

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ГРУППА КОКСЕТЕРА  
МИНИМАЛЬНОГО КООБЪЕМА В ТРЕХМЕРНОМ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
**А. Ю. Веснин, А. А. Егоров**

**Аннотация.** Доказано, что среди всех прямоугольных групп Коксетера в трехмерном гиперболическом пространстве наименьший кообъем имеет группа, порожденная отражениями в гранях прямоугольной треугольной бипирамиды. Эта бипирамида имеет три идеальные и две конечные вершины. Группа является арифметической и кообъем равен константе Каталана  $G = 0,915965 \dots$ .

DOI 10.33048/smzh.2025.66.604

**Ключевые слова:** гиперболический многогранник, прямоугольный многогранник, прямоугольная группа Коксетера.

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

### § 1. Введение

Фундаментальной проблемой в гиперболической геометрии является изучение дискретных подгрупп группы  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  изометрий  $n$ -мерного гиперболического пространства  $\mathbb{H}^n$ , в частности, групп, порожденных отражениями. При этом дискретные группы изометрий, не содержащие кручений, соответствуют гиперболическим  $n$ -мерным многообразиям. Во многих конструкциях такие группы возникают как подгруппы конечного индекса в группах, порожденных отражениями [1–3].

Напомним [4, 5], что группа Коксетера  $W$  определяется конечным представлением вида  $W = \langle s \in S \mid (st)^{m_{st}} = 1, \forall s, t \in S \rangle$ , где  $m_{ss} = 1$  и  $m_{st} \in \{2, 3, \dots, \infty\}$ , если  $s \neq t$ . Здесь  $m_{st} = \infty$  означает, что между  $s$  и  $t$  соотношений нет. Группа Коксетера  $W$  называется *прямоугольной*, если  $m_{st} \in \{2, \infty\}$  для  $s \neq t$ .

Выпуклый многогранник  $P \subset \mathbb{H}^n$  с двугранными углами вида  $\pi/m$  для целого  $m \geq 2$  при  $(n-2)$ -мерных гранях называют *гиперболическим многогранником Коксетера*. Группа  $\Gamma(P)$ , порожденная отражениями в  $(n-1)$ -мерных гранях  $P$ , является группой Коксетера. *Кообъемом* группы  $\Gamma(P)$  будем называть объем многогранника  $\text{vol}(P)$ . Будем говорить, что группа  $\Gamma(P)$  *кокомпактна*, если  $P$  — компактный многогранник, и что  $\Gamma(P)$  *конечного кообъема*, если  $P$  имеет конечный объем. Как показал Винберг [6], если  $n \geq 30$ , то в  $\mathbb{H}^n$  не существует кокомпактных групп Коксетера. Примеры известны только если  $n \leq 8$  (см. [7]). Согласно [8, 9], если  $n > 995$ , то в  $\mathbb{H}^n$  не существует групп

---

Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН: А. Ю. Веснин поддержан проектом № FWNF-2022-0004, А. А. Егоров поддержан проектом № FWNF-2022-0017.

Коксетера конечного кообъема. Примеры известны только для  $n \leq 19$  [10] и  $n = 21$  [11]. Как показано в [12], существует бесконечно много групп Коксетера конечного кообъема (соответственно компактных) в  $\mathbb{H}^n$  для каждого  $n \leq 19$  (соответственно  $n \leq 6$ ).

В данной работе рассматриваются прямоугольные многогранники конечного объема в трехмерном гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$  и соответствующие им прямоугольные группы Коксетера. Многогранник  $P$  называется *прямоугольным*, если все его двугранные углы равны  $\pi/2$ . В этом случае соответствующая группа отражений  $\Gamma(P)$  является прямоугольной группой Коксетера. Известно, что не существует компактных прямоугольных гиперболических групп Коксетера, если  $n > 4$  [13], и прямоугольных гиперболических групп Коксетера конечного кообъема, если  $n > 12$  [14]. В последнем случае примеры известны в размерностях  $n \leq 8$  (см. [15]).

Данбар и Мейергофф [16] показали, что множество объемов трехмерных гиперболических орбифолдов конечного объема имеет порядковый тип  $\omega^\omega$  и число орбифолдов заданного объема конечно. Традиционно объемы многогранников в трехмерном гиперболическом пространстве вычисляют в терминах следующей функции Лобачевского (см. [17]):

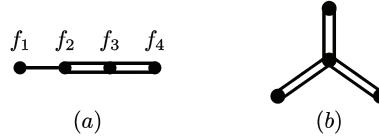
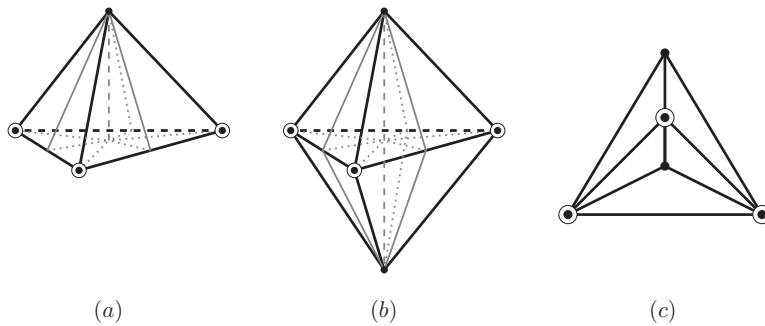
$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin(t)| dt.$$

Ниже мы будем использовать величину  $v_{oct} = 8\Lambda(\pi/4) = 3,663862$ , равную объему правильного идеального октаэдра в  $\mathbb{H}^3$ , и величину  $v_{tet} = 3\Lambda(\pi/3) = 1,014941$ , равную объему правильного идеального тетраэдра в  $\mathbb{H}^3$ . Здесь и далее все приближенные значения функции Лобачевского и значения объемов приводятся с точностью до шести знаков после запятой.

Дискретные группы отражений удобно описывать при помощи схем Коксетера [5, 18]. Каждому многограннику Коксетера, в частности лежащему в  $\mathbb{H}^3$ , соответствует граф, называемый его *схемой Коксетера*. Вершины схемы Коксетера соответствуют граням многогранника. Если две грани многогранника взаимно перпендикулярны, то вершины схемы не соединяются ребром. Если угол между гранями равен  $\pi/m$ ,  $m \geq 3$ , то соответствующие вершины соединяются ребром кратности  $m-2$  (как правило, если  $m \in \{3, 4, 5\}$ ) или обычным ребром с меткой  $m$ . Схемы Коксетера также используются для обозначения групп Коксетера, порожденных отражениями в гранях многогранника Коксетера.

Обозначим через  $\Delta_{3,4,4}$  тетраэдр в  $\mathbb{H}^3$  с гранями  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , у которого двугранные углы  $\alpha_i$  между гранями  $f_i$  и  $f_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , имеют значения  $\alpha_1 = \pi/3$ ,  $\alpha_2 = \pi/4$ ,  $\alpha_3 = \pi/4$ , а все остальные двугранные углы равны  $\pi/2$ . Схема Коксетера для группы  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$ , порожденной отражениями в гранях  $\Delta_{3,4,4}$ , приведена на рис. 1(a), где указаны обозначения граней.

Тетраэдр  $\Delta_{3,4,4}$  имеет три конечные вершины и одну идеальную вершину, которая принадлежит граням  $f_2, f_3$  и  $f_4$ . Под действием диэдralной группы порядка шесть, порожденной отражениями в гранях  $f_1$  и  $f_2$ , из шести экземпляров  $\Delta_{3,4,4}$  получаем тетраэдр  $\Delta'_{3,4,4}$  на рис. 2(a), у которого три идеальные вершины лежат в одной плоскости, которая содержит грань  $f_4$ , а в конечной вершине встречаются три прямых угла (тетраэды с таким свойством называют *тривылоугольными* [19]). Схема Коксетера для группы  $\Gamma(\Delta'_{3,4,4})$ , порожденной отражениями в гранях  $\Delta'_{3,4,4}$ , приведена на рис. 1(b). Объединяя тетраэдр

Рис. 1. Схемы Коксетера для групп  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$  и  $\Gamma(\Delta'_{3,4,4})$ .Рис. 2. Тетраэдр  $\Delta'_{3,4,4}$ , многогранник  $P_{(3,2)}$  и диаграмма Шлегеля для  $P_{(3,2)}$ .

$\Delta'_{3,4,4}$  с его зеркальным образом относительно плоскости, содержащей грань  $f_4$ , получим треугольную бипирамиду с шестью гранями, у которой все двугранные углы равны  $\pi/2$ . Поскольку эта бипирамида имеет три идеальных и две конечные вершины, будем обозначать ее через  $P_{(3,2)}$ . Многогранник  $P_{(3,2)}$  и его диаграмма Шлегеля приведены на рис. 2(b), (c). Отметим, что многогранник  $P_{(3,2)}$  появлялся в различных контекстах в работах [8, 13, 20, 21].

