Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2025. Том 66, № 6

УДК 517.955

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. В. Демиденко, С. Ма

Аннотация. Рассматривается класс строго псевдогиперболических операторов шестого порядка с переменными коэффициентами. В этот класс входит, в частности, обобщенный оператор Буссинеска. При некоторых условиях на коэффициенты установлены энергетические оценки.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.606

Ключевые слова: уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, псевдогиперболические операторы, энергетические оценки, весовые соболевские пространства.

Памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

1. Введение

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных изучению линейных уравнений с частными производными следующего вида:

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x). \tag{1.1}$$

Такие уравнения возникают при решении многих прикладных задач гидродинамики, физики атмосферы, физики плазмы, теории упругости и др. (см., например, монографии [1, 2] и имеющуюся там библиографию). В литературе уравнения вида (1.1) зачастую называются уравнениями *соболевского типа*, поскольку первое глубокое исследование свойств решений уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, проводилось в работах С. Л. Соболева (см. [3, с. 333-463]). Исследования С. Л. Соболева были продолжены его учениками Р. А. Александряном, Н. Н. Ваханией, Г. В. Вирабяном, А. А. Дезиным, Р. Т. Денчевым, Т. И. Зеленяком, В. И. Лебедевым, В. Н. Масленниковой, С. Г. Овсепяном и др.

Монография [1] является первой монографией, целиком посвященной теории краевых задач для уравнений вида (1.1). В этой монографии была введена некоторая классификация таких уравнений в случае, когда оператор $L_0(D_x)$ являлся квазиэллиптическим оператором. В частности, был определен класс

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

псевдогиперболических уравнений (см. [1, гл. 2]). В этот класс входят многомерное уравнение Власова — Релея — Бишопа [4–7]

$$(\alpha I - \beta\Delta)D_t^2 u - \gamma\Delta u + \sigma\Delta^2 u = f(t, x) \tag{1.2}$$

(Δ — оператор Лапласа по $x \in \mathbb{R}^n$), уравнение Гальперна [8]

$$\Delta D_t^2 u - \sum_{k=1}^{n} a_k D_{x_k}^4 u = f(t, x), \quad a_k > 0, \ k = 1, \dots, n, \tag{1.3}$$

обобщенное уравнение Буссинеска [9–11]

$$(a_0 I + a_1\Delta + a_2\Delta^2)D_t^2 u + (b_0 I + b_1\Delta + b_2\Delta^2)D_t u + (d_0 I + d_1\Delta + d_2\Delta^2 + d_3\Delta^3)u = f(t, x), \tag{1.4}$$

где

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0, \quad a_2 b_0 \geq 0, \quad a_2 b_1 \leq 0, \quad a_2 b_2 \geq 0,$$
$$a_2 d_0 \geq 0, \quad a_2 d_1 \leq 0, \quad a_2 d_2 \geq 0, \quad a_2 d_3 < 0.$$

Для некоторых классов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, известен ряд важных результатов по теории краевых задач (см., например, монографии [1, 2, 12]). Для класса псевдогиперболических уравнений достаточно хорошо изучена задача Коши в случае с постоянными коэффициентами (см., например, [13–16]), в случае с переменными коэффициентами для таких уравнений в литературе имеется только один результат по энергетическим оценкам [17], а по теории краевых задач имеются лишь результаты для конкретных уравнений (см., например, [11, 18–22]).

2. Основные результаты

В настоящей работе мы продолжаем изучение свойств псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами. Рассматривается класс дифференциальных операторов шестого порядка, не разрешенных относительно старшей производной,

$$\mathscr{L}(x; D_t, D_x) = \mathscr{L}^1(D_t, D_x) + \mathscr{L}^2(x; D_t, D_x), \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

где $\mathscr{L}^1(D_t, D_x)$ — однородный строго псевдогиперболический оператор с постоянными вещественными коэффициентами следующего вида:

$$\mathscr{L}^1(D_t, D_x) = L_0^1(D_x)D_t^2 + L_1^1(D_x)D_t + L_2^1(D_x), \tag{2.2}$$

$$L_0^1(D_x) = \sum_{|\beta|=4} a_\beta^0 D_x^\beta, \quad L_1^1(D_x) = \sum_{|\beta|=5} a_\beta^1 D_x^\beta, \quad L_2^1(D_x) = \sum_{|\beta|=6} a_\beta^2 D_x^\beta, \tag{2.3}$$

