*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2025. Том 66, № 6*

*УДК 512.62+517.54*

# ШВАРЦИАН И КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОЛИНОМА С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ

**В. Н. Дубинин**

**Аннотация.** Для комплексного полинома степени не меньше двух, сохраняющего начало координат и имеющего все свои критические точки на вещественной положительной либо отрицательной полуоси, устанавливается точная нижняя граница для наибольшего модуля критических значений. Данная оценка включает производную Шварца этого полинома в начале координат и не зависит от степени полинома. Аналогичная оценка приводится в случае, когда все критические точки полинома вещественные и расположены по разные стороны от начала координат.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.607

**Ключевые слова:** полиномы, критические точки, критические значения, шварциан.

*Памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе*

## § 1. Введение и формулировка результатов

Исследование неравенств для критических точек и критических значений комплексных полиномов во многом инициировала известная статья Смейла [1]. К настоящему времени этой тематике посвящено немало публикаций (см., например, библиографию в обзорах [2, 3]). В частности, в работе [4] (см. также [5]) показано, что для любого полинома вида $P(z) = c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_1 c_n \neq 0$, $n \geq 2$, справедливо неравенство

$$\max\{|P(\zeta)| : \ P'(\zeta) = 0\} \geq 2 \left(\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left|\frac{c_1^n}{c_n}\right|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Равенство достигается в случае $P(z) = aT_n(bz - \cos(\pi/(2n)))$ при подходящих комплексных значениях $a$ и $b$, зависящих от $c_1$ и $c_n$, где $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \dots$ — полином Чебышева первого рода. Естественно поставить вопрос о нижней оценке модуля критического значения, не зависящей от степени полинома $P$. Впервые неравенства для модулей критических значений, не зависящие от степени полинома, появились в работе Хинкканена и Каюмова [6]. Следуя [6], ограничимся полиномами с вещественными критическими точками. Такие полиномы представляют интерес при решении различных задач теории функций [6–10].

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

Всюду ниже рассматриваются полиномы вида

$$P(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \cdots + c_nz^n, \quad n \geq 2. \tag{1}$$

Полученные в данной статье точные оценки модуля $|P(\zeta)|$ в критической точке $\zeta$, т. е. точке, где $P'(\zeta) = 0$, являются одновременно неравенствами для производной Шварца (шварциана) $S_P(0)$ полинома $P$, вычисленной в начале координат:

$$S_P(0) = 6\bigl(c_3 - c_2^2\bigr).$$

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Предположим, что все критические точки полинома* (1) *степени $n \geq 2$ расположены на вещественной положительной либо отрицательной полуоси. Тогда $S_P(0) < 0$ и существует критическая точка $\zeta$ такая, что*

$$|P(\zeta)| \geq \left(-2\frac{2}{3}S_P(0)\right)^{-1/2}. \tag{2}$$

*Равенство в* (2) *достигается для полинома $P(z) = z - cz^2$ при любом вещественном $c \neq 0$.*

**Теорема 2.** *Если все критические точки полинома* (1) *степени $n \geq 3$ вещественные и расположены по разные стороны от начала координат, то $S_P(0) < 0$ и существует критическая точка $\zeta$, для которой*

$$|P(\zeta)| \geq \left(-1\frac{1}{8}S_P(0)\right)^{-1/2}. \tag{3}$$

*Равенство в* (3) *имеет место при $P(z) = z - cz^3$ при любом $c > 0$.*

Ранее [11] нами было показано, что в условиях теоремы 1 либо теоремы 2 справедливо неравенство

$$S_P(0) \leq 0.$$

Заметим, что неравенства для шварциана во внутренних точках области определения голоморфной неоднолистной функции появились сравнительно недавно [12], а неравенства для производной Шварца с учетом критического значения в литературе не рассматривались.