По построению объем прямоугольного многогранника  $P_{(3,2)}$  равен

$$\text{vol}(P_{(3,2)}) = 2 \text{vol}(\Delta'_{3,4,4}) = 12 \text{vol}(\Delta_{3,4,4}) = 2\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

где объем тетраэдра  $\Delta_{3,4,4}$  вычислен через функцию Лобачевского по приведенной ниже формуле (1). Хорошо известно [22], что  $2\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = G$ , где

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

— константа Каталана, появившаяся в 1867 г. в его работе [23]. С точностью до шести знаков имеем  $G = 0,915965$ . Более точные приближения константы Каталана  $G$  приведены в [24].

Основным результатом данной работы является следующая

**Теорема 1.1.** Пусть  $\mathcal{P}$  — прямоугольный многогранник в  $\mathbb{H}^3$ . Тогда имеет место неравенство  $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq G$ , где  $G = 2\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right)$  — константа Каталана. При этом треугольная бипирамида  $P_{(3,2)}$  является единственным прямоугольным многогранником, для которого достигается равенство.

Хорошо известно, что арифметичность групп трехмерных гиперболических многообразий и орбифолов имеет важное значение при изучении их свойств [25]. Вопрос, восходящий к Зигелю [26], состоит в следующем: какие гиперболические многообразия и орбифолды имеют наименьший объем в ориентируемом и неориентируемом случаях? Как отмечено в [27], имеет место фольклорная

гипотеза, состоящая в том, что минимальные объемы всегда достигаются на арифметических многообразиях или орбифолдах. К настоящему времени эта гипотеза полностью подтверждена для  $n = 3$  (см. [28–34]). Отметим, что аналогичное свойство арифметичности минимальных объемов имеет место и для прямоугольных групп Коксетера. А именно, минимальная кокомпактная прямоугольная гиперболическая группа Коксетера арифметична в силу [35, 36]. Минимальная прямоугольная гиперболическая группа Коксетера конечного ко-объема также арифметична, что следует из теоремы 1.1.

**Следствие 1.1.** *Прямоугольная гиперболическая группа Коксетера в  $\mathbb{H}^3$  минимального кообъема является арифметической.*

Статья имеет следующую структуру. В § 2 напомним некоторые результаты о прямоугольных многогранниках в пространстве  $\mathbb{H}^3$  и их объемах. Более подробную информацию о геометрии пространства  $\mathbb{H}^3$  и о гиперболических многообразиях и орбифолдах можно найти в [3]. В § 3 приведем доказательство теоремы 1.1, представленное последовательностью лемм 3.1–3.4. В § 4 обсудим арифметичность прямоугольных групп отражений, появившихся при доказательстве теоремы 1.1. Завершим статью некоторыми открытыми вопросами, сформулированными в § 5.

## § 2. Предварительные сведения

**2.1. Существование прямоугольных гиперболических многогранников.** Обозначим через  $\mathbb{R}^{n,1}$  векторное пространство  $\mathbb{R}^{n+1}$ , снаженное скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  сигнатуры  $(n, 1)$ , а через  $f_n$  — ассоциированную с этим произведением квадратичную форму. В подходящем базисе эта форма выражается следующим образом:

$$f_n(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Пространством Лобачевского  $\mathbb{H}^n$  размерности  $n$  называется верхняя связная компонента гиперболоида, заданного уравнением  $f_n(x) = -1$ :

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid f_n(x) = -1 \text{ и } x_0 > 0\}.$$

В данной модели точки на абсолюте соответствуют изотропным векторам:

$$\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid f_n(x) = 0 \text{ и } x_0 > 0\}/\mathbb{R}_+.$$

*Выпуклым гиперболическим многогранником* размерности  $n$  называется пересечение конечного семейства замкнутых полупространств в  $\mathbb{H}^n$ , которое содержит непустое открытое множество. Выпуклый гиперболический многогранник называется *гиперболическим многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями  $\pi$ , т. е. имеют вид  $\pi/m$  для некоторого целого  $m \geq 2$ . Гиперболический многогранник Кокстера называется *прямоугольным*, если все его двугранные углы равны  $\pi/2$ . Если все двугранные углы обобщенного<sup>1)</sup> многогранника не превосходят  $\pi/2$ , то говорят, что этот многогранник *остроугольный*.

<sup>1)</sup>Обобщенным выпуклым многогранником  $P$  называется пересечение (с непустой внутренностью), возможно бесконечного числа, полупространств в  $\mathbb{H}^n$ , такое, что каждый замкнутый шар пересекает лишь конечное число граничных гиперплоскостей, задающих  $P$ .

Известно, что обобщенные многогранники Кокстера являются естественными фундаментальными областями для дискретных групп, порожденных отражениями в пространствах постоянной кривизны (см. [18]).

Выпуклый  $n$ -мерный многогранник имеет конечный объем тогда и только тогда, когда он является выпуклой оболочкой конечного числа точек в компактификации  $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ . Многогранник размерности  $n$  компактен тогда и только тогда, когда он является выпуклой оболочкой конечного числа точек пространства  $\mathbb{H}^n$ , которые называются *конечными*. Выпуклый многогранник называется *идеальным*, если все его вершины лежат на абсолюте  $\partial\mathbb{H}^n$  (такие вершины называются *идеальными*). Известно [37, теорема 1] что для компактного остроугольного многогранника конечного объема  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}^3$  каждая вершина имеет симплексиальный тип.

Говорят, что два многогранника  $P$  и  $P'$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^n$  комбинаторно эквивалентны, если существует биекция между множествами их граней, которая сохраняет отношение инцидентности. Класс комбинаторно эквивалентных многогранников называется *комбинаторным типом* многогранника. Отметим, что если гиперболический многогранник  $P \subset \mathbb{H}^n$  имеет конечный объем, то его замыкание  $\bar{P} \subset \overline{\mathbb{H}^n}$  комбинаторно эквивалентно некоторому компактному многограннику в  $\mathbb{E}^n$ .

Следующая теорема является частным случаем теоремы Андреева для компактного случая [38] и случая конечного объема [37], см. также [39]. Теоремы Андреева дают необходимые и достаточные условия для реализации в пространстве Лобачевского абстрактного многогранника заданного комбинаторного типа с предписанными двугранными углами. Мы сформулируем эти условия для прямоугольных многоугольников, следуя [40, теорема 2.1]. Обозначим через  $P^*$  плоский граф, двойственный одномерному скелету  $P^{(1)}$  многогранника  $P$ .

**Теорема 2.1** [38, 37]. *Абстрактный многогранник  $P$  реализуется как прямоугольный многогранник  $\mathcal{P}$  в  $\mathbb{H}^3$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (1)  $P$  имеет не менее шести граней;
- (2) в каждой вершине  $P$  сходятся три или четыре грани;
- (3) для любой тройки граней  $(F_i, F_j, F_k)$  такой, что  $F_i \cap F_j$  и  $F_j \cap F_k$  — ребра в  $P$  с различными концами, выполняется  $F_i \cap F_k = \emptyset$ ;
- (4) двойственный граф  $P^*$  не содержит призматических  $k$ -обходов, где  $k \leq 4$ .

При этом каждая вершина валентности три в  $P$  соответствует конечной вершине в  $\mathcal{P}$ , каждая вершина валентности четыре в  $P$  соответствует идеальной вершине в  $\mathcal{P}$ , и реализация  $\mathcal{P}$  единственна с точностью до изометрии.

Здесь для плоского графа  $G$  и двойственного ему графа  $G^*$   $k$ -обходом называется простая замкнутая кривая, состоящая из  $k$  ребер в графе  $G^*$ . Призматическим  $k$ -обходом называется такой  $k$ -обход  $\gamma$ , в котором никакие два ребра графа  $G$ , соответствующие ребрам, через которые проходит  $\gamma$ , не имеют общей вершины.

**2.2. Объем бипрямоугольного гиперболического тетраэдра.** Тетраэдр в  $\mathbb{H}^3$  называется *бипрямоугольным* (или *ортосхемой*), если его вершины можно обозначить через  $A, B, C, D$  таким образом, что ребро  $AB$  ортогонально грани  $BCD$ , а грань  $ABC$  ортогональна ребру  $CD$ . В этом случае получаем следующее равенство двугранных углов:  $\angle AC = \angle BC = \angle BD = \pi/2$ . Величины

остальных двугранных углов обозначим через  $\angle AB = \alpha$ ,  $\angle AD = \beta$ ,  $\angle CD = \gamma$ , где  $\alpha + \beta \geq \pi/2$  и  $\beta + \gamma \geq \pi/2$ . В этом случае бипрямоугольный тетраэдр будем обозначать символом  $R(\alpha, \beta, \gamma)$ . Формула для его объема получена в [41]:

$$\text{vol}(R(\alpha, \beta, \gamma)) = \frac{1}{2} \left[ \Lambda(\alpha + \delta) + \Lambda(\alpha - \delta) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \delta\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \delta\right) \right. \\ \left. + \Lambda(\gamma + \delta) - \Lambda(\gamma - \delta) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right], \quad (1)$$

где

$$0 \leq \delta = \arctan \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \alpha \cos \gamma} < \frac{\pi}{2}.$$

С помощью формулы (1) вычислим кообъем группы  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$ , схема Коксетера которой приведена на рис. 1(а), и группы  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$ , схема Коксетера которой приведена на рис. 3. А именно, поскольку  $\Delta_{3,4,4} = R(\pi/3, \pi/4, \pi/4)$ , то  $\text{vol}(\Delta_{3,4,4}) = \frac{1}{6}\Lambda(\pi/4)$ , и аналогично, поскольку  $\Delta_{4,4,4} = R(\pi/4, \pi/4, \pi/4)$ , то  $\text{vol}(\Delta_{4,4,4}) = \frac{1}{2}\Lambda(\pi/4)$ .



