Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2025. Том 66, № 6

УДК 517.537

ДИСКРЕТНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И РЯДЫ ТЕЙЛОРА

С. Лу, О. А. Данилов, А. Д. Медных

Аннотация. Доказано, что любая дискретная параболическая функция, определенная в положительном квадранте гауссовой плоскости, допускает разложение в абсолютно сходящийся ряд Тейлора по системе псевдостепеней.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.608

Ключевые слова: Целая функция, дискретная параболическая функция, ряд Тейлора, теорема Гельфонда — Шеффера.

§ 1. История вопроса

1.1. Основные понятия. Обозначим через $\mathbb{G}$ *гауссову плоскость* $\mathbb{G} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{Z}\}$ и через $\mathbb{G}^+$ — *положительный квадрант* гауссовой плоскости $\mathbb{G}^+ = \{z \in \mathbb{G} : x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Комплекснозначная функция $f : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ называется *дискретной аналитической функцией первого рода* на тройке $\{z; z+1; z+i\}$, если справедливо соотношение

$$\frac{f(z+i) - f(z)}{i} = f(z+1) - f(z). \tag{1}$$

Если соотношение (1) верно для любой тройки $\{z; z+1; z+i\} \subset E$ для некоторого множества $E \subset \mathbb{G}$, то f является *дискретной аналитической функцией первого рода на* E. Множество всех таких функций обозначим через $\mathscr{D}_1(E)$.

Соотношение (1) является дискретным аналогом уравнений Коши — Римана для классических аналитических функций.

Действительно, для векторов $z_1 = (z+1) - z = 1$, $z_2 = (z+i) - z = i$, $w_1 = f(z+1) - f(z)$ и $w_2 = f(z+i) - f(z)$ из равенства (1) получим

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{f(z+i) - f(z)}{f(z+1) - f(z)} = \frac{i}{1} = \frac{z_2}{z_1}. \tag{2}$$

Так как $|z_2| = |z_1| = 1$, из (2) следует

$$|w_2| = |w_1|, \quad w_2 = iw_1, \tag{3}$$

откуда

$$\widehat{w_1, w_2} = \frac{\pi}{2} = \widehat{z_1, z_2}. \tag{4}$$

Работа С. Лу выполнена при поддержке Китайского Стипендиального Фонда, проект 202110100026. Работа А. Д. Медных выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0005.

Равенства (3) и (4) утверждают постоянство искажения масштаба отображением f и свойство консерватизма углов на тройке $\{z; z+1; z+i\}$. Это аналог конформности для классических аналитических функций.

Комплекснозначная функция $f\colon \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ называется *дискретной аналитической функцией второго рода* на квадрате $\{z; z+1; z+1+i; z+i\}$ если справедливо равенство

$$\frac{f(z+1+i)-f(z)}{1+i} = \frac{f(z+i)-f(z+1)}{i-1} \tag{5}$$

или, что то же самое,

$$\overline{\partial} f(z) = f(z) + if(z+1) + i^2 f(z+1+i) + i^3 f(z+i) = 0. \tag{6}$$

Если соотношение (5) верно на любом квадрате $\{z; z+1; z+1+i; z+i\} \subset E$ для некоторого множества $E \subset \mathbb{G}$, то f называется *дискретной аналитической функцией второго рода на E*. Множество всех таких функций обозначим через $\mathscr{D}_2(E)$.

Соотношение (5) также является дискретным аналогом уравнений Коши — Римана.

Для векторов

$$z_1 = (z+1+i) - z = 1+i, \quad z_2 = (z+i) - (z+1) = i-1,$$

$$w_1 = f(z+1+i) - f(z), \quad w_2 = f(z+i) - f(z+1)$$

из (5) имеем равенство

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{i-1}{1+i} = i. \tag{7}$$

Так как $|z_2| = |z_1| = \sqrt{2}$, получаем из (7), что

$$|w_2| = |w_1|, \quad w_2 = iw_1, \tag{8}$$

откуда

$$\widehat{w_1, w_2} = \frac{\pi}{2} = \widehat{z_1, z_2}. \tag{9}$$

И в этом случае из равенств (8) и (9) получается свойство постоянства искажения масштаба отображения f и свойство консерватизма углов на четверке $\{z; z+1; z+1+i; z+i\}$.

1.2. Линейная теория. Теория дискретных аналитических функций восходит к работам Айзекса 40-х гг. прошлого столетия. В своих исследованиях Айзекс [1] ввел дискретные аналитические функции первого и второго рода и исследовал функции первого рода. Все работы, основанные на линейных соотношениях (1) и (5), получили название «линейная теория дискретных аналитических функций».

Далее, в 1944 г. Ферран [2] начала исследовать дискретные аналитические функции второго рода. Базисные свойства для дискретных аналитических функций второго рода, аналогичные свойствам классических аналитических функций, были установлены в работе Даффина [3]. С. Л. Соболев [4] получил важные результаты, связанные с поведением дискретных аналитических и гармонических функций на бесконечности.

Новые комбинаторные и аналитические идеи Цайльбергера [5] дали импульс к развитию теории. Эти идеи развил и обобщил А. Д. Медных в исследовании [6].

Новое понимание природы дискретных аналитических функций было предложено Даффиным в [7] Здесь гауссова решетка $\mathbb{G}$ была заменена графом с ромбическими гранями. Эти идеи далеко продвинул Мерка [8], где линейная теория дискретных аналитических функций была распространена на случай дискретных римановых поверхностей. Кэниён [9] построил функцию Грина для оператора Дирака на ромбических графах. Этот подход позволил получить важные результаты в теории кодирования Идальго [10]. В работах И. А. Дынникова и С. П. Новикова [11] изучены дискретные аналитические функции на треугольных и шестиугольных решетках.