при этом $L_0^1(D_x)$ — эллиптический оператор и его символ удовлетворяет оценке

$$q_2|\xi|^4 \geq L_0^1(i\xi) \equiv \sum_{|\beta|=4} a_\beta^0 \xi^\beta \geq q_1|\xi|^4, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

где $q_2 \geq q_1 > 0$ — постоянные. Будем предполагать, что

$$-\big(L_1^1(i\xi)\big)^2 + 4\, L_2^1(i\xi)L_0^1(i\xi) > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{2.5}$$

Отметим, что из (2.5) в силу однородности полиномов $L_0^1(i\xi)$, $L_1^1(i\xi)$, $L_2^1(i\xi)$ вытекает неравенство

$$p_2|\xi|^{10} \geq d(\xi) \equiv -\big(L_1^1(i\xi)\big)^2 + 4\, L_2^1(i\xi)L_0^1(i\xi) \geq p_1|\xi|^{10}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.6}$$

где $p_2 \geq p_1 > 0$ — постоянные.

Согласно определению псевдогиперболических операторов [1, гл. 2] оператор $\mathscr{L}^1(D_t, D_x)$ действительно является строго псевдогиперболическим, поскольку выполнены следующие условия:

Условие 1. *Символ* $\mathscr{L}^1(i\eta, i\xi)$ *оператора* $\mathscr{L}^1(D_t, D_x)$ *однороден относительно вектора* $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (1/6, 1/6, \dots, 1/6)$.

Условие 2. *Оператор* $L_0^1(D_x)$ *эллиптический.*

Условие 3. *Уравнение*

$$(i\eta)^2 + \frac{L_1^1(i\xi)}{L_0^1(i\xi)}(i\eta) + \frac{L_2^1(i\xi)}{L_0^1(i\xi)} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{2.7}$$

в силу (2.4), (2.5) *имеет только вещественные и различные корни* $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi)$.

Второй дифференциальный оператор в (2.1) с вещественнозначными переменными коэффициентами $\mathscr{L}^2(x; D_t, D_x)$ имеет вид

$$\mathscr{L}^2(x; D_t, D_x) = \big(L_0^2(x; D_x) + (a(x) + a)I\big) D_t^2 + L_1^2(x; D_x) D_t + L_2^2(x; D_x), \tag{2.8}$$

где

$$\begin{gathered} L_0^2(x; D_x) = \sum_{|\beta|=4} a_\beta^0(x) D_x^\beta, \quad L_1^2(x; D_x) = \sum_{|\beta|=5} a_\beta^1(x) D_x^\beta, \\ L_2^2(x; D_x) = \sum_{|\beta|=6} a_\beta^2(x) D_x^\beta, \end{gathered} \tag{2.9}$$

при этом

$$a(x), a_\beta^k(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad a(x) \approx 0, \quad a_\beta^k(x) \approx 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

$a > 0$ — константа.

Оператор $\mathscr{L}^2(x; D_t, D_x)$ можно рассматривать как возмущение псевдогиперболического оператора $\mathscr{L}^1(D_t, D_x)$.

Рассматриваемый оператор (2.1)–(2.3), (2.8), (2.9) можно переписать в следующем виде:

$$\mathscr{L}(x; D_t, D_x) = (L_0(x; D_x) + (a(x) + a)I) D_t^2 + L_1(x; D_x) D_t + L_2(x; D_x), \tag{2.10}$$

где

$$L_0(x; D_x) = \sum_{|\beta|=4} \big(a_\beta^0 + a_\beta^0(x)\big) D_x^\beta, \quad L_1(x; D_x) = \sum_{|\beta|=5} \big(a_\beta^1 + a_\beta^1(x)\big) D_x^\beta,$$

$$L_2(x; D_x) = \sum_{|\beta|=6} \big(a_\beta^2 + a_\beta^2(x)\big) D_x^\beta.$$

Очевидно, при достаточно малых $a_\beta^k(x) \approx 0$ оператор $L_0(x; D_x)$ является эллиптическим.