Рис. 3. Схема Коксетера для группы  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$ .

**2.3. Компактные прямоугольные многогранники.** Поскольку условия реализации абстрактного многогранника как компактного прямоугольного многогранника в  $\mathbb{H}^3$  впервые были сформулированы А. В. Погореловым [42], иногда эти многогранники называют *многогранниками Погорелова*.

Опишем одно важное бесконечное семейство компактных прямоугольных многогранников. Для  $n \geq 5$  рассмотрим  $(2n+2)$ -гранник  $L_n$ , у которого верхнее и нижнее основания являются  $n$ -угольниками, а боковая поверхность состоит из двух циклов по  $n$  пятиугольников [2], в частности,  $L_5$  является додекаэдром (рис. 4(a)). По теореме 2.1 многогранник  $L_n$  реализуется в  $\mathbb{H}^3$  как компактный прямоугольный многогранник  $\mathcal{L}_n$ . Следя [2], многогранники  $\mathcal{L}_n$  называют *многогранниками Лёбеля*, а трехмерные гиперболические многообразия, соответствующие подгруппам без кручения индекса восемь в  $\Gamma(\mathcal{L}_n)$ ,  $n \geq 5$ , — *многообразиями Лёбеля*, см. [43].

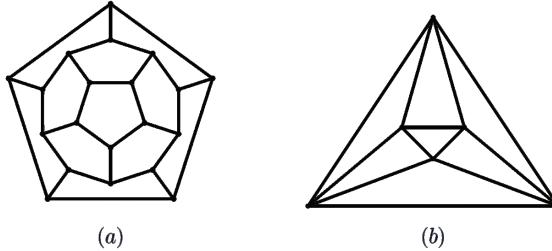


Рис. 4. Додекаэдр  $L_5$  и октаэдр  $A_3$ .

**Теорема 2.2** [44, следствие 9.2]. *Компактным прямоугольным гиперболическим многогранником наименьшего объема является додекаэдр  $\mathcal{L}_5$ , а следующим — многогранник  $\mathcal{L}_6$ .*

Приведенная ниже формула выражает объемы прямоугольных гиперболических многогранников  $\mathcal{L}_n$  через функцию Лобачевского.

**Теорема 2.3** [45]. Для  $n \geq 5$  имеет место равенство

$$\text{vol}(\mathcal{L}_n) = \frac{n}{2} \left( 2\Lambda(\theta_n) + \Lambda\left(\theta_n + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta_n - \frac{\pi}{n}\right) - \Lambda\left(2\theta_n - \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

где  $\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2\cos(\pi/n)}\right)$ .

Непосредственными вычислениями получаем приближенные значения объемов с точностью до шести знаков после запятой:  $\text{vol}(\mathcal{L}_5) = 4,306207$  и  $\text{vol}(\mathcal{L}_6) = 6,023046$ . Нетрудно видеть, что  $\text{vol}(\mathcal{L}_n)$  является возрастающей функцией от  $n$  (см. [44, теорема 4.2]) и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\mathcal{L}_n)}{n} = \frac{5}{4}v_{tet}$  (см. [46, предложение 2.10]). В работе [47] дан список первых 825 объемов компактных прямоугольных гиперболических многогранников, а также приведены изображения первых ста соответствующих многогранников. Вычисления объемов проводились с помощью компьютерной программы Orb [48].

Верхние и нижние оценки объемов компактных прямоугольных многогранников через число их вершин были получены Аткинсоном в [40].

**Теорема 2.4** [40, теорема 2.3]. Пусть  $\mathcal{P}$  — компактный прямоугольный гиперболический многогранник с  $V$  вершинами. Тогда

$$\frac{v_{oct}}{32}(V-8) \leq \text{vol}(\mathcal{P}) < \frac{5v_{tet}}{8}(V-10). \quad (2)$$

Более того, существует последовательность компактных прямоугольных многогранников  $\mathcal{P}_i$  с  $V_i$  вершинами такая, что  $\text{vol}(\mathcal{P}_i)/V_i$  стремится к  $\frac{5}{8}v_{tet}$ , когда  $i$  стремится к бесконечности.

В силу теоремы 2.1 в теореме 2.4 подразумевается, что  $V \geq 20$ . В [49] верхняя оценка в (2) была улучшена для компактных прямоугольных гиперболических многогранников с числом вершин  $V \geq 24$ , а в [50] — с числом вершин  $V \geq 81$ .

**2.4. Идеальные прямоугольные многогранники.** Напомним, что многогранник в  $\mathbb{H}^3$  называется *идеальным*, если все его вершины являются идеальными.

Опишем одно важное семейство идеальных прямоугольных многогранников. Для  $n \geq 3$  рассмотрим  $(2n+2)$ -гранник с верхним и нижним  $n$ -угольными основаниями и с боковой поверхностью из двух слоев по  $n$  треугольников, у которого в каждой вершине сходится по четыре ребра. Такой многогранник будем называть *n-антитризмой* и обозначать через  $A_n$ . Отметим, что  $A_3$  является октаэдром (рис. 4(b)).

По теореме 2.1 для каждого  $n \geq 3$  многогранник  $A_n$  реализуется в  $\mathbb{H}^3$  как идеальный прямоугольный многогранник  $\mathcal{A}_n$ . В [51, предложение 5] показано, что если многогранник имеет минимальное число граней среди всех идеальных прямоугольных многогранников в  $\mathbb{H}^3$ , у которых хотя бы одна  $n$ -угольная, то он является антитризмой  $\mathcal{A}_n$ .

Следующая формула выражает объемы многогранников  $\mathcal{A}_n$  через функцию Лобачевского.

**Теорема 2.5** [52]. Для  $n \geq 3$  имеет место равенство

$$\text{vol}(\mathcal{A}_n) = 2n \left[ \Lambda\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n}\right) \right]. \quad (3)$$

Верхние и нижние оценки объемов идеальных прямоугольных многогранников через число их вершин были получены Аткинсоном в [40].

**Теорема 2.6** [40, теорема 2.2]. Пусть  $\mathcal{P}$  — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с  $V$  вершинами. Тогда

$$\frac{v_{oct}}{4}(V - 2) \leq \text{vol}(\mathcal{P}) < \frac{v_{oct}}{2}(V - 4). \quad (4)$$

Оба неравенства превращаются в равенства, если  $\mathcal{P}$  является правильным идеальным гиперболическим октаэдром. Более того, существует последовательность идеальных прямоугольных многогранников  $\mathcal{P}_i$  с  $V_i$  вершинами такая, что  $\text{vol}(\mathcal{P}_i)/V_i$  стремится к  $\frac{1}{2}v_{oct}$ , когда  $i$  стремится к бесконечности.

В силу теоремы 2.1 в теореме 2.6 подразумевается, что  $V \geq 6$ . В [49] верхняя оценка в (4) была улучшена для идеальных прямоугольных гиперболических многогранников с числом вершин  $V \geq 8$ , а в [50] — с числом вершин  $V \geq 25$ .

**2.5. Прямоугольные многогранники с конечными и идеальными вершинами.** Предположим, что прямоугольный гиперболический многогранник  $\mathcal{P}$  имеет  $V_f$  конечных и  $V_\infty$  идеальных вершин. Обозначим через  $E$  число его ребер, а через  $F$  — число его граней. Эйлерова характеристика  $\chi(\mathcal{P})$  многогранника  $\mathcal{P}$  равна

$$\chi(\mathcal{P}) = V_\infty + V_f - E + F = 2.$$

Поскольку каждая конечная вершина инцидентна трем ребрам, а идеальная — четырем, то  $3V_f + 4V_\infty = 2E$ . Значит,

$$F = V_\infty + \frac{1}{2}V_f + 2, \quad (5)$$

откуда следует, что число  $V_f$  конечных вершин всегда четно. Учитывая, что по п. (1) теоремы 2.1 выполнено неравенство  $F \geq 6$ , получаем

$$V_\infty + \frac{1}{2}V_f \geq 4. \quad (6)$$

**Лемма 2.1.** Пусть  $f$  — грань прямоугольного многогранника  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}^3$ . Если  $f$  треугольная, то она содержит не менее двух идеальных вершин, а если  $f$  четырехугольная, то она содержит не менее одной идеальной вершины.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Напомним, что сумма внутренних углов  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$   $n$ -угольника в  $\mathbb{H}^2$  удовлетворяет неравенству  $\sum_{i=1}^n \alpha_i < (n-2)\pi$ . При этом в конечной вершине грани  $f$  внутренний угол равен  $\pi/2$ , а в идеальной — равен 0. Если  $f$  — треугольная грань с  $k$  конечными вершинами, то  $k \cdot \frac{\pi}{2} < \pi$ , откуда  $k \leq 1$ . Если  $f$  — четырехугольная грань с  $k$  конечными вершинами, то  $k \cdot \frac{\pi}{2} < 2\pi$ , откуда  $k \leq 3$ .  $\square$

Аткинсон [40] установил следующие верхнюю и нижнюю оценки на объем прямоугольного гиперболического многогранника, имеющего хотя бы одну идеальную вершину.

