Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2025. Том 66, № 6

УДК 517.518

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ, ЗАДАЮЩИХ ЛИПШИЦЕВЫ ГРАФИКИ НА ДВУХСТУПЕНЧАТЫХ ГРУППАХ КАРНО

М. Б. Карманова

Аннотация. Выведен явный вид субримановых дифференциалов отображений-графиков, являющихся липшицевыми во внутреннем смысле, на двухступенчатых группах Карно, и описаны дифференциальные и метрические свойства отображений, задающих такие графики.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.609

Ключевые слова: липшицево отображение, внутренняя метрика, отображение-график, двухступенчатая группа Карно, субриманов дифференциал.

Статья продолжает исследования [1] о свойствах липшицевых графиков на двухступенчатых группах Карно. В задачах классического анализа и его обобщений отображения-графики играют существенную роль. Например, классы минимальных и максимальных поверхностей (см. подробности о таких поверхностях, связанных задачах и применениях в [2–5] и цитируемых источниках) локально представимы в виде графиков. Кроме того, в начале XXI века была найдена связь задач нейробиологии о построении моделей визуализации и свойств минимальных поверхностей в субримановой геометрии [6–8]. Ряд работ посвящен исследованию свойств графиков с классическим способом построения и с согласованным с субримановой структурой (см., например, [9–16] и др.). Нетрудно проверить, что в силу особенностей строения групп Карно и других субримановых структур свойство липшицевости (во внутреннем смысле) отображения не переносится на его график, и наоборот. В частности, график липшицевой функции не всегда является таковым даже на модельных случаях групп Гейзенберга. В связи с этим возникают проблемы при выводе аналогов дифференциальных и метрических свойств поверхностей-образов. Автором предложен новый подход к решению такой проблемы в [17–20] и др. работах.

В [1] (см. также [21], где исследован модельный случай) решается обратный вопрос: если график некоторого отображения является липшицевым, то какими свойствами обладает определяющее его отображение? В результате получено аналитическое описание классов отображений, гарантирующих липшицевость во внутреннем смысле построенных по ним графиков. С помощью выведенного в [1] критерия мы в данной работе получаем явный вид субриманова дифференциала липшицева отображения-графика и формулу для вычисления меры соответствующей поверхности-образа, а также выводим в явном виде новые

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0006).

дифференциальные свойства определяющего такой график отображения. Кроме того, при некоторых дополнительных предположениях установлена формула площади для образов таких отображений.

Прежде всего опишем основные объекты исследования и их свойства.

Определение 1 [22]. *Двухступенчатая группа Карно* — это связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представима в виде $V = V_1 \oplus V_2$, $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = \{0\}$.

Если базисное поле X_l принадлежит V_k, то его *степень* $\deg X_l$ равна k, $l = 1, \dots, N$, $k = 1, 2$. Здесь и далее N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Поля, степень которых равна единице, называются *горизонтальными*.

Подчеркнем, что базисные поля на группе Карно выбираются таким образом, что каждое из них принадлежит только одному из множеств V_1 или V_2. Размерность каждого V_k обозначается символом $\dim V_k$, $k = 1, 2$. Групповая операция определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа. Если $x = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j\Bigr)(\mathbf{0})$, $y = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\Bigr)(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0}$ — единица группы $\mathbb{G}$, то

$$x \cdot y = z = \exp\Biggl(\sum_{j=1}^{N} y_j X_j\Biggr)(x) = \exp\Biggl(\sum_{j=1}^{N} z_j X_j\Biggr)(\mathbf{0}), \tag{1}$$

где $z_j = x_j + y_j$ для $\deg X_j = 1$,

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\mu,\beta : \deg X_\mu = \deg X_\beta = 1} F^j_{\mu,\beta} x_\mu y_\beta \tag{2}$$

при $\deg X_j = 2$. Значения $\bigl\{F^j_{\mu,\beta}\bigr\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами* и не зависят от точек.

Аналог расстояния на группе Карно вводится следующим образом.

Определение 2 (см., например, [17]). Пусть $w = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\Bigr)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Положим

$$d_2(v, w) = \max\Bigl\{\Bigl(\sum_{j:\deg X_j = 1} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2}}, \Bigl(\sum_{j:\deg X_j = 2} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{4}}\Bigr\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v* и обозначается символом $\mathrm{Box}_2(v, r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности, и локально для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника.

Определение 3. Рассмотрим точку $u \in \mathbb{G}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^{N} v_i X_i\Biggr)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (*относительно* $u \in \mathbb{G}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

Определение 4. Пусть $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $E \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : E \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Будем говорить, что оно *липшицево во внутреннем смысле*, или *липшицево в субримановом смысле*, если существует константа $0 < L < \infty$ такая, что

$$\widetilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y)) < L d_2(x, y),$$

где $\widetilde{d}_2$ — квазиметрика на $\widetilde{\mathbb{G}}$, построенная по такому же принципу, как в определении 2.

Определение 5 ([23]; см. также [24]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\widetilde{d}_2(\varphi(y), \mathscr{L}_x\langle y\rangle) = o(1) \cdot d_2(x, y), \text{ где } o(1) \to 0 \text{ при } \Omega \ni y \to x.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathscr{L}_x$ обозначается символом $\widehat{D}\varphi(x)$.

Хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$ относительно d_2 равна $\sum\limits_{k=1}^{2} k \dim V_k$ и обозначается символом ν.

Определение 6. Значение *субримановой меры* для $A \subset \mathbb{G}$ равно

$$\mathscr{H}^\nu(A) = \prod_{k=1}^{2} \omega_{\dim V_k} \cdot \lim_{\delta \to 0} \inf \Big\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(x_i, r_i) \supset A, \ x_i \in A, \ r_i < \delta \Big\},$$

где ω_m обозначает объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$, а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

Несмотря на нестандартное определение (в определение $\mathscr{H}^\nu(A)$ добавляется условие $x_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$), функция множества $\mathscr{H}^\nu$ является мерой. В частности, она обладает свойством счетной аддитивности на сигма-алгебре борелевских множеств (см., например, [25]).

Обозначение 7. Пусть $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группа Карно. Обозначим ее топологическую размерность и размерности составляющих алгебру Ли подпространств, отображение нормальных координат, а также, определенную аналогично d_2 квазиметрику теми же символами, что и для $\mathbb{G}$, только со знаком $\widetilde{}$.

Опишем условия решения задачи.

Предположение 8. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — двухступенчатые группы Карно с базисными полями $\{X_i\}_{i=1}^N$ и $\{\widetilde{X}_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$ соответственно, которые являются подмножествами двухступенчатой группы Карно $\widehat{\mathbb{G}}$ топологической размерности $\widehat{N} = N + \widetilde{N}$ со структурными константами $\big\{F^j_{\mu,\beta}\big\}_{j,\mu,\beta}$ и квазиметрикой $\widehat{d}_2$, заданной, как в определении 2. Пусть еще базисные векторные поля $\{\widehat{X}_i\}_{i=1}^{\widehat{N}}$ на $\widehat{\mathbb{G}}$ таковы, что, во-первых, $\dim \widehat{V}_k = \dim V_k + \dim \widetilde{V}_k$, $k = 1, 2$, и, во-вторых,*

$$\widehat{X}_1|_{\mathbb{G}} = X_1, \dots, \widehat{X}_{\dim V_1}|_{\mathbb{G}} = X_{\dim V_1},$$

$$\widehat{X}_{\dim \widehat{V}_1 + 1}|_{\mathbb{G}} = X_{\dim V_1 + 1}, \dots, \widehat{X}_{\dim \widehat{V}_1 + \dim V_2}|_{\mathbb{G}} = X_N$$

и

$$\widehat{X}_{\dim V_1 + 1}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_1, \dots, \widehat{X}_{\dim \widehat{V}_1}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\dim \widetilde{V}_1},$$

$$\widehat{X}_{\dim\widehat{V}_1+\dim V_2+1}|_{\widetilde{\mathbb{G}}}=\widetilde{X}_{\dim\widetilde{V}_1+1},\dots,\widehat{X}_{\widehat{N}}|_{\widetilde{\mathbb{G}}}=\widetilde{X}_{\widetilde{N}}.$$

Обозначение 9. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — двухступенчатые группы Карно, $\varphi:\mathbb{G}\to\widetilde{\mathbb{G}}$ и $u,w\in\mathbb{G}$. Обозначим координаты элемента $\varphi(w)$ относительно $\varphi(u)$ символами $\{\varphi_u^k(w)\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$. Иными словами,

$$\varphi(w)=\exp\Bigg(\sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\varphi_u^k(w)\widetilde{X}_k\Bigg)(\varphi(u)).$$

Обозначение 10. Положим

$$w_H=\exp\Bigg(\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}w_\beta X_\beta\Bigg)(u)\quad\text{и}\quad w_T=\exp\Bigg(\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^{N}w_\lambda X_\lambda\Bigg)(u)$$

для $w=\exp\Bigg(\sum\limits_{j=1}^{N}w_jX_j\Bigg)(u)$. Положим также

$$\varphi_u^H(w_H)=\exp\Bigg(\sum_{k=1}^{\dim\widetilde{V}_1}\varphi_u^k(w_H)\widetilde{X}_k\Bigg)(\varphi(u))$$

и

$$\varphi_u^T(w_T)=\exp\Bigg(\sum_{k=\dim\widetilde{V}_1+1}^{\widetilde{N}}\varphi_u^k(w_T)\widetilde{X}_k\Bigg)(\varphi(u)).$$

Следующий результат является основой для решения поставленной задачи о дифференциальных свойствах.

Теорема 11 [1]. *Пусть для двухступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ и $\widehat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 8 и $\varphi:\mathbb{G}\to\widetilde{\mathbb{G}}$ — некоторое отображение. Тогда график $\varphi_\Gamma:\mathbb{G}\to\widehat{\mathbb{G}}$, построенный как*

$$\mathbb{G}\ni w\mapsto\exp\Bigg(\sum_{j=\dim V_1+1}^{\dim\widehat{V}_1}\varphi_{j-\dim V_1}(w)\widehat{X}_j+\sum_{j=\dim\widehat{V}_1+\dim V_2+1}^{\widehat{N}}\varphi_{j-N}(w)\widehat{X}_j\Bigg)(w),$$

где

$$\varphi(w)=\exp\Bigg(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\varphi_j(w)\widetilde{X}_j\Bigg)(\mathbf{0}),$$

является липшицевым относительно d_2 и $\widehat{d}_2$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.