Наша цель — получение энергетических оценок для строго псевдогиперболических операторов (2.10) с переменными коэффициентами.

В дальнейшем символом $W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > 0$, будем обозначать соболевское пространство с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$, т. е. функция $u(t, x)$ принадлежит $W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$, если

$$u_\gamma(t, x) = e^{-\gamma t} u(t, x) \in W_2^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

По определению положим

$$\big\| u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1}) \big\| = \big\| u_\gamma(t, x), W_2^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1}) \big\|.$$

Символом $\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)$ будем обозначать преобразование Фурье функции

$$u_\gamma(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Отметим, что из [1, 14] вытекает энергетическая оценка для псевдогиперболического оператора $(\mathscr{L}^1(D_t, D_x) + aI)$, $a \geq 0$, с постоянными коэффициентами. А именно, справедлива

Теорема 1. *Для любой функции* $u(t,x) \in W^{2,6}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > 0$, *такой, что*

$$D_t^2 D_x^\beta u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), \quad |\beta| = 4, \tag{2.11}$$

имеет место оценка

$$\gamma\|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \\ \leq c\|(\mathscr{L}^1(D_t, D_x) + aI)u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \tag{2.12}$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $u(t,x)$.

В настоящей работе аналогичный результат будет доказан для операторов вида (2.10) с переменными коэффициентами.

Теорема 2. *Существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что если коэффициенты* $a^k_\beta(x)$ *и* $a(x)$ *оператора* (2.10) *вместе со своими производными до пятого порядка включительно достаточно малы, то для любой функции* $u(t,x) \in W^{2,6}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$, *такой, что выполнено* (2.11), *имеет место оценка*

$$\gamma\|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \leq c\|\mathscr{L}(x; D_t, D_x)u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \tag{2.13}$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $u(t,x)$.

Оценки (2.12), (2.13) являются аналогами энергетических неравенств для строго гиперболических операторов [23, 24].

Отметим, что энергетические оценки вида (2.13) можно использовать для изучения корректности задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений с переменными коэффициентами

$$\mathscr{L}(x; D_t, D_x) = f(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x) \tag{2.14}$$

в весовом соболевском пространстве $W^{2,6}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > 0$. В частности, из теоремы 2 вытекает теорема о единственности решения задачи (2.14).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *тогда задача Коши* (2.14) *не может иметь более одного решения* $u(t,x) \in W^{2,6}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$, *удовлетворяющего* (2.11).

3. Энергетические оценки для операторов с переменными коэффициентами

В этом разделе докажем энергетические оценки (2.13) для строго псевдогиперболических операторов (2.10).

Будем предполагать, что переменные коэффициенты $a(x)$ и $a^k_\beta(x)$ оператора (2.10) вместе со своими производными до пятого порядка включительно достаточно малы. Их малость будет определена в дальнейшем.

В [1, гл. 2] при получении энергетических оценок для строго псевдогиперболических операторов с постоянными коэффициентами вида

$$L(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x), \tag{3.1}$$

где $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, использовался аналог схемы Лере [24], предложенной для изучения корректности задачи Коши для строго гиперболических уравнений. В частности, в [1, гл. 2] рассматривался полином

$$M(i\eta + \gamma, i\xi) = -\operatorname{Im}(L(i\eta + \gamma, i\xi)\overline{D_\eta L(i\eta + \gamma, i\xi)}), \tag{3.2}$$

где $L(i\eta, i\xi)$ — символ строго псевдогиперболического оператора (3.1). В [1] предполагалось, что символ однороден относительно некоторого вектора

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_0 > 0,\ 1/\alpha_j \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots, n,$$

и в этом случае была получена оценка

$$M(i\eta + \gamma, i\xi) \geq c_1 \gamma \langle \xi \rangle^{2(1-l\alpha_0)} (|i\eta + \gamma| + \langle \xi \rangle^{\alpha_0})^{2(l-1)}, \quad \gamma > 0,$$

$$(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \langle \xi \rangle^2 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{2/\alpha_j}, \quad c_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Из этого неравенства вытекает энергетическая оценка для оператора (3.1)

$$\gamma \| \langle \xi \rangle^{(1-l\alpha_0)} (|i\eta + \gamma| + \langle \xi \rangle^{\alpha_0})^{(l-1)} \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| \\ \leq c_2 \| L(D_t, D_x) u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \|, \quad \gamma > 0,$$

с константой $c_2 > 0$, не зависящей от $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Отсюда, в частности, следует неравенство (2.12) при $a = 0$.