1.3. Нелинейная теория. Помимо дискретных аналитических функций первого и второго рода, определенных формулами (1) и (5), развивалась нелинейная теория, основанная на идеях Тёрстона [12] и его учеников.

Пусть $f : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ — функция, удовлетворяющая на каждой четверке $\{z; z+1; z+1+i; z+i\}$ соотношению

$$\frac{(f(z+1) - f(z))(f(z+1+i) - f(z+i))}{(f(z+i) - f(z))(f(z+1+i) - f(z+1))} = -1. \tag{10}$$

Нелинейное соотношение (10) введено в работе [13] и определяет шаровые упаковки. Более глубокие комбинаторные идеи и обобщения шаровых упаковок на произвольные четырехугольные графы даны в работе [14]. Этот подход показывает, что шаровые упаковки являются естественным дискретным аналогом аналитических функций [15–18].

Одним из важнейших результатов в этом направлении является доказательство того, что голоморфное отображение в классической теореме Римана может быть аппроксимировано шаровыми упаковками [19–21].

Вариационный подход к шаровым упаковкам обсуждается в работе [22].

До недавнего времени линейная и нелинейная теории развивались раздельно. В [23] показано, что в некотором точном смысле первая теория является линеаризацией второй теории.

После 2000-х число работ в области дискретных аналитических функций значительно выросло, поэтому очень трудно упомянуть все замечательные результаты с этого момента.

В 2010 г. С. Смирнов получил медаль Филдса. В своих исследованиях он активно использовал идеи и методы теории дискретных аналитических функций.

1.4. Применение в численных методах. История развития численных методов решения уравнения теплопроводности начинается с первой работы немецкого математика Рунге [24], вышедшей в 1908 г. В ней был описан метод сеток, основанный на замене производных, входящих в дифференциальное уравнение, разностными отношениями.

Одной из важнейших работ в этой области стала монография советского математика Ш. Е. Микеладзе [25], вышедшая в свет в 1936 г. С 1932 г. начали печататься работы Д. Ю. Панова, а в 1938 г. вышла его книга, в которой собраны ценные практические результаты [26]. С появлением этих работ задача численного интегрирования уравнений в частных производных получила твердые основания для своего теоретического и практического развития.

1.5. Основные результаты. Пусть $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ — пространство целых аналитических функций, а $\mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$ — пространство дискретных параболических функций, определенное ниже.

В § 2 введены псевдостепени $\pi_k(z)$ в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$. Установлено, что для них выполнены свойства (A1)–(A3) (теоремы 1 и 2).

В § 3 доказано, что оператор $\Theta : \mathscr{A}(\mathbb{C}) \to \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$ корректно определен, удовлетворяет свойству (A4) и таким образом является оператором эволюции (теоремы 3 и 4).

Теорема 5 устанавливает сюръективность отображения $\Theta : \mathscr{A}(\mathbb{C}) \to \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$, откуда следует существование разложения в ряд Тейлора произвольной дискретной параболической функции.

Теорема 6 дает описание ядра отображения $\Theta : \mathscr{A}(\mathbb{C}) \to \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$.

§ 2. Дискретные параболические функции

2.1. Определение. Пусть $\mathbb{G}$ — гауссова плоскость, $f(z) = f(x, y)$ — комплекснозначная функция, определенная на $\mathbb{G}$. Тогда f — *дискретная параболическая функция на* $\mathbb{G}$, если для любой четверки

$$\Gamma = \{z + i, z, z + 1, z + 2\} \in \mathbb{G}$$

справедливо соотношение

$$f(z + i) - f(z) = f(z + 2) - 2f(z + 1) + f(z) \tag{11}$$

или, что то же самое,

$$Lf(z) = -f(z + i) + f(z + 2) - 2f(z + 1) + 2f(z) = 0. \tag{12}$$

Если соотношение (11) верно для любой четверки $\Gamma = \{z + i; z; z + 1; z + 2\}$, принадлежащей некоторому подмножеству $E \subset \mathbb{G}$, то f — *дискретная параболическая функция* на $E \subset \mathbb{G}$. Обозначим множества всех дискретных параболических функций на E и $\mathbb{G}$ через $\mathscr{D}(E)$ и $\mathscr{D}(\mathbb{G})$ соответственно. Оператор L, определенный формулой (12), является дискретным аналогом оператора теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, определенного на классических гладких функциях.

Интересен случай схемы, которая определяется уравнением $f(z+1)-2f(z)+f(z-1) = f(z+i) - f(z)$. Он приводит к изучению дискретных параболических функций, заданных в нижней половине положительного квадранта гауссовой плоскости. Однако в такой ситуации не получается корректно определить оператор эволюции и восстановить на положительном квадранте дискретную параболическую функцию по начальным значениям, заданным на положительной полуоси.