1. *Координатные функции φ_j липшицевы во внутреннем смысле, если $j\leq\dim\widetilde{V}_1$.*

2. *Если $k=\dim\widehat{V}_1+1,\dots,\dim\widehat{V}_1+\dim V_2$, то верно*

$$\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]}F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)=0\tag{3}$$

для всех $\beta=1,\dots,\dim V_1$ и $u\in\mathbb{G}$.

3. *Для $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ и точек $u, w_H \in \mathbb{G}$ таких, что*

$$w_H = \exp\Biggl(\sum_{\beta=1}^{\dim V_1} w_\beta X_\beta\Biggr)(u),$$

функция $w_H \mapsto \varphi_u^{k-N}(w_H)$ дифференцируема (в классическом смысле) в u, ее дифференциал равен

$$\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Bigl(\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} 2F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\Bigr)w_\beta,$$

а величина $o(1)$ из определения дифференцируемости не превосходит $Q\cdot\sqrt{\sum\limits_{\beta=1}^{\dim V_1}(w_\beta)^2}$, где константа $0 < Q < \infty$ не зависит от u.

Если же

$$w_T = \exp\Biggl(\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^{N} w_\lambda X_\lambda\Biggr)(u),$$

то

$$\bigl|\varphi_u^{k-N}(w_T)\bigr| \le C\cdot\sqrt{\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^{N}(w_\lambda)^2}, \quad C<\infty.$$

Перейдем к описанию и доказательству основного результата работы.

Теорема 12. *Пусть для двухступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ и $\widehat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 8 и $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — такое отображение, что его график $\varphi_\Gamma : \mathbb{G} \to \widehat{\mathbb{G}}$ является липшицевым во внутреннем смысле, а $u \in \mathbb{G}$ — произвольная точка области определения φ. Тогда функции $\{\varphi_u^k(w)\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$ обладают следующими свойствами.*

1. *Если $k = 1,\dots,\dim \widetilde{V}_1$, то каждая функция $w \mapsto \varphi_u^k(w)$ является hc-дифференцируемой в точках hc-дифференцируемости φ_Γ и значение ее hc-дифференциала в точке $u \in \mathbb{G}$ на элементе w совпадает с $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H\rangle)_{k+\dim V_1}$.*

2. *Если $k = \dim \widetilde{V}_1+1,\dots,\widetilde{N}$, то каждая функция $w_H \mapsto \varphi_u^k(w_H)$ дифференцируема по $w_1,\dots,w_{\dim V_1}$ дважды, причем значение второго дифференциала в точке u на элементе w_H равно*

$$\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^{k+N}_{\mu,\beta}(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H\rangle)_\mu w_\beta.$$

3. *Если $k = \dim \widetilde{V}_1 + 1,\dots,\widetilde{N}$, то функция $w_T \mapsto \varphi_u^k(w_T)$ дифференцируема по $w_{\dim V_1+1},\dots,w_N$ в точках u hc-дифференцируемости отображения-графика φ_Γ. Кроме того, значение дифференциала каждой такой функции в точке $u \in \mathbb{G}$ на элементе w_T равно $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_{k+N} = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_T\rangle)_{k+N}$.*

Кроме того, субриманов дифференциал липшицева отображения-графика в точках, где он существует, имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_1} & 0\\ D\varphi_u^H(u) & 0\\ 0 & E_{\dim V_2}\\ 0 & D\varphi_u^T(u)\end{pmatrix},$$

где E_l — единичная матрица размера l.

Доказательство. Пусть $u, w \in \mathbb{G}$, где $w = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\Bigr)(u)$. Тогда [1]

$$\varphi_\Gamma(w) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\widehat{N}} s_k \widehat{X}_k\right)(\varphi_\Gamma(u)),$$

где $s_k = w_k$, если $k = 1, \ldots, \dim V_1$, и $s_k = \varphi_{k-\dim V_1}(w) - \varphi_{k-\dim V_1}(u) = \varphi_u^{k-\dim V_1}(w)$, если $k = \dim V_1 + 1, \ldots, \dim \widehat{V}_1$. Тогда, так как

$$s_k = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_k + o(d_2(u,w)),$$

то

$$\varphi_u^{k-\dim V_1}(w) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_k + o(d_2(u,w)) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H\rangle)_k + o(d_2(u,w)),$$

где

$$w_H = \exp\left(\sum_{i=1}^{\dim V_1} w_i X_i\right)(u), \quad k = \dim V_1 + 1, \ldots, \dim \widehat{V}_1.$$

Иными словами, каждая функция $\varphi_u^{k-\dim V_1}(w)$ дифференцируема в субримановом смысле в точках субримановой дифференцируемости φ_Γ, и значение ее hc-дифференциала на элементе w равно $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H\rangle)_k$, $k = \dim V_1 + 1, \ldots, \dim \widehat{V}_1$. Кроме того, полагая $w = w_H$, выводим

$$\varphi_u^{k-\dim V_1}(w_H) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H\rangle)_k + o(d_2(u,w_H)),$$