## § 2. Доказательство теоремы 1

Поскольку все критические точки полинома (1) вещественные, значения $P(z)$ также вещественные при всех вещественных $z$. Обозначим через $\mathscr{R}(P)$ риманову поверхность функции $\mathscr{P}$, обратной заданному полиному $P$. Мы рассматриваем $\mathscr{P}$ как отображение поверхности $\mathscr{R}(P)$ на комплексную сферу $\overline{\mathbb{C}}_z$. Всевозможные радиальные лучи на поверхности $\mathscr{R}(P)$, соединяющие ее точки разветвления с бесконечностью, разбивают эту поверхность на конечное число листов $\{U\}$. Пусть $U_0$, $U_0 \in \{U\}$, — тот лист, который содержит прообраз точки $z = 0$ при отображении $\mathscr{P}$. Полагая, что все критические точки полинома $P$ отрицательные, обозначим через $\zeta$ наибольшую критическую точку. Из соображений непрерывности можно считать, что $P''(\zeta) \neq 0$. В силу $P(0) = 0, P'(0) > 0$ выполняется $P(\zeta) < 0$ и вещественная функция $P$ отображает луч $[\zeta, +\infty]$ в луч $[P(\zeta), +\infty]$. Отсюда следует, что проекция области $U_0$ есть $w$-плоскость с разрезом $L := [-\infty, P(\zeta)]$.

Покажем, что на границе области $\mathscr{P}(U_0)$ нет критических точек полинома $P$, отличных от $\zeta$. Предположим противное. Тогда найдется критическая точка $\zeta' \in \partial\mathscr{P}(U_0)$, $\zeta' < \zeta$ (пусть $\zeta'$ — ближайшая к $\zeta$ такая точка), и соответствующая точка разветвления $\mathscr{P}^{-1}(\zeta')$ принадлежит $\partial U_0$. Замкнутая жорданова кривая на поверхности $\mathscr{R}(P)$ вида $\mathscr{P}^{-1}([\zeta',\zeta])\cup\ [\mathscr{P}^{-1}(\zeta'), \mathscr{P}^{-1}(\zeta)]$ разбивает эту поверхность на две области, каждая из которых содержит бесконечно удаленную точку. Здесь $[\mathscr{P}^{-1}(\zeta'), \mathscr{P}^{-1}(\zeta)]$ — отрезок на границе области $U_0$. Полученное противоречие показывает, что точка $\zeta$ является единственной критической точкой на границе $\mathscr{P}(U_0)$.

В силу вышесказанного и условия $P''(\zeta) \neq 0$ определен единственный лист из совокупности $\{U\}$, пусть $U'$, который имеет с $U_0$ общие берега разрезов над лучом $L$ и на границе которого лежит точка $\mathscr{P}^{-1}(\zeta)$. Кроме того, у листов $U_0$ и $U'$ нет других примыкающих к ним общих точек разветвления, лежащих над $L$, исключая точку $\mathscr{P}^{-1}(\zeta)$.

Обозначим через $G_1$ риманову область на $\mathscr{R}(P)$, полученную склеиванием листов $U_0$ и $U'$ крест-накрест по берегам разрезов над $L$ с последующим разрезанием приклеенного листа $U'$ вдоль радиального луча, лежащего над $[P(\zeta), +\infty]$. Положим

$$Q_1(z) := z - \frac{1}{4P(\zeta)}z^2.$$

Непосредственно из определения видно, что функция $w = Q_1(z)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Re} z > 2P(\zeta)$ $(\operatorname{Re} z < 2P(\zeta))$ на $w$-плоскость с разрезом по лучу $L$. Таким образом, $Q_1$ отображает сферу $\overline{\mathbb{C}}_z$ на риманову поверхность $\mathscr{R}(Q_1)$, образованную склеиванием двух экземпляров области $\mathbb{C}_w \setminus L$ крест-накрест по берегам разреза $L$. Построенную выше область $G_1$ можно рассматривать как подмножество поверхности $\mathscr{R}(Q_1)$. Функция $Q_1$ отображает область

$$H = \mathbb{C}_z \setminus \{z : \operatorname{Re} z \leq 2P(\zeta),\ \operatorname{Im} z = 0\}$$