В работе [17] такой подход был использован для получения энергетической оценки для одного частного случая строго псевдогиперболического оператора четвертого порядка с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\widehat{L}(x; D_t, D_x) = (\widehat{L}_0(D_x) + aI) D_t^2 + \widehat{L}_1(x; D_x) D_t + \widehat{L}_2(x; D_x), \tag{3.3}$$

где

$$\widehat{L}_0(D_x) = \sum_{|\beta|=2} a_\beta^0 D_x^\beta, \quad \widehat{L}_1(x; D_x) = \sum_{|\beta|=3} \big(a_\beta^1 + a_\beta^1(x)\big) D_x^\beta,$$

$$\widehat{L}_2(x; D_x) = \sum_{|\beta|=4} \big(a_\beta^2 + a_\beta^2(x)\big) D_x^\beta, \quad a_\beta^k(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad a_\beta^k(x) \approx 0,\ k = 1, 2,$$

при этом оператор $\widehat{L}_0(D_x)$ эллиптический с постоянными коэффициентами. Отметим, что в качестве аналога *разделяющего оператора* в [17] использовался такой же оператор, как в [1] и [14] для случая постоянных коэффициентов.

Будем развивать подход из работы [17] для получения энергетической оценки для оператора (2.10), применяя аналог схемы Лере, но в отличие от [17] будем использовать аналог разделяющего оператора с учетом переменных коэффициентов. А именно, для любой функции $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ рассмотрим следующий аналог формы (3.1) из [17]:

$$\mathscr{M} u = -\operatorname{Im} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\gamma t} \mathscr{L}(x; D_t, D_x) u(t, x) \overline{\big(e^{-\gamma t} \mathscr{L}_1^1(x; D_t, D_x) u(t, x)\big)}\, dz, \tag{3.4}$$

где $\gamma > 0$,

$$\mathscr{L}_1^1(x; D_t, D_x) = 2i(L_0(x; D_x) + (a(x) + a)I) D_t + i L_1(x; D_x), \quad z = (t, x). \tag{3.5}$$

Очевидно, (3.4) можно переписать в виде

$$\mathscr{M} u = -\operatorname{Im} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathscr{L}(x; D_t + \gamma I, D_x) u_\gamma(t, x) \overline{\big(\mathscr{L}_1^1(x; D_t + \gamma I, D_x) u_\gamma(t, x)\big)}\, dz.$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать следующее обозначение для скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$\langle v, \omega \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} v(z)\overline{\omega(z)}\, dz,$$

и для сокращения записи будем писать

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(x; D_t + \gamma I, D_x) = (L_0(x; D_x) + (a(x) + a)I)(D_t + \gamma I)^2 \\ + L_1(x; D_x)(D_t + \gamma I) + L_2(x; D_x),\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}_1^1(x) = \mathscr{L}_1^1(x; D_t + \gamma I, D_x) = 2i(L_0(x; D_x) + (a(x) + a)I)(D_t + \gamma I) + iL_1(x; D_x).$$

Тогда $\mathscr{M}u$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathscr{M}u &= -\operatorname{Im}\big\langle \mathscr{L}(x)u_\gamma, \mathscr{L}_1^1(x)u_\gamma \big\rangle \\ &= -\frac{1}{2i}\big(\big\langle \mathscr{L}(x)u_\gamma, \mathscr{L}_1^1(x)u_\gamma\big\rangle - \big\langle \mathscr{L}_1^1(x)u_\gamma, \mathscr{L}(x)u_\gamma\big\rangle\big) \\ &= -\frac{1}{2i}\big\langle\big(\big(\mathscr{L}_1^1(x)\big)^*\mathscr{L}(x) - (\mathscr{L}(x))^*\mathscr{L}_1^1(x)\big)u_\gamma, u_\gamma\big\rangle. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Введем дифференциальный оператор

$$\mathscr{P}(x; D_t, D_x, \gamma) = -\frac{1}{2i}\big(\big(\mathscr{L}_1^1(x)\big)^*\mathscr{L}(x) - (\mathscr{L}(x))^*\mathscr{L}_1^1(x)\big). \qquad (3.7)$$