где $d_2(u,w_H) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\dim V_1} (w_i)^2}$. Отсюда следует, что отображение $w_H \mapsto \varphi_u^H(w_H)$ дифференцируемо в точке u и поэтому первый блок матрицы субриманова дифференциала φ_Γ размера $\dim \widehat{V}_1 \times \dim V_1$ равен

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_1} \\ D\varphi_u^H(u) \end{pmatrix}.$$

Если же $k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \ldots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$, то

$$s_k = w_{k-\dim \widetilde{V}_1} - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta.$$

Но так как для этих значений k верно (3), то справедливо и

$$\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) = 0$$

для всех $\beta = 1, \ldots, \dim V_1$, поэтому $s_k = w_{k-\dim \widetilde{V}_1}$ для $k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \ldots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$.

Пусть теперь $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$. Тогда

$$s_k = \varphi_u^{k-N}(w) - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta$$
$$- 2\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)w_\beta. \quad (4)$$

Тогда для w и w_H в силу (2) верно $w = \exp\left(\sum\limits_{i=\dim V_1+1}^{N} w_i X_i\right)(w_H)$. Преобразуем (4) через значения $\varphi(w_H)$. Так как

$$\varphi_u^{k-N}(w) = \varphi_u^{k-N}(w_H) + \varphi_{w_H}^{k-N}(w) + \sum_{\substack{\mu,\lambda:\\ \mu,\lambda\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\lambda}\varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H)\varphi_{w_H}^{\lambda-\dim V_1}(w), \quad (5)$$

то выводим

$$s_k = \varphi_u^{k-N}(w_H) + \varphi_{w_H}^{k-N}(w) + \sum_{\substack{\mu,\lambda:\\ \mu,\lambda\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\lambda}\varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H)\varphi_{w_H}^{\lambda-\dim V_1}(w)$$
$$- \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H)w_\beta - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{w_H}^{\mu-\dim V_1}(w)w_\beta$$
$$- 2\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)w_\beta.$$

Предположим, что u — точка, в которой существует субриманов дифференциал $\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)$. Тогда из определения 5 и из (2) следует, что

$$|s_k - (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_k| = o(d_2(u,w)^2).$$

Полагая $w = w_H$, получаем $d_2(u,w_H)^2 = \sum\limits_{i=1}^{\dim V_1}(w_i)^2$, и $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_k = 0$ для всех $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$, поэтому

$$\varphi_u^{k-N}(w_H) - 2\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)w_\beta$$
$$- \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H)w_\beta = o\left(\sum_{i=1}^{\dim V_1}(w_i)^2\right). \quad (6)$$

Так как

$$\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H)w_\beta$$
$$= \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}((\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H\rangle)_\mu + o(d_2(u,w_H)))w_\beta$$
$$= \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H\rangle)_\mu w_\beta + o(d_2(u,w_H)^2), \quad (7)$$

то из (6) выводим усиление теоремы 11, а именно, что каждая функция $w_H \mapsto \varphi_u^{k-N}(w_H)$ дифференцируема по $w_1,\dots,w_{\dim V_1}$ дважды, причем значение второго дифференциала в точке u на элементе w_H равно

$$\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H\rangle)_\mu w_\beta$$

для всех $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$.

Далее, имеем

$$s_k = \varphi_{w_H}^{k-N}(w) + \sum_{\substack{\mu,\lambda:\\ \mu,\lambda\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\lambda}\varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H)\varphi_{w_H}^{\lambda-\dim V_1}(w)$$

$$- \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{w_H}^{\mu-\dim V_1}(w)w_\beta + o\Biggl(\sum_{i=1}^{\dim V_1}(w_i)^2\Biggr)$$

$$= (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_k + o(d_2(u,w)^2).$$

В полученном соотношении $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_k$ не зависит от координат элемента w_H. Поэтому рассмотрим случай, когда все эти координаты равны нулю. Тогда получим $w_H = u$, $w = w_T$ и поэтому

$$(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_k + o(d_2(u,w_T)^2) = \varphi_u^{k-N}(w_T), \tag{8}$$

где $w_T = \exp\Biggl(\sum\limits_{\lambda=\dim V_1+1}^{N} w_\lambda X_\lambda\Biggr)(u)$ (см. также теорему 11). Так как $d_2(u,w_T)^2 = \sqrt{\sum\limits_{\lambda=\dim V_1+1}^{N}(w_\lambda)^2}$, то (8) означает, что функция

$$w_T \mapsto \varphi_u^{k-N}(w_T)$$

дифференцируема по $w_{\dim V_1+1},\dots,w_N$ в точках u субримановой дифференцируемости отображения-графика φ_Γ для всех $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$. Кроме того, значение ее дифференциала в точке u на элементе w_T равно $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_k = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_T\rangle)_k$, $k = \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2,\dots,\widehat{N}$.