2.2. От разностного уравнения к экспоненте. Воспользуемся фундаментальным фактом (см. [27]), что решение большинства разностных уравнений является линейной комбинацией экспонент. Покажем, как естественным образом прийти к понятию экспоненты разностного уравнения. Будем искать решение уравнения (12) в виде

$$f(\zeta, z) = a^x(\zeta) \cdot b^y(\zeta) \tag{13}$$

для некоторых аналитических функций $a(\zeta)$, $b(\zeta)$, где $\zeta \in \mathscr{U}(0, r)$ для некоторого $r > 0$, $z = x+iy \in \mathbb{G}^+$. Подставив выражение из (13) для $f(\zeta, z)$ в формулу (12), получим

$$Lf(z) = a^x b^y(-b + a^2 - 2a + 2) = 0 \tag{14}$$

при всех $z = x + iy \in \mathbb{G}^+$. Отсюда следует, что

$$b(\zeta) = a^2(\zeta) - 2a(\zeta) + 2 = (a(\zeta) - 1)^2 + 1. \tag{15}$$

Потребуем дополнительно, чтобы

$$a(\zeta) \sim 1 + \zeta \text{ при } \zeta \to 0.$$

В частности, подходит $a(\zeta) = e^{\zeta}$. Тогда из формулы (15)

$$b(\zeta) = (e^{\zeta} - 1)^2 + 1 = e^{2\zeta} - 2e^{\zeta} + 2 \tag{16}$$

и, значит, в качестве $f(\zeta, z)$ подходит функция

$$f(\zeta, z) = e(\zeta, z) = e(\zeta, x, y) = e^{\zeta x}((e^{\zeta} - 1)^2 + 1)^y. \tag{17}$$

Функция $e(\zeta, z)$, определяемая формулой (17), называется *экспонентой разностного уравнения* (12). Для нее при всех $z_1, z_2 \in \mathbb{G}^+$ и $\zeta \in \mathbb{C}$ верно соотношение

$$e(\zeta, z_1 + z_2) = e(\zeta, z_1) \cdot e(\zeta, z_2). \tag{18}$$

2.3. Псевдостепени $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ и их свойства.

2.3.1. Определение функций $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{G}^+$. Положим

$$\partial_0^k e(\zeta, z) = \left.\frac{d^k e(\zeta, z)}{d\zeta^k}\right|_{\zeta=0}, \ k = 1, 2, \dots, \quad \partial_0^0 e(\zeta, z) = e(0, z), \ k = 0.$$

Рассмотрим разложение функции $e(\zeta, z)$ с центром в $\zeta_0 = 0$ по степеням ζ, где $\zeta \in \mathbb{C}$:

$$e(\zeta, z) = e(\zeta, x, y) = e^{\zeta x}((e^{\zeta} - 1)^2 + 1)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!}\zeta^k, \text{ где } \pi_k(x, y) := \pi_k(x + iy). \tag{19}$$

Очевидно, что верны равенства

$$\pi_k(z) = \partial_0^k e(\zeta, z), \ k = 1, 2, \dots, \quad \pi_0(z) = \partial_0^0 e(\zeta, z) = e(0, z) \equiv 1. \tag{20}$$

В частности, для $k = 0, 1, 2$ имеем $\pi_0(z) = 1$, $\pi_1(z) = x$, $\pi_2(z) = x^2 + 2y$.

Замечание 1. Для экспоненты

$$e_1(\zeta, z) = e_1(\zeta, x, y) = ((1 + i)e^{\frac{\zeta}{1+i}} - i)^x \cdot ((1 - i)^{\frac{-\zeta}{1+i}} + i)^y, \tag{21}$$

где $\zeta \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{G}^+$, многочлены $p_k(z)$, определенные по формулам

$$p_k(z) = \partial_0^k e_1(\zeta, z), \ k = 1, 2, \dots, \quad p_0(z) = \partial_0^0 e_1(\zeta, z) = e(0, z) \equiv 1, \tag{22}$$

введены в [5].

2.3.2. Рекуррентные соотношения для псевдостепеней $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$.

Теорема 1. *Для функций $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, определенных формулой* (20), *справедливо рекуррентное соотношение*

$$\pi_{k+1}(x, y) = x\pi_k(x, y) + 2y\pi_k(x, y) + 2y\pi_k(x + 1, y - 1) - 4y\pi_k(x, y - 1). \tag{23}$$

Доказательство. Выполним цепочку преобразований при $k = 0, 1, 2, \dots$ по формуле (20):

$$\pi_{k+1}(z) = \partial_0^{k+1} e(\zeta, z) = \partial_0^k \left(\frac{\partial}{\partial\zeta} e(\zeta, z)\right) = \partial_0^k((e^{\zeta x} \cdot (e^{2\zeta} - 2e^{\zeta} + 2)^y)'_{\zeta})$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_0^k(xe^{\zeta x}(e^{2\zeta}-2e^{\zeta}+2)^y + e^{\zeta x}\cdot y(e^{2\zeta}-2e^{\zeta}+2)^{y-1}\cdot(2e^{2\zeta}-2e^{\zeta}))\\
&= \partial_0^k(xe(\zeta,z) + 2ye^{\zeta x}(e^{2\zeta}-2e^{\zeta}+2)^{y-1}\cdot(e^{2\zeta}-2e^{\zeta}+e^{\zeta}+2-2))\\
&= x\partial_0^k e(\zeta,z) + 2y\partial_0^k e(\zeta,z) + 2y\partial_0^k(e^{\zeta x}(e^{2\zeta}-2e^{\zeta}+2)^{y-1}\cdot(e^{\zeta}-2))\\
&= x\pi_k(z)+2y\pi_k(z)+2y\partial_0^k(e^{\zeta(x+1)}\cdot(e^{2\zeta}-2e^{\zeta}+2)^{y-1})-4y\partial_0^k(e^{\zeta x}(e^{2\zeta}-2e^{\zeta}+2)^{y-1})\\
&= x\pi_k(z)+2y\pi_k(z)+2y\pi_k(x+1,y-1)-4y\pi_k(x,y-1).
\end{aligned}
$$

Замечание 2. Из теоремы 1 по индукции получим равенства $\pi_k(x,0)=x^k$, $k=0,1,2,\dots$.

