. 454–485.
17. Назаров С. А. «Паразитные» собственные значения задачи с краевыми условиями третьего типа // *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. 2023. Т. 63, № 7. С. 1128–1144.
18. Friedlander L., Solomyak M. On the spectrum of narrow periodic waveguides // *Russ. J. Math. Phys.* 2008. V. 15, N 2. P. 238–242.
19. Friedlander L., Solomyak M. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // *Israel J. Math.* 2009. V. 170. P. 337–354.
20. Borisov D., Freitas P. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // *Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire*. 2009. V. 26, N 2. P. 547–560.
21. Borisov D., Freitas P. Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in \mathbb{R}^d // *J. Funct. Anal.* 2010. V. 258, N 3. P. 893–912.
22. Nazarov S. A., Perez E., Taskinen J. Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains // *Trans. Am. Math. Soc.* 2016. V. 368, N 1. P. 4787–4829.
23. Назаров С. А. Локализация собственных колебаний тонких упругих прокладок // *Прикл. математика и механика*. 2024. Т. 88, № 1. С. 104–138.
24. Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A. *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten..* Berlin: Akademie-Verl., 1991. V. 1 & 2.
25. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
26. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
27. Бабич В. М. Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
28. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1980.
29. Назаров С. А. Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках // *Сиб. мат. журн.* 2013. Т. 84, № 3. С. 655–672.
30. Ourmières-Bonafos T. Dirichlet eigenvalues of asymptotically flat triangles // *Asymptot. Anal.* 2015. V. 92, N 3–4. P. 279–312.
31. Daners D. Robin boundary problems on arbitrary domains // *Trans. Am. Math. Soc.* 2000. V. 352, N 4. P. 4207–4236.
32. Daners D. A Faber–Krahn inequality for Robin problems in any space dimension // *Math. Ann.* 2006. V. 335, N 4. P. 767–785.
33. Nazarov S. A., Taskinen J. Spectral anomalies of the Robin Laplacian in non-Lipschitz domains // *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*. 2013. V. 20, N 1. P. 27–90.
34. Kovářík H., Pankrashkin K. Robin eigenvalues on domains with peaks // *J. Differ. Equ.* 2019. V. 267, N 4. P. 1600–1630.
35. Pankrashkin K. On the discrete spectrum of Robin Laplacians in conical domains // *Math. Model. Nat. Phenom.* 2016. V. 11, N 2. P. 100–110.
36. Khalile M., Pankrashkin K. Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors // *Math. Nachr.* 2018. V. 291, N 4. P. 928–965.
37. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. *Asymptotic analysis of fields in multi-structures..* Oxford: Clarendon Press, 1999. (Oxford Math. Monogr.).
38. Назаров С. А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
39. Назаров С. А. Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины // *Проблемы математического анализа*. Новосибирск: Науч. книга, 2003. Т. 25. С. 99–188.
40. Lobo M., Nazarov S. A., Perez E. Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues // *IMA J. Appl. Math.* 2005. V. 70, N 3. P. 419–458.

41. *Lanza de Cristoforis M.* Asymptotic behavior of the solutions of the Dirichlet problem for the Laplace operator in a domain with a small hole. A functional analytic approach // Analysis. 2008. V. 28, N 1. P. 63–93.
42. *Lanza de Cristoforis M.* Simple Neumann eigenvalues for the Laplace operator in a domain with a small hole. A functional analytic approach // Rev. Mat. Complut. 2012. V. 24, N 2. P. 369–412.
43. Назаров С. А. Асимптотические разложения собственных чисел задачи Стеклова в сингулярно возмущенных областях // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 2. С. 119–184.
44. *Pankrashkin K., Popoff N.* Mean curvature bounds and eigenvalues of Robin Laplacians // Calculus of Variations and Partial Differ. Equ. 2015. V. 54, N 2. P. 1947–1961.

Поступила в редакцию 25 августа 2025 г.

После доработки 25 августа 2025 г.

Принята к публикации 26 сентября 2025 г.

Назаров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-8552-1264)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН,

Набережная реки Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191011

srgnazarov@yahoo.co.uk, srgnazarov108@gmail.com