Отсюда и из (2) следует, что отображение $w_T \mapsto \varphi_u^T(w_T)$ является дифференцируемым в точке u, и поэтому второй блок матрицы субриманова дифференциала φ_Γ размера $\dim \widehat{V}_2 \times \dim V_2$ равен

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_2} \\ D\varphi_u^T(u) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы вывели дифференциальные свойства функций $\{\varphi_u^k(w)\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$, и получили вид субриманова дифференциала отображения-графика φ_Γ в точках $u \in \mathbb{G}$ его hc-дифференцируемости:

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_1} & 0 \\ D\varphi_u^H(u) & 0 \\ 0 & E_{\dim V_2} \\ 0 & D\varphi_u^T(u) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Теорема доказана.

Пример 13. Пусть $\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}} \subset \widehat{\mathbb{G}}$ таковы, что $[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] = 0$, если $i = 1,\dots,\dim V_1$ и $j = \dim V_1 + 1,\dots,\dim \widehat{V}_1$, а $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ липшицево во внутреннем смысле. Тогда (6) имеет вид

$$\varphi_u^{k-N}(w_H) = o\Biggl(\sum_{i=1}^{\dim V_1}(w_i)^2\Biggr).$$

Пример 14. Пусть $\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}} \subset \widehat{\mathbb{G}}$ таковы, что существует ненулевое решение $(t_{\dim V_1+1}, \dots, t_{\dim \widehat{V}_1})$ у системы уравнений

$$\sum_{\mu=\dim V_1+1}^{\dim \widehat{V}_1} F^k_{\mu,\beta} t_\mu = 0,\ k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2,\ \beta = 1, \dots, \dim V_1.$$

Для $\mu = \dim V_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1$ положим $\varphi_{\mu-\dim V_1} \equiv t_\mu$. Если же $\mu = \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2 + 1, \dots, \widehat{N}$, то для $w = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(\mathbf{0})$ определим

$$\varphi_{\mu-N}(w) = \sum_{\beta=1}^{\dim V_1} \Big(\sum_{\lambda:\lambda\in[\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]} 2F^\mu_{\lambda,\beta} \varphi_{\lambda-\dim V_1} \Big) w_\beta.$$

для всех $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$. Тогда вторые производные $\varphi_{\mu-N}(w)$ по $w_1, \dots, w_{\dim V_1}$ и первые производные $\varphi_{\mu-N}(w)$ по $w_{\dim V_1+1}, \dots, w_N$ равны нулю.

Из теоремы 12 в качестве следствия получаем формулу площади для липшицевых отображений-графиков. Обратим внимание, что ее вид является аналогичным классическому.

Теорема 15. *В условиях теоремы* 12 *справедлива формула площади для отображений-графиков*

$$\int\limits_A \mathscr{J}(\varphi_\Gamma, x)\, d\mathscr{H}^\nu(x) = \mathscr{H}^\nu(\varphi_\Gamma(A)),$$

где $A \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, $\mathscr{J}(\varphi_\Gamma, x)$ совпадает со значением

$$\sqrt{\det\big(E_{\dim V_1} + (D\varphi^H_x)^*(x) D\varphi^H_x(x)\big) \cdot \big(E_{\dim V_2} + \big(D\varphi^T_x\big)^*(x) D\varphi^T_x(x)\big)},$$

а $\mathscr{H}^\nu$ на $\varphi_\Gamma(\mathbb{G})$ задается аналогично определению 6 *и является мерой.*

Для получения второго основного результата нам потребуется следующее

Определение 16 [26]. Пусть $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно и $\xi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Пусть еще $\mathfrak{d} : \xi(\mathbb{G}) \to \mathbb{R}_+$. Будем говорить, что ξ *полиномиально субриманово дифференцируемо*, или *полиномиально hc-дифференцируемо* в $x \in \mathbb{G}$, если существует отображение $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такое, что

1) $\mathfrak{d}(\xi(y), \mathscr{L}_x\langle y\rangle) = o(d_2(x, y))$ при $y \to x$;

2) $\mathscr{L}_x\langle y\rangle = \theta_{\xi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(y)$, где L_x — оператор с полиномиальными по $y_1, \dots, y_N$ коэффициентами, а $y = \theta_x(y_1, \dots, y_N)$.

Отображение $\mathscr{L}_x$ называется *полиномиальным субримановым дифференциалом*, или *полиномиальным hc-дифференциалом*, отображения ξ в точке x и обозначается символом $\widehat{D}_P\xi(x)$.

Предположим теперь, что отображение-график φ_Γ является контактным отображением класса C^1_H и липшицевым, т. е. производные φ_Γ вдоль горизонтальных полей существуют и непрерывны и, кроме того, $\operatorname{span}\big\{X_1\varphi_\Gamma, \dots, X_{\dim V_1}\varphi_\Gamma\big\} \subset \widehat{V}_1$. Такие отображения являются непрерывно hc-дифференцируемыми всюду [24]. В этом случае аналог дифференциальных свойств φ можно описать в явном виде.