2.3.3. Свойства системы функций $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$. В этом пункте установим основные свойства системы функций $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$.

Теорема 2. *Для системы функций $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, определенной формулой* (20), *справедливы следующие утверждения:*

(A1) $\pi_k(0)=0$ *при* $k=1,2,\dots$;

(A2) *для любых* $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, $z_1,z_2\in\mathbb{G}^+$, *при любом целом неотрицательном* k

$$\pi_k(z_1+z_2)=\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\pi_s(z_1)\pi_{k-s}(z_2); \tag{24}$$

(A3) $\pi_0(z)=1$, $\pi_k(z)$ — *многочлен, для которого верно следующее равенство:*

$$\pi_k(z)=\pi_k(x,y)=x^k+\sigma_{k-1}(x,y), \tag{25}$$

где $\sigma_{k-1}(x,y)$ — *многочлен степени* $\le k-1$.

Доказательство. Свойство (A1) очевидно. При вычислении производных $\partial^k e(\zeta,z)$ получим слагаемые, содержащие x и y, которые при $x=0$ и $y=0$ обращаются в нуль.

Свойство (A2) установим по формуле Лейбница:

$$
\begin{aligned}
\pi_k(z_1+z_2) &= \partial_0^k e(\zeta,z_1+z_2)=\partial_0^k[e(\zeta,z_1)\cdot e(\zeta,z_2)]\\
&= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\partial_0^s e(\zeta,z_1)\cdot\partial_0^{k-s}e(\zeta,z_2)=\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\pi_s(z_1)\cdot\pi_{k-s}(z_2).
\end{aligned}
$$

Методом математической индукции установим свойство (A3). Имеем $\pi_0(z)=e(0,z)=1$.

База. Для $k=1$ по формуле (23) получим

$$
\begin{aligned}
\pi_1(x,y) &= x\pi_0(x,y)+2y\pi_0(x,y)+2y\pi_0(x+1,y-1)-4y\pi_0(x,y-1)\\
&= x\cdot 1+2y\cdot 1+2y\cdot 1-4y\cdot 1=x.
\end{aligned}
$$

Предположим, что для $k\in\mathbb{N}$ верно

$$\pi_k(x,y)=x^k+\sigma_{k-1}(x,y).$$

Тогда для $k+1$ из формулы (23) следует:

$$
\begin{aligned}
\pi_{k+1}(x,y) &= x\pi_k(x,y)+2y\pi_k(x,y)+2y\pi_k(x+1,y-1)-4y\pi_k(x,y-1)\\
&= x(x^k+\sigma_{k-1}(x,y))+2y(x^k+\sigma_{k-1}(x,y))+2y((x+1)^k+\sigma'_{k-1}(x,y))\\
&- 4y(x^k+\sigma''_{k-1}(x,y)) = x^{k+1}+2yx^k+2yx^k-4yx^k+\widetilde{\sigma}_k(x,y)=x^{k+1}+\widetilde{\sigma}_k(x,y),
\end{aligned}
$$

где

$$\widetilde{\sigma}_k(x,y) = x\cdot\pi_{k-1}(x,y) + 2y\sigma_{k-1}(x,y) + 2y\sigma'_{k-1}(x,y) - 4y\sigma''_{k-1}(x,y) + 2y\cdot k\cdot x^{k-1} \\ + \text{ слагаемые степени } \le k-1.$$

Таким образом, свойство (A3) доказано.

Теоремы 1, 2 аналогичны лемме 1 работы [28].

2.3.4. Определение. Пусть $\mathscr{B} = \{p_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ — система полиномов $p_k(z) \in \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$. $k = 0, 1, 2, \ldots$. Система $\mathscr{B}$ называется *системой псевдостепеней*, если для нее выполнены свойства (A1), (A2), (A3).

Замечание 3. В частности, система $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ является системой псевдостепеней. Псевдостепени $\{p_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ являются дискретным аналогом классических аналитических функций $\{\zeta^k\}_{k=0}^{\infty}$ и будут активно использоваться в дальнейшем.

§ 3. Соотношения между классическими аналитическими и дискретными аналитическими функциями

3.1. Определение. Пусть $f(z) \in \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$, $p_k(z)$ — некоторая система псевдостепеней. По аналогии с классической теорией равенство

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(z) \tag{26}$$

называется *тейлоровским разложением* функции $f(z)$ на $\mathbb{G}^+$, если оно выполнено для всех $z \in \mathbb{G}^+$ и ряд, стоящий в правой части (26), сходится абсолютно.

Цайльбергер [5] поставил следующие два вопроса.

(Q1) Всякая ли дискретная аналитическая функция второго рода разлагается в абсолютно сходящийся ряд по псевдостепеням $p_k(z)$ на $\mathbb{G}^+$?

(Q2) Является ли данное разложение однозначным?