Тогда выражение (3.6) будет иметь вид

$$\mathscr{M}u = \langle \mathscr{P}(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma\rangle. \qquad (3.8)$$

Учитывая вещественнозначность коэффициентов оператора (2.10) и вид оператора (3.5), сопряженные к ним операторы можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}(x))^*v(x) = (D_t - \gamma I)^2\Big[\sum_{|\beta|=4} D_x^\beta\big(\big(a_\beta^0(x) + a_\beta^0\big)v(x)\big) + (a(x) + a)v(x)\Big] \\ + (D_t - \gamma I)\sum_{|\beta|=5} D_x^\beta\big(\big(a_\beta^1(x) + a_\beta^1\big)v(x)\big) + \sum_{|\beta|=6} D_x^\beta\big(\big(a_\beta^2(x) + a_\beta^2\big)v(x)\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(\mathscr{L}_1^1(x)\big)^*v(x) = 2i(D_t - \gamma I)\sum_{|\beta|=4} D_x^\beta\big(\big(a_\beta^0(x) + a_\beta^0\big)v(x)\big) \\ + 2i(D_t - \gamma I)(a(x) + a)v(x) + i\sum_{|\beta|=5} D_x^\beta\big(\big(a_\beta^1(x) + a_\beta^1\big)v(x)\big).\end{aligned}$$

Тогда дифференциальный оператор (3.7) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma = -(D_t - \gamma I)\sum_{|\beta|=4} D_x^\beta\big(\big(a_\beta^0(x) + a_\beta^0\big)\mathscr{L}(x)u_\gamma\big) \\ - (D_t - \gamma I)(a(x) + a)\mathscr{L}(x)u_\gamma - \frac{1}{2}\sum_{|\beta|=5} D_x^\beta\big(\big(a_\beta^1(x) + a_\beta^1\big)\mathscr{L}(x)u_\gamma\big) \\ + (D_t - \gamma I)^2\sum_{|\beta|=4} D_x^\beta\big(\big(a_\beta^0(x) + a_\beta^0\big)\mathscr{L}_1^1(x)u_\gamma\big) + (D_t - \gamma I)^2(a(x) + a)\mathscr{L}_1^1(x)u_\gamma\end{aligned}$$

$$+ (D_t - \gamma I) \sum_{|\beta|=5} D_x^\beta \big((a_\beta^1(x) + a_\beta^1) \mathscr{L}_1^1(x) u_\gamma \big) + \sum_{|\beta|=6} D_x^\beta \big((a_\beta^2(x) + a_\beta^2) \mathscr{L}_1^1(x) u_\gamma \big).$$

Учитывая гладкость коэффициентов оператора (2.10), дифференциальный оператор (3.7) по аналогии с (3.4) из [17] можно представить в следующем виде:

$$\mathscr{P}(x; D_t, D_x, \gamma) = P(x; D_t, D_x, \gamma) + p(x; D_t, D_x, \gamma), \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} P(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma = {} & -2\gamma \big(D_t^2 - \gamma^2 I\big) \Big(\sum_{|\alpha|=4} \big(a_\alpha^0(x) + a_\alpha^0\big) D_x^\alpha + (a(x) + a) I \Big) \\ & \circ \Big(\sum_{|\beta|=4} \big(a_\beta^0(x) + a_\beta^0\big) D_x^\beta + (a(x) + a) I \Big) u_\gamma \\ & + 2\gamma \Big(\sum_{|\alpha|=4} \big(a_\alpha^0(x) + a_\alpha^0\big) D_x^\alpha + (a(x) + a) I \Big) \Big(\sum_{|\beta|=6} \big(a_\beta^2(x) + a_\beta^2\big) D_x^\beta \Big) u_\gamma \\ & - 2\gamma D_t \Big(\sum_{|\alpha|=5} \big(a_\alpha^1(x) + a_\alpha^1\big) D_x^\alpha \Big) \Big(\sum_{|\beta|=4} \big(a_\beta^0(x) + a_\beta^0\big) D_x^\beta + (a(x) + a) I \Big) u_\gamma \\ & - \gamma \Big(\sum_{|\alpha|=5} \big(a_\alpha^1(x) + a_\alpha^1\big) D_x^\alpha \Big) \Big(\sum_{|\beta|=5} \big(a_\beta^1(x) + a_\beta^1\big) D_x^\beta \Big) u_\gamma, \end{aligned} \tag{3.10}$$