Теорема 17. *Пусть выполнены условия теоремы* 12 *и отображение-график* φ_Γ *является контактным отображением класса* C_H^1 *и липшицевым.*

Тогда φ *является полиномиально субримановo дифференцируемым всюду, и для* $u \in \mathbb{G}$ *и* w *из окрестности точки* u *верно*

$$\widehat{D}_P\varphi(u)\langle w\rangle = \exp\Biggl(\sum_{k=1}^{\widetilde{N}} P_u^k(w)\widetilde{X}_k\Biggr)(\varphi(u)),$$

где

$$P_u^k(w) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_{k+\dim V_1},\ \text{если } k = 1,\dots,\dim\widetilde{V}_1,$$

и

$$P_u^k(w) = 2\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[1,\dim\widetilde{V}_1]}} F^{k+N}_{\mu+\dim V_1,\beta}\varphi_\mu(u)w_\beta + \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]}} F^{k+N}_{\mu,\beta}(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_\mu w_\beta + (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_{k+N},$$

если $k = \dim\widetilde{V}_1 + 1,\dots,\widetilde{N}$.

Доказательство. Пусть $u, w \in \mathbb{G}$, где $w = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} w_iX_i\Bigr)(u)$. В теореме 12 установлено, что

$$\varphi_u^k(w) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_{k+\dim V_1} + o(d_2(u,w)) \tag{10}$$

для $k = 1,\dots,\dim\widetilde{V}_1$. Обозначим

$$P_u^k(w) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_{k+\dim V_1}. \tag{11}$$

Заметим, что для всех $k = 1,\dots,\dim\widetilde{V}_1$ верно $P_u^k(w_H) = P_u^k(w)$, где $w_H = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{\dim V_1} w_iX_i\Bigr)(u)$.

Пусть теперь $k = \dim\widetilde{V}_1 + 1,\dots,\widetilde{N}$. Из (6) и (7) следует, что для w_H выполняется

$$\varphi_u^k(w_H) = 2\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[1,\dim\widetilde{V}_1]}} F^{k+N}_{\mu+\dim V_1,\beta}\varphi_\mu(u)w_\beta + \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]}} F^{k+N}_{\mu,\beta}(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H\rangle)_\mu w_\beta + o\Biggl(\sum_{i=1}^{\dim V_1}(w_i)^2\Biggr),$$

причем $\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H\rangle = \widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle$. Положим

$$P_u^{k,1}(w) = 2\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[1,\dim\widetilde{V}_1]}} F^{k+N}_{\mu+\dim V_1,\beta}\varphi_\mu(u)w_\beta + \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]}} F^{k+N}_{\mu,\beta}(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_\mu w_\beta. \tag{12}$$

Из (5) выводим

$$\begin{aligned}\varphi_u^k(w) &= P_u^{k,1}(w) + \varphi_{w_H}^k(w)\\ &\quad + \sum_{\substack{\mu,\lambda:\\ \mu,\lambda\in[1,\dim \widetilde{V}_1]}} F^{k+N}_{\mu+\dim V_1,\lambda+\dim V_1} P_u^{\mu}(w_H) P_{w_H}^{\lambda}(w) + o(d_2(u,w)^2).\end{aligned}$$

Так как $P_{w_H}^{\lambda}(w) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(w_H)\langle w\rangle)_{\lambda+\dim V_1}$, то $P_{w_H}^{\lambda}(w) = 0$. Тогда

$$\varphi_u^k(w) = P_u^{k,1}(w) + \varphi_{w_H}^k(w) + o(d_2(u,w)^2). \tag{13}$$

Далее, из (8) следует, что

$$\varphi_{w_H}^k(w) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(w_H)\langle w\rangle)_{k+N} + o(d_2(w_H,w)^2). \tag{14}$$

По предположению значения $\widehat{D}\varphi_\Gamma(s)$ непрерывны по $s \in \mathbb{G}$, поэтому для всякого элемента v такого, что $d_2(\mathbf{0},v) = 1$, верно (см. обозначение и описание умножения в (1))

$$\widetilde{d}_R(\widehat{D}\varphi_\Gamma(s)\langle s\cdot v\rangle, \widehat{D}\varphi_\Gamma(s')\langle s'\cdot v\rangle) = o(1),$$

где $\widetilde{d}_R$ — расстояние, построенное по риманову тензору на $\widetilde{\mathbb{G}}$, и $o(1) \to 0$ при $s' \to s$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{G}$. Следовательно, для $w_T = \exp\left(\sum\limits_{\lambda=\dim V_1+1}^{N} w_\lambda X_\lambda\right)(u)$ верно

$$d_R(\widehat{D}\varphi_\Gamma(w_H)\langle w\rangle, \widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_T\rangle) = o(1)\cdot d_R(u,w_T),$$

где $o(1)$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{G}$. Так как $d_R(u,w_T) \le K\cdot(d_2(u,w_T)^2)$ для $K<\infty$ на компактных подмножествах $\mathbb{G}$, то

$$|(\widehat{D}\varphi_\Gamma(w_H)\langle w\rangle)_{k+N} - (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_T\rangle)_{k+N}| = o(1)\cdot d_2(u,w_T)^2 \tag{15}$$

для $k = \dim\widetilde{V}_1 + 1,\dots,\widetilde{N}$. Из (14) и (15) выводим

$$\varphi_{w_H}^k(w) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_T\rangle)_{k+N} + o(d_2(u,w)^2) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_{k+N} + o(d_2(u,w)^2).$$

Полагая

$$P_u^{k,2}(w) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w\rangle)_{k+N} \tag{16}$$

и $P_u^k(w) = P_u^{k,1}(w) + P_u^{k,2}(w)$, с учетом (13) получаем

$$\varphi_u^k(w) = P_u^k(w) + o(d_2(u,w)^2) \tag{17}$$

для всех $k = \dim\widetilde{V}_1 + 1,\dots,\widetilde{N}$.