**Теорема 2.7** [40, теорема 2.4]. Пусть  $\mathcal{P}$  — прямоугольный гиперболический многогранник с  $V_\infty \geq 1$  идеальными и  $V_f$  конечными вершинами. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\frac{v_{oct}}{8} \cdot V_\infty + \frac{v_{oct}}{32} \cdot V_f - \frac{v_{oct}}{4} \leq \text{vol}(\mathcal{P}) < \frac{v_{oct}}{2} \cdot V_\infty + \frac{5v_{tet}}{8} \cdot V_f - \frac{v_{oct}}{2}. \quad (7)$$

В [50] верхняя оценка в (7) была улучшена для прямоугольных гиперболических многогранников таких, что  $V_\infty \geq 1$  и  $V_\infty + V_f \geq 18$ . Пользуясь тем, что  $v_{oct} = 4G$ , перепишем нижнюю оценку из (7) в следующем виде:

$$\text{vol}(\mathcal{P}) \geq \frac{G}{8} (4V_\infty + V_f - 8). \quad (8)$$

### § 3. Доказательство основной теоремы

Перейдем к доказательству теоремы 1.1. Пусть  $\mathcal{P}$  — прямоугольный многогранник конечного объема в  $\mathbb{H}^3$ . Обозначим через  $V_\infty \geq 0$  число его идеальных вершин, а через  $V_f \geq 0$  — число его конечных вершин. Выясним, при каких  $V_\infty$  и  $V_f$  может иметь место неравенство  $\text{vol}(\mathcal{P}) \leq G$ .

**Лемма 3.1.** *Предположим, что для многогранника  $\mathcal{P}$  имеет место один из следующих случаев: (1)  $V_f = 0$ ; (2)  $V_\infty = 0$ ; (3)  $V_\infty = 1$ . Тогда  $\text{vol}(\mathcal{P}) > G$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (1) В этом случае  $\mathcal{P}$  является идеальным прямоугольным многогранником и по теореме 2.6  $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq v_{\text{oct}} = 4G > G$ .

(2) В этом случае  $\mathcal{P}$  является компактным прямоугольным многогранником и по теореме 2.2 его объем ограничен снизу объемом прямоугольного додекаэдра, следовательно,  $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq 4,306207 > G$ .

(3) Как показал Нонака [53, лемма 3.1], в этом случае  $F \geq 12$ , а из равенства (5) следует, что  $V_f \geq 18$ . Тогда по формуле (8) получаем, что

$$\text{vol}(\mathcal{P}) \geq \frac{G}{8}G(4 \cdot 1 + 18 - 8) = \frac{14G}{8} > G. \quad \square$$

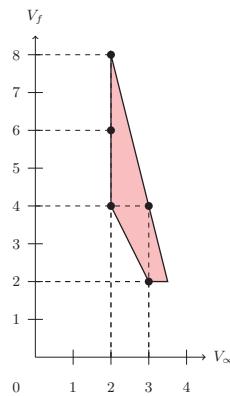


Рис. 5. Замкнутая область  $\Omega$ .

**Лемма 3.2.** *Пусть  $\Omega$  — замкнутая область, ограниченная четырехугольником с вершинами  $(2, 4)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3.5, 2)$  и  $(2, 8)$  (рис. 5). Пусть многогранник  $\mathcal{P}$  такой, что  $(V_\infty, V_f) \notin \Omega$ . Тогда  $\text{vol}(\mathcal{P}) > G$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы 3.1 и четности  $V_f$  можем считать, что если  $\text{vol}(\mathcal{P}) \leq G$ , то  $\mathcal{P}$  имеет  $V_\infty \geq 2$  идеальных и  $V_f \geq 2$  конечных вершин. В силу теоремы 2.1 величины  $V_\infty$  и  $V_f$  удовлетворяют неравенству (6). А в силу неравенства (8) для выполнения неравенства  $\text{vol}(\mathcal{P}) \leq G$  величины  $V_\infty$  и  $V_f$  должны удовлетворять неравенству  $4V_\infty + V_f \leq 16$ . Система неравенств

$$\begin{cases} V_\infty \geq 2, \\ V_f \geq 2, \\ V_\infty + \frac{1}{2}V_f \geq 4, \\ 4V_\infty + V_f \leq 16 \end{cases}$$

задает замкнутую область  $\Omega$ , изображенную на рис. 5.  $\square$

В силу лемм 3.1 и 3.2 неравенство  $\text{vol}(\mathcal{P}) \leq G$  может выполняться только если  $(V_\infty, V_f) \in \{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 2), (3, 4)\}$ . Каждый из пяти указанных случаев мы рассмотрим ниже.

Для многогранника  $\mathcal{P}$  определим величину  $W(\mathcal{P})$ , равную суммарному числу вершин по всем его граням. Поскольку в  $\mathcal{P}$  каждая идеальная вершина имеет валентность 4, а каждая конечная вершина — валентность 3, то

$$W(\mathcal{P}) = W(V_\infty, V_f) = 4V_\infty + 3V_f. \quad (9)$$

**Лемма 3.3.** *Если число идеальных вершин в многограннике  $\mathcal{P}$  равно  $V_\infty = 2$ , то  $\text{vol}(\mathcal{P}) > G$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы 3.2 для доказательства утверждения осталось рассмотреть три случая:  $(V_\infty, V_f) \in \{(2, 4), (2, 6), (2, 8)\}$ .

Случай 1:  $(V_\infty, V_f) = (2, 4)$ . Из формул (5) и (9) получаем, что  $F = 6$  и  $W(\mathcal{P}) = 20$ . Обозначим через  $p_n$ ,  $n \geq 3$ , число  $n$ -угольных граней в  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\sum_{n \geq 3} p_n = F = 6$  и  $\sum_{n \geq 3} np_n = W(\mathcal{P}) = 20$ . Отметим, что число треугольных граней удовлетворяет неравенству  $p_3 \leq 2$ . В самом деле, по лемме 2.1 каждая треугольная грань должна содержать две идеальные вершины, которые принадлежат общему ребру. Так как  $V_\infty = 2$ , то все треугольные грани должны содержать одно и то же ребро. Значит, таких граней не более двух, а каждая из оставшихся четырех граней имеет не менее чем четыре вершины. Получаем оценку  $W(\mathcal{P}) \geq 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 22$ , что противоречит равенству  $W(\mathcal{P}) = 20$ . Таким образом, случай 1 не реализуется.

Случай 2:  $(V_\infty, V_f) = (2, 6)$ . Из формул (5) и (9) получаем, что  $F = 7$  и

$$W(\mathcal{P}) = 4V_\infty + 3V_f = 26. \quad (10)$$

Рассмотрим все возможные варианты расположения двух идеальных вершин  $v_1$  и  $v_2$ .

Подслучай 2.1. Предположим, что  $v_1$  и  $v_2$  не лежат в одной треугольной грани. Тогда по лемме 2.1 в  $\mathcal{P}$  нет треугольных граней. Значит, каждая грань содержит не менее четырех вершин и  $W(\mathcal{P}) \geq 4F = 28$ , что противоречит равенству (10).

Подслучай 2.2. Предположим, что  $v_1$  и  $v_2$  лежат в одной треугольной грани (и, следовательно, соединены ребром). Тогда, как и в случае 1,  $p_3 \leq 2$ . В силу леммы 2.1 каждая четырехугольная грань содержит хотя бы одну идеальную вершину. Поскольку  $v_1$  и  $v_2$  соединены ребром, то число граней, которые содержат хотя бы одну идеальную вершину (а значит, могут быть треугольными или четырехугольными), не превосходит 6. Следовательно, имеется хотя бы одна грань, которая не содержит идеальных вершин, и число вершин в этой грани не менее 5. Получаем  $W(\mathcal{P}) \geq 3p_3 + 4(6 - p_3) + 5 \cdot 1 = 29 - p_3 \geq 27$ , что противоречит (10). Таким образом, случай 2 не реализуется.

Случай 3:  $(V_\infty, V_f) = (2, 8)$ . Из формул (5) и (9) получаем, что  $F = 8$  и

$$W(\mathcal{P}) = 4V_\infty + 3V_f = 32. \quad (11)$$

Рассмотрим все возможные варианты расположения двух идеальных вершин  $v_1$  и  $v_2$ .