а оператор $p(x; D_t, D_x, \gamma)$ имеет десятый порядок. В дальнейшем будем считать, что оператор умножения на параметр γ^k является оператором k-го порядка. С учетом этого оператор $P(x; D_t, D_x, \gamma)$ имеет одиннадцатый порядок.

В силу (3.9) выражение (3.8) можно записать в виде

$$\mathscr{M} u = \langle P(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle + \langle p(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle. \tag{3.11}$$

Представим оператор (3.10) в виде двух дифференциальных операторов:

$$P(x; D_t, D_x, \gamma) = P_0(D_t, D_x, \gamma) + P_1(x; D_t, D_x, \gamma), \tag{3.12}$$

где оператор $P_0(D_t, D_x, \gamma)$ имеет только постоянные коэффициенты, а коэффициенты в $P_1(x; D_t, D_x, \gamma)$, стоящие перед операторами дифференцирования $D_x^{\alpha+\beta}$, зависят от x. Такое представление можно получить, используя определения дифференциальных операторов (2.3). Тогда для оператора $P_0(D_t, D_x, \gamma)$ получим представление

$$\begin{aligned} P_0(D_t, D_x, \gamma) = {} & \gamma \big(-2 \big(D_t^2 - \gamma^2 I\big) \big(L_0^1(D_x) + a\big) \big(L_0^1(D_x) + a\big) \\ & + 2 \big(L_0^1(D_x) + a\big) L_2^1(D_x) - 2 D_t \big(L_0^1(D_x) + a\big) L_1^1(D_x) - L_1^1(D_x) L_1^1(D_x) \big). \end{aligned} \tag{3.13}$$

При таком определении оператора $P_0(D_t, D_x, \gamma)$ все коэффициенты в операторе $P_1(x, D_t, D_x, \gamma)$ из (3.12) содержат члены $a_\alpha^0(x)$, $a_\alpha^1(x)$, $a_\alpha^2(x)$, которые вместе со своими производными до пятого порядка включительно достаточно малы. Поэтому для любой функции $u(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ справедлива оценка

$$|\langle P_1(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle| \le \gamma \varepsilon c_1 \| (|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|) \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \|^2, \tag{3.14}$$

где $c_1 > 0$ — константа, зависящая от a и коэффициентов оператора (2.2), $\varepsilon > 0$ определяется малостью коэффициентов $a_\alpha^k(x)$ и их производных до пятого порядка включительно.

Аналогичная оценка имеет место для второго слагаемого из (3.11):

$$|\langle p(x;D_t,D_x,\gamma)u_\gamma,u_\gamma\rangle| \le c_2\|(|\xi|^4+a)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2, \quad (3.15)$$

где $c_2>0$ — константа, зависящая от a и коэффициентов оператора (2.10).

Рассмотрим форму

$$\langle P_0(D_t,D_x,\gamma)u_\gamma,u_\gamma\rangle, \quad u(t,x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \quad \gamma>0.$$

В силу равенства Парсеваля имеем

$$\begin{aligned}\langle P_0(D_t,D_x,\gamma)u_\gamma,u_\gamma\rangle &= \gamma\bigl(\bigl\langle 2(\eta^2+\gamma^2)\bigl(L_0^1(i\xi)+a\bigr)^2\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi),\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi)\bigr\rangle\\ &+\bigl\langle 2\bigl(L_0^1(i\xi)+a\bigr)L_2^1(i\xi)\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi),\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi)\bigr\rangle-\bigl\langle 2i\eta\bigl(L_0^1(i\xi)+a\bigr)L_1^1(i\xi)\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi),\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi)\bigr\rangle\\ &-\bigl\langle\bigl(L_1^1(i\xi)\bigr)^2\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi),\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi)\bigr\rangle\bigr).\end{aligned}$$