Ответ дан А. Д. Медных в работе [6]. Оказалось, что для дискретных аналитических функций 2-го рода формула (26) имеет место, однако само разложение не является однозначным. Там же в [6] указана степень неединственности. Всякая тождественно нулевая дискретная аналитическая функция $f(z) \equiv 0$ представима нетривиальным рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(z),$$

где $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — коэффициенты тейлоровского разложения аналитической функции

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{\zeta}{1+i}\right)^k$$

такой, что $F(s) = 0$ при всех $s \in \mathbb{Z}$. Такие функции $F(\zeta)$ принадлежат идеалу I, порожденному функцией $\sin \pi\zeta(1+i)$ на множестве целых аналитических функций.

Аналогичные результаты были получены О. А. Даниловым в работе [28] для случая дискретных аналитических функций второго рода, определенных на дискретных квадратах Q_R, $R > 0$. Цель данной статьи — установить соответствующие результаты для дискретных параболических функций.

3.2. Каноническое отображение. Приведем следующее определение. Целая функция

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$$

является *функцией экспоненциального типа*, если для некоторого действительного $v > 0$ найдется действительное $r_0 > 0$ такое, что для каждого действительного $r \geq r_0$ выполнено неравенство $M_F(r) < e^{vr}$, где $M_F(r) = \sup\limits_{|\zeta| \leq r} |F(\zeta)|$.

Заметим, что для функции $e(\zeta, z) = e^{\zeta x}(e^{2\zeta} - 2e^{\zeta} + 2)^y$ при $\zeta \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{G}^+$, $r_0 = 2$, $r \geq r_0$ выполнена цепочка неравенств

$$M_{e(\zeta,z)} = \sup_{|\zeta| \leq r} |e^{\zeta x}(e^{2\zeta} - 2e^{\zeta} + 2)^y| \leq \sup_{|\zeta| \leq r} |e^{\zeta}|^x \cdot \sup_{|\zeta| \leq r} |e^{2\zeta} - 2e^{\zeta} + 2|^y$$
$$\leq e^{rx}(e^{2r} + 2e^r + 2)^y \leq e^{rx}(e^{2r} + 3e^r)^y \leq e^{rx}(e^{2r} + e^{2r})^y \leq e^{rx} \cdot e^{3ry} = e^{r(x+3y)}.$$

Таким образом, доказано, что экспонента $e(\zeta, z)$ является целой функцией экспоненциального типа переменной ζ. Для оценки ее тейлоровских коэффициентов нам понадобится следующая

Лемма 1 [29, лемма 1, с. 264]. *Пусть $F(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k$ и $M_F(r) = \sup\limits_{|\zeta| \leq r} |F(\zeta)|$. Если найдется действительное $r_0 > 0$ такое, что для каждого действительного $r \geq r_0$ выполнено неравенство $M_F(r) < e^{vr}$ для некоторого положительного $v \in \mathbb{R}$, то для коэффициентов c_k ее тейлоровского разложения найдется целое k_0 такое, что для всех целых $k \geq k_0$ справедлива оценка*

$$|c_k| < \left(\frac{ev}{k}\right)^k. \tag{27}$$

Зададим отображение $\Theta : F(\zeta) \mapsto f(z)$ формулой

$$\Theta\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z). \tag{28}$$

Теорема 3. *Отображение Θ обладает свойством (A4) для любой целой функции*

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$$

ассоциированный с ней дискретный ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$$

сходится абсолютно на множестве $\mathbb{G}^+$.

Доказательство. По лемме 1 для функции $e(\zeta, z)$ в качестве v годится $v = x + 3y$. Значит, из равенства

$$e(\zeta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!} \zeta^k$$

следует оценка

$$|c_k| = \frac{|\pi_k(z)|}{k!} \leq \left(\frac{e(x+3y)}{k}\right)^k \tag{29}$$

при всех целых $k \geq k_0$. Из асимптотической формулы Стирлинга $k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$ при $k \to \infty$ получим из (29) неравенство

$$|c_k| \leq \frac{(x+3y)^k}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k} \cdot \sqrt{2\pi k}.$$

Отсюда при $k \geq k_1$ для некоторого $k_1 \in \mathbb{Z}^+$ получим

$$|c_k| \leq \frac{\sqrt{2\pi k}(x+3y)^k}{k!} \Rightarrow \frac{|\pi_k(z)|}{k!} \leq \frac{\sqrt{2\pi k}(x+3y)^k}{k!},$$

$$|\pi_k(z)| \leq \sqrt{2\pi k}(x+3y)^k. \tag{30}$$

Так как $F(\zeta) = \sum a_k \zeta^k$ целая, то $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, откуда для дискретного ряда $f(z)$ верна оценка

$$|f(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||\pi_k(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\sqrt{2\pi k}(x+3y)^k.$$

Отсюда по признаку Коши получим сходимость ряда $f(z)$:

$$0 \leq \sqrt[k]{|a_k||\pi_k(z)|} \leq \sqrt[k]{|a_k|}\,\sqrt[2k]{2\pi k}(x+3y). \tag{31}$$

Правая часть $\sqrt[k]{|a_k|}\,\sqrt[2k]{2\pi k}(x+3y)$ стремится к нулю при $k \to \infty$ для любого $z \in \mathbb{G}^+$, значит, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|\sqrt{2\pi k}(x+3y)^k$ сходится, откуда вытекает сходимость дискретного ряда $f(z)$.

Замечание 4. В силу линейности оператора Θ и абсолютной сходимости ряда $(\Theta F)(z)$ при $z \in \mathbb{G}^+$ можно утверждать, что Θ является оператором эволюции на $\mathbb{G}^+$, т. е. $f(z) = (\Theta F)(z)$ является решением разностного уравнения $f(z+i) - f(z) = f(z+2) - 2f(z+1) + f(z)$ с начальным условием $f(x,0) = (\Theta F)(x,0) = F(x)$, где $x \in \mathbb{Z}^+$, а $F(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$ — целая функция.