Подслучай 3.1. Предположим, что обе идеальные вершины  $v_1$  и  $v_2$  лежат в  $k$ -угольной грани  $f$ ,  $k \geq 4$ , но не соединены ребром. В силу леммы 2.1

каждая четырехугольная грань должна содержать хотя бы одну идеальную вершину. Следовательно, помимо грани  $f$  вершина  $v_1$  может содержаться не более чем в трех четырехугольных гранях. Аналогичное свойство имеет место и для вершины  $v_2$ . Таким образом,  $\mathcal{P}$  имеет  $k$ -угольную грань  $f$  и не более чем 6 других четырехугольных граней. Следовательно, восьмая грань многогранника  $\mathcal{P}$  имеет только конечные вершины и число вершин в этой грани не менее 5. Таким образом,  $W(\mathcal{P}) \geq k + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 1 \geq 33$  с учетом  $k \geq 4$ , что противоречит (11).

**Подслучай 3.2.** Предположим, что идеальные вершины  $v_1$  и  $v_2$  лежат в  $k$ -угольной грани  $f$ ,  $k \geq 4$ , и соединены ребром  $e$ . Тогда грани  $f_1$ , смежная грани  $f$  по ребру  $e$ , также содержит бесконечные вершины  $v_1$  и  $v_2$ . В силу леммы 2.1 каждая четырехугольная грань должна содержать хотя бы одну идеальную вершину. Следовательно, помимо граней  $f$  и  $f_1$  вершина  $v_1$  может содержаться не более чем в двух четырехугольных гранях. Аналогичное свойство имеет место для вершины  $v_2$ . Таким образом, в  $\mathcal{P}$  число граней, имеющих хотя бы одну идеальную вершину, не превосходит 6 (при этом  $f_1$  может оказаться треугольной). Значит, найдутся хотя бы две грани, у которых все вершины конечны, и тем самым каждая из этих граней имеет не менее 5 вершин. Таким образом,  $W(\mathcal{P}) \geq k + 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \geq 33$  с учетом  $k \geq 4$ , что противоречит (11).

**Подслучай 3.3.** Предположим, что идеальные вершины  $v_1$  и  $v_2$  соединены ребром  $e$  и каждая из них лежит в двух треугольных гранях  $T_1$  и  $T_2$ . Обозначим через  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  грани, смежные  $T_1$  или  $T_2$ . Заметим, что  $Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$  являются четырехугольниками, расположенными, как на рис. 6. В самом деле, так как каждая из граней  $Q_i$  содержит не более одной идеальной вершины, то  $Q_i$  имеет не менее 4 вершин. Предположим, что хотя бы одна из граней  $Q_i$  является  $k$ -угольной, где  $k \geq 5$ . Поскольку идеальные вершины  $v_1$  и  $v_2$  соединены ребром  $e$ , то число граней в  $\mathcal{P}$ , которые содержат хотя бы одну идеальную вершину, не превосходит 6. Следовательно, в  $\mathcal{P}$  найдутся хотя бы две грани, у которых все вершины являются конечными и число вершин в каждой грани не менее 5. Таким образом,  $W(\mathcal{P}) \geq 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + k + 5 \cdot 2 \geq 33$  с учетом  $k \geq 5$ , что противоречит (11). Следовательно, все грани  $Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$  являются четырехугольниками.

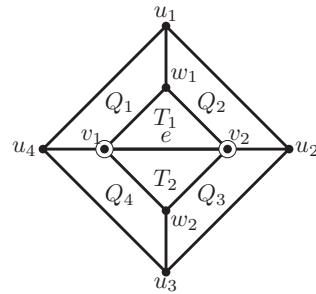
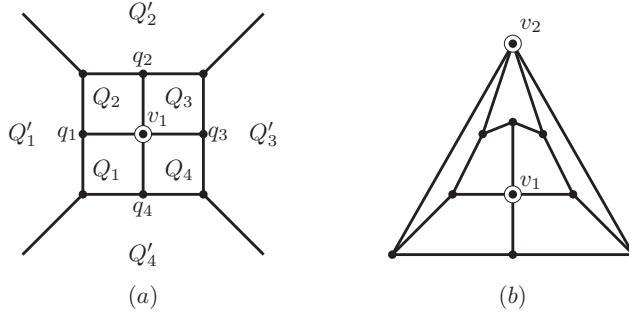


Рис. 6. Два смежных треугольника, окруженные четырехугольниками.

Для  $i = 1, 2, 3, 4$  обозначим через  $u_i$  вершину, принадлежащую общему ребру граней  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$ , где индексы берутся по модулю 4, которая не лежит в  $T_1$  или  $T_2$ . Через  $w_1$  и  $w_2$  обозначим конечные вершины треугольников  $T_1$  и  $T_2$  соответственно (см. рис. 6).

Рассмотрим следующие случаи.

Рис. 7. Многогранник  $\mathcal{P}_{(2,8)}$  и его диаграмма Шлегеля.

(i) Предположим, что вершины  $u_1, u_2, u_3, u_4$  попарно различны. Тогда все вершины, лежащие в гранях  $T_1, T_2, Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$ , имеют максимально возможную валентность, а именно, конечные вершины имеют валентность 3, а идеальные вершины — валентность 4. Следовательно, восемь вершин, изображенных на рис. 6, не соединены ребрами с оставшимися двумя вершинами многогранника  $\mathcal{P}$ , что противоречит связности одномерного остова многогранника.

(ii) Предположим, что совпали две последовательные вершины  $u_i$  и  $u_{i+1}$ . Тогда  $Q_{i+1}$  превращается в треугольник, что противоречит его четырехугольности, установленной выше.

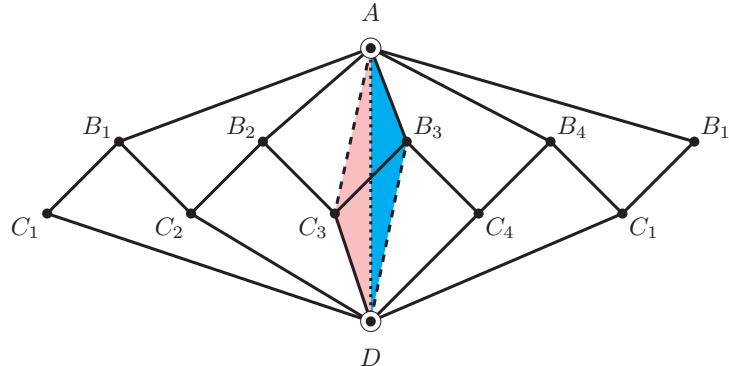
(iii) Предположим, что совпали две непоследовательные вершины  $u_i$  и  $u_{i+2}$ , а вершины  $u_{i+1}$  и  $u_{i+3}$  различны. Если  $i \in \{1, 3\}$ , то получим, что вершина  $u_1 = u_3$  смежна четырем вершинам  $w_1, w_2, u_2$  и  $u_4$ , что противоречит ее трехвалентности. Аналогично, если  $i \in \{2, 4\}$  то получим, что вершина  $u_2 = u_4$  смежна четырем вершинам  $v_1, v_2, u_1$  и  $u_3$ , что противоречит ее трехвалентности.

(iv) Предположим, что попарно совпали вершины  $u_i$  и  $u_{i+2}$ , а также вершины  $u_{i+1}$  и  $u_{i+3}$ . Тогда все вершины, лежащие в гранях  $T_1, T_2, Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$ , имеют максимально возможную валентность, а именно, конечные вершины  $\{w_1, w_2, u_i = u_{i+2}, u_{i+1} = u_{i+3}\}$  являются трехвалентными, а идеальные вершины  $\{v_1, v_2\}$  — четырехвалентными. Следовательно, указанные шесть вершин не соединены ребрами с остальными четырьмя вершинами многогранника  $\mathcal{P}$ , что противоречит связности одномерного остова многогранника.

Подслучай 3.4. Предположим, что идеальные вершины  $v_1$  и  $v_2$  не лежат в общей грани и в  $\mathcal{P}$  имеется  $k$ -угольная грань, где  $k \geq 5$ . По лемме 2.1 многогранник  $\mathcal{P}$  не может иметь треугольные грани. Следовательно,  $W(\mathcal{P}) \geq 5 + 7 \cdot 4 = 33$ , что противоречит (11).

Подслучай 3.5. Предположим, что все восемь граней многогранника  $\mathcal{P}$  являются четырехугольными. Тогда каждая грань содержит ровно одну идеальную вершину.

Обозначим идеальные вершины в  $\mathcal{P}$  через  $v_1$  и  $v_2$ . Пусть  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  — четырехугольные грани, которые содержат  $v_1$  (см. рис. 7(a)). Обозначим через  $q_i, i = 1, \dots, 4$ , конечную вершину, общую для  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$ , где индексы берутся по модулю 4. Пусть  $Q'_i$  — 4-угольная грань, имеющая общую вершину  $q_i$  с гранями  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$ . Поскольку  $\mathcal{P}$  имеет 16 ребер, то четыре ребра, по которым пересекаются грани  $Q'_i$  и  $Q'_{i+1}$ , должны встретиться в идеальной вершине  $v_2$ ,

Рис. 8. Многогранник  $\mathcal{P}_{(2,8)}$  и тетраэдр  $\Delta_{4,4,4}$ .