Таким образом, мы получили аппроксимацию функций $\{\varphi_u^k(w)\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$ для произвольных $u\in\mathbb{G}$ и w из окрестности u. Осталось показать, что отображение $w\mapsto \widehat{D}_P\varphi(u)\langle w\rangle$, определенное как

$$\mathbb{G}\ni w\mapsto \exp\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{N}} P_u^k(w)\widetilde{X}_k\right)(\varphi(u)), \tag{18}$$

аппроксимирует значение $\varphi(w)$ относительно $\widetilde{d}_2$, т. е. что

$$\widetilde{d}_2(\varphi(w), \widehat{D}_P\varphi(u)\langle w\rangle) = o(d_2(u,w)),$$

где $o(1)\to 0$ при $w\to u$. Для этого воспользуемся формулами групповой операции (см. (2)) и применим их к выражениям (11), (12) и (16).

Пусть

$$\varphi(w)=\exp\biggl(\sum_{l=1}^{\widetilde{N}}\delta_l\widetilde{X}_l\biggr)(\widehat{D}_P\varphi(u)\langle w\rangle).$$

Тогда если $l=1,\dots,\dim\widetilde{V}_1$, то из (10) и (11) следует, что $|\delta_l|=o(d_2(u,w))$.

Пусть теперь $l=\dim\widetilde{V}_1+1,\dots,\widetilde{N}$. Тогда

$$\delta_l=\varphi_u^l(w)-P_u^l(w)-\sum_{\substack{\mu,\lambda:\\ \mu,\lambda\in[1,\dim\widetilde{V}_1]}}F^{l+N}_{\mu+\dim V_1,\lambda+\dim V_1}\varphi_u^\mu(w)P_u^\lambda(w).$$

Из (17) следует, что $\bigl|\varphi_u^l(w)-P_u^l(w)\bigr|=o(d_2(u,w)^2)$. Далее, из (10), (11), антисимметричности $F^j_{\alpha,\beta}=-F^j_{\beta,\alpha}$ всех структурных констант и того, что в силу теоремы 11

$$\max\bigl\{|\varphi_u^\mu(w)|,|P_u^\lambda(w)|\bigr\}\le L\cdot d_2(u,w)$$

для всех $\mu,\lambda=1,\dots,\dim\widetilde{V}_1$ и некоторого $L<\infty$, вытекает

$$\Bigl|\sum_{\substack{\mu,\lambda:\\ \mu,\lambda\in[1,\dim\widetilde{V}_1]}}F^{l+N}_{\mu+\dim V_1,\lambda+\dim V_1}\varphi_u^\mu(w)P_u^\lambda(w)\Bigr|=o(d_2(u,w)^2).$$

Поэтому и $|\delta_l|=o(d_2(u,w)^2)$ для $l=\dim\widetilde{V}_1+1,\dots,\widetilde{N}$.

Таким образом, отображение φ является полиномиально субримановo дифференцируемым всюду. Явный вид описан в (11), (12), (16), а также в (10), (17) и (18). Теорема доказана.

Замечание 18. Как видно из доказательства теоремы 17, липшицевость во внутреннем смысле координатных функций φ при горизонтальных полях существенна для полиномиальной субримановой дифференцируемости.

Из результатов теоремы 17 следует, что для $\widetilde{N}\ge N$ при дополнительных предположениях гладкости класса C^2 по $w_1,\dots,w_{\dim V_1}$ и класса C^1 по $w_{\dim V_1+1},\dots,w_N$ функций $\varphi_u^k(w)$, $k=1,\dots,\dim\widetilde{V}_1$, а также биективности на свой образ отображения φ, выполняются условия работы [26]. Поэтому для φ применимы результаты об адаптированном базисе и формуле площади.

Определение 19 [26]. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно и $\xi:\mathbb{G}\to\widetilde{\mathbb{G}}$, $x\in\mathbb{G}$. Если координаты $\{\kappa_i\}_{i=1}^{\widetilde{N}}$ полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P\xi(x)\langle y\rangle$, рассмотренные относительно $\xi(x)$, в некотором базисе $\{Y_k\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$ обладают свойством $|\kappa_i|=O(\rho_2(x,y)^{\deg X_i})$, то базис $\{Y_k\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$ называется *внутренним*, или *адаптированным*, в точке $x\in\mathbb{G}$.