Действительно, из абсолютной сходимости ряда

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

имеем абсолютную сходимость ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

при $x = 0, 1, \ldots$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Lf(z) &= -f(z+i) + f(z+2) - 2f(z+1) + 2f(z) \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z+i) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z+2) - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z+1) + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(-\pi_k(z+i) + \pi_k(z+2) - 2\pi_k(z+1) + 2\pi_k(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L\pi_k(z) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $L\pi_k(z) = 0$.

Замечание 5. Следующее замечание принадлежит рецензенту. Абсолютную сходимость функции $(\Theta F)(z)$ при $z \in \mathbb{G}^+$ можно показать следующим образом. Повторно применяя формулу $f(z+i) - f(z) = f(z+2) - 2f(z+1) + f(z)$, представим $f(x, y)$ в виде

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{2y} \alpha_k f(x+k, 0),$$

где α_k — некоторые константы, не зависящие от x.

В силу абсолютной сходимости ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

при $x = 0, 1, \dots$ получим, что ряд

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(x,y)$$

абсолютно сходится как конечная сумма абсолютно сходящихся рядов.

3.3. Соотношение между классическими аналитическими и дискретными параболическими функциями. Обозначим через $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ множество целых функций. Свойство (A4) теоремы 3, установленное для канонического отображения Θ из множества $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ в множество дискретных рядов, является ключевым в дальнейшем изложении. Оно позволяет установить соотношение между значениями функций $\{F(\zeta),\ \zeta = 0, 1, \dots\}$ и $\{f(z),\ z = 0, 1, \dots\}$.

Теорема 4. *Пусть* $F(\zeta) \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$,

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z), \quad z \in \mathbb{G}^+,$$

— ассоциированный с $F(\zeta)$ *дискретный ряд. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *имеет место равенство*

$$f(z) = f(x+iy) = \sum_{s=0}^{x+2y} c(x,y,s) F(s), \tag{32}$$

где

$$c(x,y,s) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{\xi^x (\xi^2 - 2\xi + 2)^y}{\xi^{s+1}}\, d\xi, \tag{33}$$

а Γ *— контур, содержащий внутри себя* 0;

2) $f(z) \in \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$.

Доказательство. Рассмотрим тейлоровское разложение для функции $e(\zeta, z) = e^{\zeta x}(e^{2\zeta} - 2e^{\zeta} + 2)^y$ по степеням $\xi = e^{\zeta}$. Получим равенство

$$e(\xi, z) = \xi^x (\xi^2 - 2\xi + 2)^y = \sum_{s=0}^{x+2y} c(x,y,s) \xi^s, \tag{34}$$

где
$$c(x,y,s)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{\xi^x(\xi^2-2\xi+2)^y}{\xi^{s+1}}\,d\xi,$$
а Γ — контур, содержащий внутри $\xi=0$. По формуле (20) с помощью равенства (34) получим
$$\pi_k(z)=\partial_0^k e(\zeta,z)=\sum_{s=0}^{x+2y}c(x,y,s)\partial_0^k(e^{\zeta s})=\sum_{s=0}^{x+2y}c(x,y,s)s^k.$$
Отсюда
$$\begin{aligned}f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\pi_k(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{s=0}^{x+2y}c(x,y,s)s^k\\=\sum_{s=0}^{x+2y}c(x,y,s)\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^k=\sum_{s=0}^{x+2y}c(x,y,s)F(s).\end{aligned}$$
Этот ряд сходится как конечная сумма сходящихся рядов для любого $z\in\mathbb{G}^+$, поскольку $F(\zeta)$ — целая функция.

Докажем утверждение 2. Имеем
$$\begin{aligned}Lf(z)&=-f(z+i)+f(z+2)-2f(z+1)+2f(z)\\&=-\sum_{k=0}^{\infty}a_k\pi_k(z+i)+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\pi_k(z+2)-2\sum_{k=0}^{\infty}a_k\pi_k(z+1)+2\sum_{k=0}^{\infty}a_k\pi_k(z)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(-\pi_k(z+i)+\pi_k(z+2)-2\pi_k(z+1)+2\pi_k(z))=\sum_{k=0}^{\infty}a_kL\pi_k(z)=0,\end{aligned}$$
поскольку $L\pi_k(z)=0$.

3.3.1. Отметим следующее важное следствие теоремы 4.

Следствие 1. *Пусть верны условия теоремы* 4. *Тогда для всех целых неотрицательных k верны соотношения*
$$f(k)=F(k). \tag{35}$$

Доказательство. Поскольку ряд $F(\zeta)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^k$ абсолютно сходится при любом $\zeta\in\mathbb{C}$ и по замечанию 2 $\pi_k(x,0)=x^k$, имеем
$$F(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^k=f(s)$$
для всех $s=0,1,2,\dots$.

Теорема 4 дает регулярный способ получения функций $f(z)\in\mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$. Для этого достаточно взять произвольную функцию
$$F(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^k\in\mathscr{A}(\mathbb{C})$$

и с помощью отображения Θ получить

$$f(z) = (\Theta F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z).$$

Полученный дискретный ряд принадлежит $\mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$ по теореме 4.