конформно и однолистно на область $G_1$. Следовательно, суперпозиция функций

$$f_1 := \mathscr{P} \circ Q_1$$

является однолистной в области $H$, $f_1(0) = 0$. Применение к функции $f_1$ теоремы 3 работы [11], где $g(z) \equiv z$, ведет к неравенству

$$\operatorname{Re} S_{f_1}(0) \geq 0. \tag{4}$$

Для вычисления шварциана от суперпозиции $f_1$ удобно воспользоваться формулой

$$S_{\alpha\circ\beta} = (S_\alpha \circ \beta)(\beta')^2 + S_\beta.$$

После элементарных преобразований неравенство (4) перепишется так:

$$\frac{3}{8P^2(\zeta)} \leq -S_P(0).$$

Отсюда вытекает, что $S_P(0) < 0$, и справедливо неравенство (2).

Достижимость равенства в (2) проверяется непосредственно либо простым замечанием, что при $P(z) = z - cz^2$ будет $f_1(z) \equiv z$ и, следовательно, в (4) и (2) имеет место знак равенства.

Случай, когда все критические точки полинома $P$ положительные, сводится к предыдущему рассмотрением полинома $-P(-z)$. Теорема 1 доказана.

## § 3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\zeta_1$ и $\zeta_2$ — ближайшие к началу координат критические точки полинома $P$, $\zeta_1 < 0 < \zeta_2$. Можно считать, что $P''(\zeta_k) \neq 0$, $k = 1, 2$. Тогда $P(\zeta_1) < 0 < P(\zeta_2)$ и вещественная функция $P$ отображает отрезок $[\zeta_1, \zeta_2]$ в $[P(\zeta_1), P(\zeta_2)]$. Отсюда следует, что проекция области $U_0$ есть $w$-плоскость с разрезами $L_1 = [-\infty, P(\zeta_1)]$ и $L_2 = [P(\zeta_2), +\infty]$. Здесь вновь используются обозначения $U_0$, $\mathscr{R}(P)$, $\mathscr{P}$ и разбиение поверхности $\mathscr{R}(P)$ на листы радиальными разрезами из § 2. Повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 1 (где $L = L_1$, $\zeta = \zeta_1$), убеждаемся в существовании единственного листа (пусть $U'$), который имеет с $U_0$ общие берега разрезов над $L_1$ и на границе которого нет других точек разветвления поверхности $\mathscr{R}(P)$, отличных от $\mathscr{P}^{-1}(\zeta_1)$. Аналогично существует лист $U''$, который имеет с $U_0$ общие берега разрезов над $L_2$ и на границе которого нет точек разветвления $\mathscr{R}(P)$, кроме $\mathscr{P}^{-1}(\zeta_2)$. Обозначим через $G_2$ риманову область на $\mathscr{R}(P)$, полученную склеиванием листов $U_0$ и $U'$ крест-накрест по берегам разрезов над $L_1$ с последующим разрезанием по листу $U'$ вдоль луча, лежащего над $[P(\zeta_1), +\infty]$, а затем приклеиванием к $U_0$ листа $U''$ крест-накрест по берегам разрезов над $L_2$ с последующим разрезанием по листу $U''$ вдоль луча, лежащего над $[-\infty, P(\zeta_2)]$.

Положим

$$Q_2(z) := \frac{1}{ab} \int_0^z (u-a)(u-b)\, du = z - \frac{a+b}{2ab} z^2 + \frac{1}{3ab} z^3,$$

где числа $a, b$ заданы условиями $a < 0 < b$, $Q_2(a) = P(\zeta_1)$, $Q_2(b) = P(\zeta_2)$. Несложно показать, что риманова поверхность $\mathscr{R}(Q_2)$, на которую полином $Q_2$ отображает комплексную сферу $\overline{\mathbb{C}}_z$, образована приклеиванием крест-накрест к $w$-плоскости с двумя разрезами $L_1, L_2$ двух областей $\mathbb{C}_w \setminus L_1$ и $\mathbb{C}_w \setminus L_2$ вдоль берегов разрезов $L_1$ и $L_2$. Построенную выше область $G_2$ можно рассматривать как подмножество поверхности $\mathscr{R}(Q_2)$. Функция $Q_2$ отображает область

$$T = \mathbb{C}_z \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \le a \text{ либо } \operatorname{Re} z \ge b\}$$