Учитывая определение операторов (2.3), это можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\langle P_0(D_t,D_x,\gamma)u_\gamma,u_\gamma\rangle &= \gamma\bigl\langle[2(\eta^2+\gamma^2)\bigl(L_0^1(i\xi)+a\bigr)^2-2\bigl(L_0^1(i\xi)+a\bigr)L_2^1(\xi)\\ &+2\eta\bigl(L_0^1(i\xi)+a\bigr)L_1^1(\xi)+\bigl(L_1^1(\xi)\bigr)^2]\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi),\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi)\bigr\rangle.\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned}M(\eta,\gamma,\xi,a) &= \gamma\bigl[2(\eta^2+\gamma^2)\bigl(L_0^1(\xi)+a\bigr)^2-2\bigl(L_0^1(\xi)+a\bigr)L_2^1(\xi)\\ &+2\eta\bigl(L_0^1(\xi)+a\bigr)L_1^1(\xi)+\bigl(L_1^1(\xi)\bigr)^2\bigr].\end{aligned} \quad (3.16)$$

Тогда предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\langle P_0(D_t,D_x,\gamma)u_\gamma,u_\gamma\rangle = \langle M(\eta,\gamma,\xi,a)\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi),\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi)\rangle. \quad (3.17)$$

Запишем функцию (3.16) в виде

$$\begin{aligned}M(\eta,\gamma,\xi,a) &= 2\gamma\bigl(L_0^1(\xi)+a\bigr)^2\Biggl(\biggl(\eta+\frac{L_1^1(\xi)}{2(L_0^1(\xi)+a)}\biggr)^2\\ &+\frac{\bigl(L_1^1(\xi)\bigr)^2-4\bigl(L_0^1(\xi)+a\bigr)L_2^1(\xi)}{4\bigl(L_0^1(\xi)+a\bigr)^2}+\gamma^2\Biggr).\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$Q(\eta,\gamma,\xi,a) = \biggl(\eta+\frac{L_1^1(\xi)}{2\bigl(L_0^1(\xi)+a\bigr)}\biggr)^2+\frac{\bigl(L_1^1(\xi)\bigr)^2-4\bigl(L_0^1(\xi)+a\bigr)L_2^1(\xi)}{4\bigl(L_0^1(\xi)+a\bigr)^2}+\gamma^2. \quad (3.18)$$

Тогда полином (3.16) можно представить в виде

$$M(\eta,\gamma,\xi,a) = 2\gamma\bigl(L_0^1(\xi)+a\bigr)^2Q(\eta,\gamma,\xi,a). \quad (3.19)$$

Заметим, что функция $Q(\eta,\gamma,\xi,0)$, $(\eta,\gamma,\xi)\in\mathbb{R}^{n+2}$, однородная степени 2 и в силу условий (2.4), (2.5) обращается в 0 только при $\eta=\gamma=|\xi|=0$. Поэтому существуют положительные константы $r_2\ge r_1$, для которых выполнена оценка

$$r_2(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2)\ge Q(\eta,\gamma,\xi,0)\ge r_1(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2), \quad (3.20)$$

или

$$r_2\ge Q(\eta',\gamma',\xi',0)\ge r_1>0,$$

$$\eta' = \eta/\Delta, \quad \gamma' = \gamma/\Delta, \quad \xi' = \xi/\Delta, \quad \Delta = \sqrt{\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2}.$$

Рассмотрим функцию (3.18) при $a > 0$ и запишем ее следующим образом:

$$Q(\eta, \gamma, \xi, a) = \Delta^2 Q\left(\eta', \gamma', \xi', \frac{a}{\Delta^4}\right).$$

Тогда в силу равномерной непрерывности функции

$$Q(\eta', \gamma', \xi', \alpha), \quad (\eta')^2 + (\gamma')^2 + |\xi'|^2 = 1, \quad \alpha \in [0, \alpha_0],$$

из оценки (3.20) следует, что существует $\gamma_1 > 0$ такое, что при всех $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\gamma \geq \gamma_1$ будет выполняться неравенство

$$2r_2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) \geq Q(\eta, \gamma, \xi, a) \geq \frac{r_1}{2}(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2).$$