Возникает вопрос: всякая ли функция $f(z) \in \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$ может быть образом $(\Theta F)(z)$ при некоторой целой функции $F(\zeta)$, т. е. является ли отображение

$$\Theta\colon \mathscr{A}(\mathbb{C}) \to \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$$

сюръективным?

3.4. Сюръективность отображения $\Theta : \mathscr{A}(\mathbb{C}) \to \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$.

3.4.1. Заметим, что всякая функция $f \in \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$ однозначно восстанавливается по своим значениям на множестве $z = 0, 1, 2, \dots$. Действительно, по формуле (12), зная $f(k)$, $f(k+1)$, $f(k+2)$, последовательно вычисляем $f(k+i)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Аналогично по значениям $f(k+i)$, $f(k+1+i)$, $f(k+2+i)$ вычисляем $f(k+2i)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и т. д. Поэтому если $f(z)$ и $g(z) \in \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$ и $f(z) = g(z)$ при $z = 0, 1, 2, \dots$, получим совпадение $f(z) = g(z)$ при всех $z \in \mathbb{G}^+$.

Для доказательства утверждения, что отображение $\Theta\colon \mathscr{A}(\mathbb{C}) \to \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$ сюръективно, нам понадобится следующая теорема 1 из [30, с. 335]. Аналогичный результат есть в [31, с. 202].

Теорема Гельфонда — Шеффера. *Для любой последовательности чисел $a_l \in \mathbb{C}$, $l = 0, 1, 2, \dots$, существует бесконечное множество целых функций $\varphi(\zeta)$ таких, что $\varphi(l) = a_l$, $l = 0, 1, 2, \dots$.*

3.4.2. Основные результаты.

Теорема 5. *Отображение $\Theta : \mathscr{A}(\mathbb{C}) \to \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$, определенное формулой (28), сюръективно.*

Доказательство. Пусть $f(z) \in \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$. Рассмотрим множество значений $\{f(0), f(1), f(2), \dots\}$. По теореме Гельфонда — Шеффера найдется целая функция $F(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$ такая, что $F(k) = f(k)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$. По следствию 1 из п. 3.3.1 для функции

$$\widetilde{f}(z) = (\Theta F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$$

из (23) получим равенства $\widetilde{f}(k) = F(k)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$. Функция $\widetilde{f}(z)$ принадлежит $\mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$ по теореме 4 и, значит, $f(k) = \widetilde{f}(k)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, т. е. функции $f(k)$ и $\widetilde{f}(k)$ совпадают при всех $z \in \mathbb{G}^+$. $\square$

Замечание 6. Пусть

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \in \mathscr{A}(\mathbb{C}), \quad f(z) = (\Theta F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z).$$

Соотношение (35) и теорема 5 показывают, что $f(z) = (\Theta F)(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{G}^+$ тогда и только тогда, когда $F(s) = 0$ при $s = 0, 1, 2, \dots$.

Для линейного отображения $\Theta : \mathscr{A}(\mathbb{C}) \to \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$ дадим полное описание ядра $\operatorname{Ker}\Theta$. Воспользуемся классической функцией $\Gamma(\zeta) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\zeta-1} e^{-t}\, dt$. Тогда функция $\frac{1}{\Gamma(-\zeta)}$ целая и имеет простые нули только в точках $\zeta = 0, 1, 2, \dots$.

Теорема 6. *Ядро* $\operatorname{Ker}\Theta$ *отображения* $\Theta : \mathscr{A}(\mathbb{C}) \to \mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$, *определенного формулой* (28), *состоит из целых функций* $F(\zeta)$, *имеющих вид*

$$F(\zeta) = \frac{H(\zeta)}{\Gamma(-\zeta)}, \tag{36}$$

где $H(\zeta)$ — *произвольная целая функция.*

Доказательство. Если $F(\zeta) = \frac{H(\zeta)}{\Gamma(-\zeta)}$, то очевидно, что $F(k) = 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots$ и по (35) $(\Theta F)(k) = 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, следовательно, $(\Theta F)(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{G}^+$.

Обратно, пусть $F(\zeta) \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$ такова, что $F(k) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Положим

$$H(\zeta) = F(\zeta) \cdot \Gamma(-\zeta). \tag{37}$$

В точках $\zeta = k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, функция $H(\zeta)$ имеет устранимые особенности. Положим $H(k) = \lim\limits_{\zeta \to k} F(\zeta) \cdot \Gamma(-\zeta)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Функция $H(\zeta)$ принадлежит $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ и тем самым $F(\zeta) = \frac{H(\zeta)}{\Gamma(-\zeta)}$, где $H(\zeta) \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$. $\square$

Таким образом, ядро $\operatorname{Ker}\Theta$ можно записать в виде

$$\operatorname{Ker}\Theta = \frac{1}{\Gamma(-\zeta)} \mathscr{A}(\mathbb{C}). \tag{38}$$

3.5. Примеры тейлоровского разложения в $\mathscr{D}(\mathbb{G}^+)$.

3.5.1. Пусть

$$F(\zeta) = \sin \pi\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\pi\zeta)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Поскольку $\sin \pi k = 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, то $(\Theta(\sin \pi\zeta))(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{G}^+$. Следовательно,

$$0 \equiv (\Theta F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \pi_{2k+1}(z). \tag{39}$$

Формула (39) дает пример функции $f(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{G}^+$, имеющей нетривиальное разложение Тейлора.