которая на рис. 7(a) предполагается бесконечно удаленной. Таким образом, рассматриваемому случаю соответствует единственный многогранник. Диаграмма Шлегеля этого же многогранника приведена на рис. 7(b). Поскольку для этого многогранника  $V_\infty = 2$  и  $V_f = 8$ , будем обозначать его через  $\mathcal{P}_{(2,8)}$ . На рис. 8 приведено изображение многогранника  $\mathcal{P}_{(2,8)}$ , где левый и правый края должны быть отождествлены вдоль  $AB_1C_1D$ . Из рисунка видно, что у  $\mathcal{P}_{(2,8)}$  имеется диэдриальная группа симметрий порядка восемь, порожденная отражениями в плоскостях  $(AC_3D)$  и  $(AB_3D)$ , пересекающихся по прямой  $AD$ .

При факторизации  $\mathcal{P}_{(2,8)}$  по этой диэдриальной группе симметрий получим тетраэдр  $\Delta_{4,4,4} = ADB_3C_3$ , у которого двугранные углы при ребрах  $AD$ ,  $AB_3$  и  $C_3D$  равны  $\pi/4$ , а остальные углы равны  $\pi/2$ . Диаграмма Коксетера для группы  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$  приведена на рис. 3.

Поскольку  $\text{vol}(\Delta_{4,4,4}) = \frac{1}{2}\Lambda(\frac{\pi}{4})$ , то  $\text{vol}(\mathcal{P}_{(2,8)}) = 4\Lambda(\frac{\pi}{4}) = 2G > G$ , что завершает доказательство леммы 3.3.  $\square$

**Лемма 3.4.** Если число идеальных вершин в прямоугольном многограннике  $\mathcal{P}$  равно  $V_\infty = 3$ , то  $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq G$ . Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\mathcal{P}$  является прямоугольной треугольной бипирамидой  $\mathcal{P}_{(3,2)}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы 3.2 осталось рассмотреть два случая:  $(V_\infty, V_f) = (3, 2)$  и  $(V_\infty, V_f) = (3, 4)$ . Чтобы следовать общему порядку перечисления случаев, принадлежащих области  $\Omega$ , будем называть эти случаи четвертым и пятым.

**Случай 4:**  $(V_\infty, V_f) = (3, 2)$ . Из формул (5) и (9) получаем, что  $F = 6$  и  $W(P) = 18$ . Предположим, что у  $\mathcal{P}$  имеется хотя бы одна грань с не менее чем четырьмя вершинами. Тогда  $W(\mathcal{P}) \geq 4 + 5 \cdot 3 = 19$ , что приводит к противоречию. Следовательно, все грани многогранника  $\mathcal{P}$  являются треугольниками. Обозначим идеальные вершины многогранника  $\mathcal{P}$  через  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$ . Поскольку каждая из шести треугольных граней должна содержать не менее двух идеальных вершин, то  $\mathcal{P}$  должен иметь не менее трех ребер, соединяющих идеальные вершины  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$ . Значит, эти ребра образуют цикл длины три в одномерном остеце многогранника, а шесть треугольных граней попарно инцидентны ребрам этого цикла. Следовательно,  $\mathcal{P}$  совпадает с многогранником  $\mathcal{P}_{(3,2)}$ , приведенным на рис. 2(b), объем которого равен  $\text{vol}(\mathcal{P}_{(3,2)}) = 2\Lambda(\frac{\pi}{4}) = G$ .

Случай 5:  $(V_\infty, V_f) = (3, 4)$ . Из формул (5) и (9) получаем, что  $F = 7$  и

$$W(\mathcal{P}) = 3V_f + 4V_\infty = 24. \quad (12)$$

Прежде всего заметим, что  $\mathcal{P}$  имеет только треугольные и четырехугольные грани. В самом деле, предположим от противного, что найдется такая  $k$ -угольная грань  $f$ , что  $k \geq 5$ . Заметим, что грань  $f$  имеет хотя бы 2 идеальные вершины. В противном случае у  $f$  найдутся по крайней мере 3 ребра, которые имеют только конечные вершины. Тогда три грани, смежные с  $f$  по этим ребрам, имеют не менее чем по 4 вершины. Следовательно,  $W(P) \geq k+4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \geq 26$  с учетом  $k \geq 5$ , что противоречит (12). Однако если  $f$  имеет не менее двух идеальных вершин, то  $f$  имеет общее ребро или общую вершину с не менее, чем семью гранями. Значит, число граней в  $\mathcal{P}$  не менее восьми, что противоречит условию  $F = 7$ . Таким образом,  $\mathcal{P}$  содержит только треугольные и четырехугольные грани. Более того, из  $W(\mathcal{P}) = 3p_3 + 4p_4 = 24$  и  $p_3 + p_4 = 7$  следует, что  $p_3 = 4$  и  $p_4 = 3$ .

Рассмотрим все возможные варианты расположения треугольных и четырехугольных граней.

Подслучай 5.1. Предположим, что  $\mathcal{P}$  имеет треугольную грань  $T_0$ , которая содержит все три идеальные вершины  $v_1, v_2$  и  $v_3$ . Тогда оставшиеся треугольные грани  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , смежны с  $T_0$  по ребрам (рис. 9(a)). Для  $i = 1, 2, 3$  обозначим через  $Q_i$  4-угольную грань, которая имеет общую идеальную вершину с треугольниками  $T_0, T_i$  и  $T_{i+1}$ .

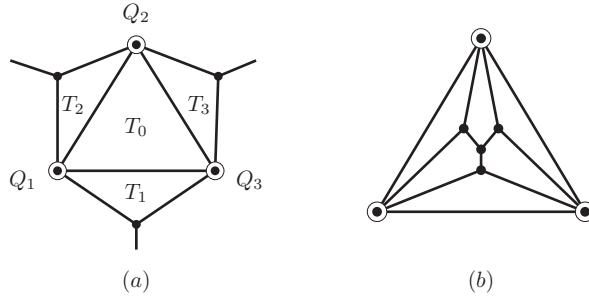
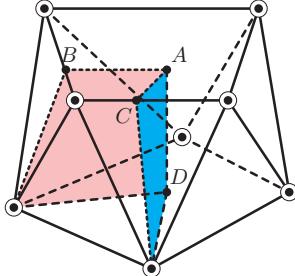
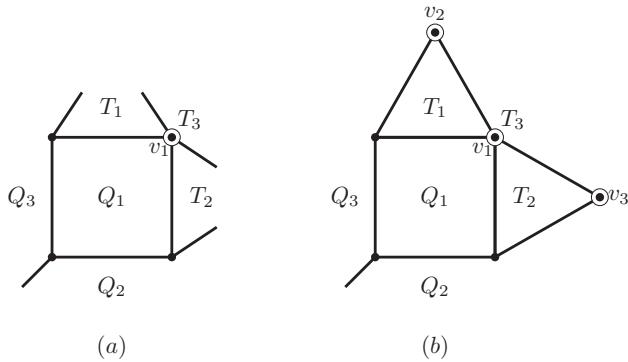


Рис. 9. Многогранник  $\mathcal{P}_{(3,4)}$  и его диаграмма Шлегеля.

Поскольку  $\mathcal{P}$  имеет 12 ребер, то три ребра, по которым пересекаются пары граней  $Q_i, Q_{i+1}$ , должны иметь общую конечную вершину. На рис. 9(a) эта вершина предполагается расположенной достаточно далеко. Диаграмма Шлегеля этого же многогранника приведена на рис. 9(b). Поскольку многогранник имеет 3 идеальных и 4 конечных вершины, будем обозначать его через  $\mathcal{P}_{(3,4)}$ .

Чтобы найти объем  $\text{vol}(\mathcal{P}_{(3,4)})$ , заметим, что под действием группы диэдра порядка 4, порожденной отражениями в гранях многогранника  $\mathcal{P}_{(3,4)}$ , проходящих через конечные вершины  $A, B, D$  и конечные вершины  $A, C, D$ , получим прямоугольную четырехугольную антипризму  $\mathcal{A}_4$  (рис. 10). Таким образом,  $\text{vol}(\mathcal{P}_{(3,4)}) = \frac{1}{4} \text{vol}(\mathcal{A}_4)$ . Используя формулу (3), получаем приближенное значение с точностью до шести знаков после запятой:  $\text{vol}(\mathcal{P}_{(3,4)}) = 1,505361 > G$ .

Далее будем предполагать, что  $\mathcal{P}$  не имеет треугольной грани, которая содержит все три идеальные вершины. Напомним, что в рассматриваемом случае  $\mathcal{P}$  имеет только 4 треугольные и 3 четырехугольные грани.

Рис. 10. Многогранник  $\mathcal{P}_{(3,4)}$  как  $\frac{1}{4}$ -долька антипризмы  $\mathcal{A}_4$ .Рис. 11. Подслучай 5.2: грань  $Q_1$  с одной идеальной вершиной  $v_1$ .