конформно и однолистно на область $G_2$. Поэтому суперпозиция функций

$$f_2 := \mathscr{P} \circ Q_2$$

однолистна в области $T$, $f_2(0) = 0$. Применение вновь теоремы 3 работы [11] приводит к неравенству

$$\operatorname{Re} S_{f_2}(0) \ge 0. \tag{5}$$

Прямые вычисления дают

$$\operatorname{Re} S_{f_2}(0) = S_{f_2}(0) = -S_P(0) + \frac{2}{ab} - \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2.$$

Предположим, что $|a| \le b$. Тогда неравенство (5) влечет

$$-S_P(0) \ge \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{1}{|ab|} = \frac{3}{2}\frac{1}{|ab|}\left[\frac{|a|}{b} + \frac{b}{|a|} - \frac{2}{3}\right] \ge \frac{2}{b^2}.$$

С другой стороны,

$$P(\zeta_2) = Q_2(b) = \frac{b}{2} - \frac{b^2}{6a} = \frac{b}{2}\left[1 + \frac{b}{3|a|}\right] \ge \frac{2}{3} b.$$

Следовательно,

$$-S_P(0) \geq \frac{8}{9}\frac{1}{(P(\zeta_2))^2}.$$

Отсюда вытекает, что $S_P(0) < 0$ и справедливо неравенство (3) при $\zeta = \zeta_2$.

Случай $|a| \geq b$ рассматривается аналогично.

Утверждение о знаке равенства в (3) проверяется прямым вычислением. Теорема 2 доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Smale S.* The fundamental theorem of algebra and complexity theory // Bull. Am. Math. Soc. 1981. V. 4, N 1. P. 1–36.
2. *Дубинин В. Н.* Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, № 4. С. 3–88.
3. *Авхадиев Ф. Г., Каюмов И. Р., Насыров С. Р.* Экстремальные проблемы в геометрической теории функций // Успехи мат. наук. 2023. Т. 78, № 2. С. 3–70.
4. *Дубинин В. Н.* Об одной экстремальной задаче для комплексных полиномов с ограничениями на их критические значения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 79–69.
5. *Дубинин В. Н.* Неравенство марковского типа и нижняя оценка модулей критических значений полиномов // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 5. С. 495–497.
6. *Hinkkanen A., Kayumov I.* On critical values of polynomials with real critical points // Constructive Approximation. 2010. V. 32, N 2. P. 385–392.
7. *Epstein A.* Symmetric rigidity for real polynomials with real critical points // Contemp. Math. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2002. V. 311. P. 107–114.
8. *Brown J. E., Powell V. F.* A result on real polynomials with real critical points // J. Anal. Appl. 2007. V. 5, N 1. P. 41–52.
9. *Kozlovski O., Shen W., van Strien S.* Rigidity for real polynomials // Ann. Math. 2007. V. 2, N 3. P. 749–841.
10. *Bishop D. L.* Approximation by polynomials with only real critical points // Rev. Mat. Iberoam. 2024. V. 40, N 6. P. 2251–2290.
11. *Дубинин В. Н.* Об одном классе однолистных функций // Дальневост. мат. журн. 2012. Т. 12, № 2. С. 184–194.
12. *Bolotnikov V.* Several inequalities for the Schwarzian derivative of a bounded analytic function // Complex Var. Elliptic Equ. 2019. V. 64, N 7. P. 1093–1102.


*Поступила в редакцию 15 июля 2025 г.*
*После доработки 15 июля 2025 г.*
*Принята к публикации 30 июля 2025 г.*

Дубинин Владимир Николаевич (ORCID 0000-0002-4403-155X)
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
dubinin@iam.dvo.ru