3.5.2. Определим $f(k) = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и построим ее продолжение на $\mathbb{G}^+$ по формуле (12). Тогда

$$f(k+i) = 5(-1)^k, \ k = 0, 1, 2, \dots, \quad f(k+2i) = 5^2(-1)^k, \ k = 0, 1, 2, \dots,$$

и аналогично для других слоев.

Для функции $F(\zeta) = e^{i\pi\zeta}$, очевидно, $F(k) = e^{i\pi k} = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку

$$F(\zeta) = e^{i\pi\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi\zeta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k \zeta^k}{k!},$$

имеем

$$f(z) = (\Theta F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k}{k!} \cdot \pi_k(z).$$

Благодарность. Авторы глубоко признательны рецензенту за качественный анализ нашей работы. Его замечания способствовали значительному улучшению текста статьи и упрощению доказательств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isaacs R. F.* A finite difference function theory // Univ. Nac. Tucuman. Revista A. 1941. V. 2. P. 177–201.
2. *Ferrand J.* Fonctions preharmoniques et functions preholomorphes // Bull. Sci. Math., 2^{nd}Ser. 1944. V. 68. P. 152–180.
3. *Duffin R. J.* Basic properties of discrete analytic functions // Duke Math. J. 1956. V. 23. P. 335–363.
4. *Соболев С. Л.* Об одном разностном аналоге полигармонического уравнения // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 1. С. 54–57.
5. *Zeilberger D.* A new basis for discrete analytic polynomials // J. Austral. Math. Soc. 1977. V. 23 (Ser. A). P. 95–104.
6. *Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора // Теория отображений, ее обобщения и приложения. Киев: Наук. думка, 1982. С. 137–144.
7. *Duffin R. J.* Potential theory on a rhombic lattice // J. Combinatorial Theory. 1968. V. 5. P. 258–272.
8. *Mercat Ch.* Discrete Riemann surfaces and the Ising model // Commun. Math. Phys. 2001. V. 218. P. 177–216.
9. *Kenyon R.* The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs // Invent. Math. 2002. V. 150, N 2. P. 409–439.
10. *Hidalgo R. A. Godoy M. M.* Introduccion a las estructaras de superficies de Riemann discretas. 2007. http: //docencia.mat.utfsm.cl/ rhidalgo/files/discreta.pdf.
11. *Dynnikov I. A., Novikov S. P.* Geometry of triangle equation on two-manifolds // Moscow Math. J. 2003. V. 3, N 2. P. 419–438.
12. *Thurston W. P.* The finite Riemann mapping theorem // Invited talk at international symposium on the occasion of the proof of the Bieberbach conjecture. Purdue University, 1985.
13. *Nijhoff F., Capel H.* The discrete Korteweg-de Vries equation // Acta Appl. Math. 1995. V. 39, N 1–3. P. 133–158.
14. *Bobenko A. I., Suris Y. B.* Integrable equations on quad-graphs // Internat. Math. Res. Notices. 2002. V. 11. P. 573–611.
15. *Beardon A. F., Stephenson K.* The uniformization theorem for circle packings // Indiana Univ. Math. J. 1990. V. 39, N 4. P. 1383–1425.
16. *Dubejko T., Stephenson K.* Circle packing: experiments in discrete analytic function theory // Experiment. Math. 1995. V. 4, N 4. P. 307–348.
17. *Schramm O.* Circle patterns with the combinatorics of the square grid // Duke Math. J. 1997. V. 86, N 2. P. 347–389.
18. *Stephenson K.* Circle packing and discrete analytic function theory // Handbook of complex analysis: geometric function theory,. Amsterdam: North-Holland., 2002. V. 1. P. 333–370.
19. *Rodin B., Sullivan D.* The convergence of circle packings to the Riemann mapping // J. Differ. Geom. 1987. V. 26, N 2. P. 349–360.
20. *Rodin B., Marden A.* On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem // Lect. Notes Math. 1990. V. 1435. P. 103–115.
21. *He Z.-X., Schramm O.* The C^∞-convergence of hexagonal disk packings to the Riemann map // Acta Math. 1998. V. 180, N 2. P. 219–245.
22. *Bobenko A., Springborn B.* Variational principles for circle patterns and Koebe's theorem // Trans. Am. Math. Soc. 2004. V. 356, N 2. P. 659–689.
23. *Bobenko A. I., Mercat Ch., Suris Y. B.* Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green's function // J. Reine Angew. Math. 2005. V. 583. P. 117–161.
24. *Runge C.* Über eine Methode, die partielle Differentialgleichung $\Delta u =$ constant numerisch zu integrieren. (German) JFM 38.0433.01 // Zs. für Math. u. Phys. 1908. V. 56. P. 225–232.
25. *Микеладзе Ш. Е.* О численном решении дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 4. С. 177–179.
26. *Панов Д. Ю.* Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. М.: АН СССР, 1938.
27. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1972.
28. *Данилов О. А.* Интерполяционная формула Лагранжа для дискретной аналитической функции // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, № 4. С. 33–39.
29. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976.

30. *Sheffer I. M.* On entire function interpolation // Am. J. Math. 1927. V. 49, N 3. P. 329–342.
31. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 27 декабря 2024 г.
После доработки 12 мая 2025 г.
Принята к публикации 25 мая 2025 г.

Лу Сяоцин (ORCID 0009-0000-2715-9861)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
lsaocin@gmail.com

Данилов Олег Александрович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
my@odanilov67.ru

Медных Александр Дмитриевич (ORCID 0000-0003-3084-1225)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
smedn@mail.ru