**Подслучай 5.2.** Предположим, что в  $\mathcal{P}$  существует четырехугольная грань  $Q_1$ , которая имеет ровно одну идеальную вершину, скажем  $v_1$ . Далее будем следовать обозначениям на рис. 11(a).

Так как грани  $Q_2$  и  $Q_3$  содержат ребра, обе вершины которых конечные, то  $Q_2$  и  $Q_3$  не могут быть треугольниками, следовательно, они являются четырехугольниками. Таким образом,  $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$  — полный список четырехугольных граней в  $P$ , а оставшиеся четыре грани треугольные. Обозначим три из них через  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , как на рис. 11(a). Тогда в  $T_1$  имеется идеальная вершина  $v_2$ , смежная  $v_1$ , а в  $T_2$  имеется идеальная вершина  $v_3$ , смежная  $v_1$  (рис. 11(b)). Поскольку  $T_3$  является треугольником, то вершины  $v_2$  и  $v_3$  соединены ребром. Таким образом, у  $\mathcal{P}$  имеется треугольная грань  $T_3$ , которая содержит все три идеальные вершины  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , и мы пришли к ситуации, которая уже была изучена в подслучае 5.1.

**Подслучай 5.3.** Предположим, что в  $\mathcal{P}$  не существует четырехугольной грани, которая имеет ровно одну идеальную вершину. Поскольку по лемме 2.1 каждая четырехугольная грань должна содержать хотя бы одну идеальную вершину, то каждая четырехугольная грань в  $\mathcal{P}$  имеет хотя бы две идеальные вершины. Обозначим через  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$  четырехугольные грани в  $\mathcal{P}$ , а через  $k_1 \geq 2$ ,  $k_2 \geq 2$  и  $k_3 \geq 2$  — число идеальных вершин в каждой из них. Для многогранника  $\mathcal{P}$  обозначим через  $WI(\mathcal{P})$  величину, равную суммарному числу идеальных вершин по всем граням многогранника. Поскольку  $V_\infty = 3$  и каждая идеальная вершина имеет валентность 4, получаем  $WI(\mathcal{P}) = 4 \cdot 3 = 12$ . С другой стороны, поскольку  $\mathcal{P}$  помимо  $Q_1, Q_2, Q_3$  имеет также четыре треугольные грани, каждая из которых содержит ровно по две

идеальные вершины, то суммарное число идеальных вершин по всем граням равно  $WI(\mathcal{P}) = 2 \cdot 4 + k_1 + k_2 + k_3 \geq 8 + 6 = 14$ ; противоречие.  $\square$

Из лемм 3.1–3.4 следует, что объем произвольного прямоугольного гиперболического многогранника ограничен снизу константой Каталана  $G$ , причем равенство достигается только для многогранника  $\mathcal{P}_{(3,2)}$ . Таким образом, теорема 1.1 доказана.

#### § 4. Арифметичность прямоугольных групп Коксетера

Хорошо известно, что арифметичность дискретных групп  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  конечного кообъема имеет важную роль при изучении гиперболических многообразий и орбифолдов  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ , см. [25]. Отметим здесь лишь следующее важное свойство: по теореме Маргулиса (см., например, [25, теорема 10.3.5]) соизмеримость

$$\text{Comm}(\Gamma) = \{\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3) \mid \gamma\Gamma\gamma^{-1} \text{ и } \Gamma \text{ соизмеримы}\}$$

является дискретной группой тогда и только тогда, когда  $\Gamma$  неарифметическая.

Для дискретных групп движений пространства  $\mathbb{H}^n$ , порожденных конечным числом отражений и имеющих фундаментальный многогранник конечного объема, необходимые и достаточные условия арифметичности были получены Винбергом в 1967 г. (см. [5]). Поскольку предметом наших обсуждений являются прямоугольные группы Коксетера, напомним, что в [54] было отмечено, что группа  $\Gamma(\mathcal{L}_n)$ , порожденная отражениями в гранях компактного прямоугольного многогранника Лебеля, при  $n \notin \{5, 6, 7, 8, 10, 12, 18\}$  является неарифметической, а затем в [35] было показано, что  $\Gamma(\mathcal{L}_n)$  является арифметической тогда и только тогда, когда  $n \in \{5, 6, 8\}$  (см. также [36]). С использованием критерия Винберга в [55] установлено, что группа  $\Gamma(\mathcal{A}_n)$ , порожденная отражениями в гранях прямоугольной идеальной антипризмы, является арифметической тогда и только тогда, когда  $n \in \{3, 4\}$ .

Известно [5], что условия арифметичности Винберга сильно упрощаются, если фундаментальный многогранник  $P$  группы  $\Gamma(P)$  не является компактным. А именно, пусть  $A(P) = (a_{ij})_{i,j=1}^N$  — матрица Грама многогранника  $P$ . Обозначим через  $\text{Cyc}(A)$  множество всех циклических произведений вида  $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{m-1} i_m} a_{i_m i_1}$ . Тогда для арифметичности группы  $\Gamma(P)$  необходимо и достаточно, чтобы все циклические произведения из  $\text{Cyc}(2 \cdot A(P))$  лежали в  $\mathbb{Z}$ . Арифметичность группы  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$  была отмечена в [5]. Например, для группы  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$  удвоенная матрица Грама имеет вид

$$2 \cdot A(\Delta_{4,4,4}) = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},$$

что позволяет легко убедиться в арифметичности этой группы.

Хорошо известно, что  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$  и  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$  соизмеримы с группой Пикара  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}\sqrt{-1})$  (см., например, [25, рис. 13.3]). Поскольку  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,2)})$  соизмерима с группой  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$  (см. рис. 2), группа  $\Gamma(\mathcal{P}_{(2,8)})$  соизмерима с группой  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$  (см. рис. 8), а группа  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,4)})$  соизмерима с группой, порожденной отражениями в гранях идеальной прямоугольной антипризмы  $\mathcal{A}_4$  (см. рис. 10), то все три группы  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,2)})$ ,  $\Gamma(\mathcal{P}_{(2,8)})$  и  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,4)})$  являются арифметическими. Зафиксируем этот факт в виде следующего замечания.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.** Прямоугольные гиперболические группы Коксетера  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,2)})$ ,  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,4)})$  и  $\Gamma(\mathcal{P}_{(2,8)})$  являются арифметическими.

### § 5. Открытые вопросы

В заключение сформулируем некоторые открытые вопросы.

**Вопрос 5.1.** Классифицировать арифметические прямоугольные гиперболические группы Коксетера.

В [51, предложение 5] установлено, что антипризма  $\mathcal{A}_n$ ,  $n \geq 3$ , является минимальной по числу граней в классе прямоугольных идеальных гиперболических многогранников, имеющих  $n$ -угольную грань. Естественно возникает вопрос о многограннике с аналогичным свойством в классе компактных многогранников.

**Вопрос 5.2.** Верно ли, что многогранник Лёбелля  $L(n)$ ,  $n \geq 5$ , является минимальным по числу граней в классе кокомпактных прямоугольных гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну  $n$ -угольную грань.

В [56] была найдена минимальная по кообъему неарифметическая гиперболическая группа Коксетера, имеющая некомпактный фундаментальный многогранник. Естественно возникает вопрос о прямоугольной группе Коксетера с аналогичным свойством. Напомним известные результаты для случаев компактных и идеальных прямоугольных многогранников Коксетера. Согласно [44] многогранник Лёбелля  $\mathcal{L}_7$  является четвертым по объему компактным прямоугольным многогранником в  $\mathbb{H}^3$  с  $\text{vol}(\mathcal{L}_7) = 7,563249$ . В [35] было показано, что группы отражений, соответствующие трем предшествующим многогранникам, являются арифметическими, а  $\Gamma(\mathcal{L}_7)$  неарифметическая. Следовательно,  $\Gamma(\mathcal{L}_7)$  является компактной неарифметической прямоугольной гиперболической группой Коксетера минимального объема. Согласно [57] идеальная антипризма  $\mathcal{A}_5$  является четвертым по объему идеальным прямоугольным многогранником в  $\mathbb{H}^3$  с  $\text{vol}(\mathcal{A}_5) = 8,137885$ . В [55] было показано, что два многогранника наименьшего объема  $\mathcal{A}_3$  и  $\mathcal{A}_4$  являются арифметическими. Более того, легко заметить, что третий многогранник наименьшего объема получается склеиванием двух копий  $\mathcal{A}_3$  по одной из его граней, поэтому он также арифметический. Следовательно,  $\Gamma(\mathcal{A}_5)$  является идеальной неарифметической прямоугольной гиперболической группой Коксетера минимального объема. Случай, когда прямоугольный многогранник Коксетера имеет как конечные, так и идеальные вершины, остается открытым.

**Вопрос 5.3.** Какая неарифметическая прямоугольная гиперболическая группа Коксетера в  $\mathbb{H}^3$  имеет наименьший кообъем?