Из результатов [26] вытекает

Предложение 20. *Пусть выполнены условия теоремы* 12 *и отображение-график φ_Γ является контактным отображением класса C^1_H и липшицевым. Предположим дополнительно, что $\widetilde{N}\ge N$, а функции $\varphi_u^k(w)$ принадлежат классу C^2 по $w_1,\dots,w_{\dim V_1}$ и классу C^1 по $w_{\dim V_1+1},\dots,w_N$, $k=1,\dots,\dim\widetilde{V}_1$ для всех $u\in\mathbb{G}$, а φ биективно на свой образ. Тогда верны следующие утверждения.*

1. *В окрестности образа каждой точки* $u \in \mathbb{G}$ *существует такой адаптированный базис* $\{\widetilde{X}_l^u\}_{l=1}^{\widetilde{N}}$, *что полиномиальный субриманов дифференциал отображения* φ *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} D\varphi_u^H(u) & 0 \\ 0 & D\varphi_u^T(u) \end{pmatrix}$$

(*ср.* (9)).

2. *Функция множества, определяемая как* $\mathbb{G} \supset A \mapsto \mathscr{H}_\varphi^\nu(\varphi(A))$, *является мерой.*

Здесь значение $\mathscr{H}_\varphi^\nu(D)$, $D = \varphi(A)$, *равно*

$$\omega_{\mathbb{G}} \lim_{\delta\to 0} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2^{\varphi^{-1}(w_i)}(w_i, r_i) \supset D,\ w_i \in D,\ r_i < \delta\Big\}, \tag{19}$$

$\omega_{\mathbb{G}} = \omega_{\dim V_1}\omega_{\dim V_2}$, $\mathrm{Box}_2^{\varphi^{-1}(w)}(w,r) = \{v \in \widetilde{\mathbb{G}} : \widetilde{d}_2^{\varphi^{-1}(w)}(v,w) < r\}$, *величина* $\widetilde{d}_2^{\varphi^{-1}(w)}$ *построена так же, как в определении* 2, *с заменой исходного базиса на* $\{\widetilde{X}_l^{\varphi^{-1}(w)}\}_{l=1}^{\widetilde{N}}$, *а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества* $D = \varphi(A)$.

Также [26] для φ верна формула площади для адаптированной меры, определенной в (19).

Теорема 21. *В условиях предложения* 20 *справедлива формула площади*

$$\int\limits_A \sqrt{\det\big(\big(D\varphi_x^H\big)^*(x) D\varphi_x^H(x)\big)} \cdot \sqrt{\det\big(\big(D\varphi_x^T\big)^*(x) D\varphi_x^T(x)\big)}\, d\mathscr{H}^\nu(x) = \mathscr{H}_\varphi^\nu(\varphi(A)).$$

Здесь $D\varphi_x^H(x)$ *и* $D\varphi_x^T(x)$ *такие же, как в* (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карманова М. Б.* О липшицевых графиках на классах двухступенчатых групп Карно // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 5. С. 882–900.
2. *Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Волгоград: ВолГУ, 2011.
3. *Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
4. *Тужилин А. А., Фоменко А. Т.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
5. *Fomenko A. T. (ed.)* Minimal surfaces. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1993. V. 15.
6. *Citti G., Sarti A.* A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. 2004. V. 24, N 3. P. 307–326.
7. *Hladky R. K., Pauls S. D.* Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging and Vision. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
8. *Petitot J.* Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionelles. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
9. *Capogna L., Citti G., Manfredini M.* Regularity of non-characteristic minimal graphs in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 5. P. 2115–2160.
10. *Capogna L., Citti G., Manfredini M.* Smoothness of Lipschitz intrinsic minimal graphs in Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, $n > 1$ // J. für Reine Angew. Mathematik. 2010. V. 2010, N 648. P. 75–110.
11. *Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M.* A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing // Am. J. Math. 2008. V. 130, N 2. P. 317–339.

12. *Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M., Pauls S. D.* Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // J. Differ. Geom. 2009. V. 81, N 1. P. 251–295.

13. *Garofalo N., Pauls S. D.* The Bernstein problem in the Heisenberg group. West Lafayette, Indiana: Purdue Univ., 2005.

14. *Barbieri D., Citti G.* Regularity of minimal intrinsic graphs in 3-dimensional sub-Riemannian structures of step 2 // J. Math. Pures Appl. 2011. V. 96, N 3. P. 279–306.

15. *Julia A., Nicolussi Golo S., Vittone D.* Area of intrinsic graphs and coarea formula in Carnot groups // Math. Z. 2022. V. 301, N 2. P. 1369–1406.

16. *Corni F., Magnani V.* Area of intrinsic graphs in homogeneous groups. 2023. arXiv:2311.06638v1 [math.MG].

17. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.

18. *Карманова М. Б.* Формулы площади для классов гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1056–1079.

19. *Карманова М. Б.* Двуступенчатые сублоренцевы структуры и поверхности-графики // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84, № 1. С. 60–104.

20. *Карманова М. Б.* Площадь графиков на произвольных группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 823–848.

21. *Карманова М. Б.* Липшицевы графики на группах Гейзенберга и связанные задачи // Мат. заметки. 2025. Т. 118, № 1. С. 154–158.

22. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.

23. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // Math. Ann. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.

24. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.

25. *Карманова М. Б.* Площадь образов классов измеримых множеств на группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 926–952.

26. *Карманова М. Б.* О полиномиальной субримановой дифференцируемости некоторых гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 305–332.

Поступила в редакцию 28 июля 2025 г.
После доработки 28 июля 2028 г.
Принята к публикации 7 сентября 2025 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com