Напомним также вопрос, сформулированный в [13, с. 66].

**Вопрос 5.4.** Верно ли, что наименьшее число гиперграней в компактном прямоугольном многограннике в  $\mathbb{H}^4$  равно 120?

### ЛИТЕРАТУРА

1. Best L. A. On torsion-free discrete subgroups of  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  with compact orbit space // Canad. J. Math. 1971. V. 23, N 3. P. 451–460.
2. Веснин А. Ю. Трехмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 5. С. 50–53.

3. Ratcliffe J. Foundations of hyperbolic manifolds. Berlin: Springer, 2006. (Graduate Text in Mathematics; V. 149).
4. Coxeter H.S.M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. V. 35, N 3. P. 588–621.
5. Винберг Э. Б. Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского // Мат. сб. 1967. Т. 114, № 3. С. 471–488.
6. Винберг Э. Б. Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности // Тр. Моск. мат. о-ва. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. Т. 47. С. 68–102.
7. Bugaenko V. Arithmetic crystallographic groups generated by reflections, and reflective hyperbolic lattices // Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory. Adv. Sov. Math. 1992. V. 8. P. 33–55.
8. Прохоров М. Н. Отсутствие дискретных групп отражений с некомпактным фундаментальным многогранником конечного объема в пространстве Лобачевского большой размерности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 2. С. 413–424.
9. Хованский А. Г. Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20, № 1. С. 50–61.
10. Винберг Э. Б., Каплинская И. М. О группах  $O_{18,1}(\mathbb{Z})$  и  $O_{19,1}(\mathbb{Z})$  // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 6. С. 1273–1275.
11. Borcherds R. Coxeter groups, Lorentzian lattices, and K3 surfaces // Internat. Math. Res. Notices. 1998. N 19. P. 1011–1031.
12. Allcock D. Infinitely many hyperbolic Coxeter groups through dimension 19 // Geometry & Topology. 2006. V. 10. P. 737–758.
13. Potyagailo L., Vinberg E. On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces // Comment. Math. Helv. 2005. V. 80. P. 63–73.
14. Dufour G. Notes on right-angled Coxeter polyhedra in hyperbolic spaces // Geom. Dedicata. 2010. V. 147. P. 227–282.
15. Винберг Э. Б. Некоторые примеры кристаллографических групп в пространствах Лобачевского // Мат. сб. 1969. Т. 120, № 4. С. 633–639.
16. Dunbar W. D., Meyerhoff G. R. Volumes of hyperbolic 3-orbifolds // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43, N 2. P. 611–637.
17. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Am. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 9–24.
18. Винберг Э. Б. Гиперболические группы отражений // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 1. С. 29–66.
19. Abrosimov N. V., Stepanishchev S. V. The volume of a trirectangular hyperbolic tetrahedron // Sib. Electron. Math. Rep. 2023. V. 20, N 1. P. 275–284.
20. Everitt B., Ratcliffe J. G., Tschantz S. Right-angled Coxeter polytopes, hyperbolic six-manifolds, and a problem of Siegel // Math. Ann. 2012. V. 354. P. 871–905.
21. Ratcliffe J., Tschantz S. The volume spectrum of hyperbolic 4-manifolds // Experimental Mathematics. 2000. V. 9, N 1. P. 101–125.
22. OEIS. The on-line encyclopedia of integers sequences. Available at <https://oeis.org/A006752>.
23. Catalan E. Sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies // Mémoties de l'Académie royale de Belgique. 1867. V. 33. P. 1–50.
24. Papanikolaou T. Catalan's Constant to 1,500,000 Places. <https://www.gutenberg.org/ebooks/812>.
25. Maclachlan C., Reid A. W. The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds. Berlin: Springer, 2003. (Graduate Text Math.; V. 219).
26. Siegel C. L. Some remarks on discontinuous groups // Ann. Math. 1945. V. 46, N 2. P. 708–718.
27. Belolipetsky M. Hyperbolic orbifolds of small volume // Proc. ICM 2014. V. 2. P. 837–851. The preprint version is available at <https://arxiv.org/abs/1402.5394>.
28. Adams C. C. The non-compact hyperbolic 3-manifold of small volume // Proc. Am. Math. Soc. 1987. V. 100, N 4. P. 601–606.
29. Chinburg T., Friedman E. The smallest arithmetic hyperbolic three-orbifold // Invent. Math. 1986. V. 86. P. 507–527.
30. Chinburg T., Friedman E., Jones K. J., Reid A. W. The arithmetic hyperbolic 3-manifold of smallest volume // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 2001. V. 30, N 4. P. 1–40.
31. Gabai D., Meyerhoff R., Milley P. Minimal volume cusped hyperbolic three-manifolds // J. Am. Math. Soc. 2009. V. 22. P. 1157–1215.

- 
- 32. Gehring F. W., Martin G. J. Minimal co-volume hyperbolic lattices. I. The spherical points of a Kleinian group // Ann. Math. 2009. V. 170, N 1. P. 123–161.
  - 33. Marshall T., Martin G. J. Minimal covolume lattices II // Annals of Math. 2012. V. 176. P. 261–301.
  - 34. Meyerhoff R. The cusped hyperbolic 3-orbifold of minimum volume // Bull. Am. Math. Soc. 1985. V. 13, N 2. P. 154–156.
  - 35. Antolin-Camarena O., Maloney G. R., Roeder R. K. W. Computing arithmetic invariants for hyperbolic reflection groups // Complex dynamics. Wellesley, MA: A K Peters, 2009. P. 597–631.
  - 36. Bogachev N., Douba S. Geometric and arithmetic properties of Löbell polyhedra // Algebr. Geom. Topol. 2025. V. 25, N 4. P. 2281–2295.
  - 37. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 2. С. 256–260.
  - 38. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 3. С. 456–478.
  - 39. Roeder R. K. W., Hubbard J. H., Dunbar W. D. Andreev's theorem on hyperbolic polyhedra // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 2007. V. 57. P. 825–882.
  - 40. Atkinson C. Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra // Algebraic & Geometric Topology. 2009. V. 9. P. 1225–1254.
  - 41. Kellerhals R. On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285. P. 541–569.
  - 42. Погорелов А. В. О правильном разбиении пространства Лобачевского // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 3–8.
  - 43. Веснин А. Ю. Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия // Успехи мат. наук. 2017. Т. 72, № 2. С. 147–190.
  - 44. Inoue T. Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra // Algebraic & Geometric Topology. 2008. V. 8. P. 1523–1565.
  - 45. Веснин А. Ю. Объемы трехмерных многообразий Лебедя // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 17–23.
  - 46. Matveev S., Pertoni C., Vesnin A. Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic three-manifolds // J. Aust. Math. Soc. 2009. V. 86. P. 205–219.
  - 47. Inoue T. Exploring the list of smallest right-angled hyperbolic polyhedra // Experimental Mathematics. 2022. V. 31, N 1. P. 165–183.
  - 48. Heard D. Orb. A computer program for creating and studying 3-orbifolds. Available at <http://www.ms.unimelb.edu.au/snap/orb.html>.
  - 49. Egorov A., Vesnin A. Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedra // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 2020. V. 52. P. 565–576.
  - 50. Александров С. А., Богачев Н. В., Веснин А. Ю., Егоров А. А. Об объемах гиперболических прямоугольных многогранников // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 2. С. 3–22.
  - 51. Kolpakov A. On the optimality of the ideal right-angled 24-cell // Algebraic & Geometric Topology. 2012. V. 12. P. 1941–1960.
  - 52. Thurston W. P. The geometry and topology of 3-manifolds. Princeton, NJ: Princeton Univ. Notes, 1980.
  - 53. Nonaka J. The number of cusps of right-angled polyhedra in hyperbolic spaces // Tokyo J. Math. 2015. V. 38, N 2. P. 539–560.
  - 54. Веснин А. Ю. Трехмерные гиперболические многообразия с общим фундаментальным многогранником // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 6. С. 29–32.
  - 55. Kellerhals R. A polyhedral approach to the arithmetic and geometry of hyperbolic link complements // J. Knot Theory and Its Ramifications. 2023. V. 32. 2350052 (24 pp.).
  - 56. Drewitz S. T., Kellerhals R. The non-arithmetic cusped hyperbolic 3-orbifold of minimal volume // Trans. Am. Math. 2023. V. 376. P. 3819–3866.
  - 57. Веснин А. Ю., Егоров А. А. Идеальные прямоугольные многогранники в пространстве

Лобачевского // Чебышевский сб. 2020. Т. 21, № 2. С. 65–83.

*Поступила в редакцию 4 августа 2025 г.*

*После доработки 4 августа 2025 г.*

*Принята к публикации 11 сентября 2025 г.*

Веснин Андрей Юрьевич (ORCID 0000-0000-7553-1269)

Егоров Андрей Александрович (ORCID 0009-0007-8795-8148)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

[vesnin@math.nsc.ru](mailto:vesnin@math.nsc.ru), [a.egorov2@g.nsu.ru](mailto:a.egorov2@g.nsu.ru)