Отсюда в силу (3.19) получаем

$$4r_2\gamma\big(L_0^1(\xi) + a\big)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) \geq M(\eta, \gamma, \xi, a) \geq r_1\gamma\big(L_0^1(\xi) + a\big)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2).$$

Следовательно, учитывая (2.4), имеем

$$\begin{aligned} 4r_2\gamma(q_2|\xi|^4 + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) &\geq M(\eta, \gamma, \xi, a) \\ &\geq r_1\gamma(q_1|\xi|^4 + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2), \quad \gamma \geq \gamma_1, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

Поэтому для (3.17) получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} &\langle M(\eta, \gamma, \xi, a)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)\rangle \\ &\qquad \geq r_1\gamma\langle(q_1|\xi|^4 + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)\rangle \\ &\qquad \geq \rho\gamma\|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2, \quad \gamma \geq \gamma_1, \end{aligned} \tag{3.21}$$

где $\rho > 0$ — константа, зависящая от a, r_1, q_1.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Учитывая формулы (3.6), (3.8), (3.11), (3.12), (3.17), форму (3.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathscr{M}u = &\langle M(\eta, \gamma, \xi, a)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)\rangle \\ &+ \langle P_1(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma\rangle + \langle p(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathscr{M}u \geq &\langle M(\eta, \gamma, \xi, a)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)\rangle \\ &- |\langle P_1(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma\rangle| - |\langle p(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma\rangle|. \end{aligned}$$

Используя оценки (3.14), (3.15) и (3.21), при $\gamma \geq \gamma_1$ получим неравенство

$$\mathscr{M}u \geq \gamma\left(\rho - \varepsilon c_1 - \frac{c_2}{\gamma}\right)\|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2. \tag{3.22}$$

Пусть $\gamma_2 = 4c_2/\rho$, и предположим, что коэффициенты оператора (2.8) вместе с производными до пятого порядка включительно настолько малы, что $4c_1\varepsilon \leq \rho$. Тогда из оценки (3.22) при $\gamma \geq \gamma_0 = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$ для любой $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ вытекает неравенство

$$\mathscr{M}u \geq \gamma\frac{\rho}{2}\|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2. \tag{3.23}$$

Оценим форму (3.4) сверху. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}\big|\mathscr{M}u\big| &\leq \|e^{-\gamma t}\mathscr{L}(x;D_t,D_x)u(t,x),L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \\ &\qquad\times \big\|e^{-\gamma t}\mathscr{L}_1^1(x;D_t,D_x)u(t,x),L_2(\mathbb{R}^{n+1})\big\| \\ &= \|\mathscr{L}(x;D_t,D_x)u(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\|\big\|\mathscr{L}_1^1(x;D_t+\gamma I,D_x)u_\gamma(t,x),L_2(\mathbb{R}^{n+1})\big\|.\end{aligned}$$

Поскольку все коэффициенты оператора (2.10) постоянны вне некоторого компакта, из определения оператора (3.5) следует оценка

$$\begin{aligned}|\mathscr{M}u| &\leq c_3\|\mathscr{L}(x;D_t,D_x)u(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \\ &\qquad\times \|(|\xi|^4+a)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|,\end{aligned}$$

где $c_3>0$ — константа, зависящая от коэффициентов (3.5).

Из этого неравенства и (3.23) при достаточно малых возмущениях коэффициентов оператора (2.10) при $\gamma\geq\gamma_0$ вытекает энергетическая оценка (2.13) для любых функций $u(t,x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Следовательно, в силу теоремы о всюду плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ в соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$ эта оценка справедлива для любых функций $u(t,x)\in W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$, удовлетворяющих условию (2.11).

Теорема 2 доказана.

Замечание. Учитывая доказанную теорему и используя теорему о разбиении единицы, нетрудно установить энергетическую оценку для операторов вида (2.10), являющихся строго псевдогиперболическими при любом $x_0\in\mathbb{R}^n$ и имеющих достаточно гладкие коэффициенты, постоянные вне компакта.

Из теоремы 2 вытекает теорема 3 о единственности решения задачи Коши (2.14) в указанном классе функций. Действительно, если $u(t,x)$ — решение задачи Коши с нулевыми данными

$$f(t,x)=\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=0,$$

то, продолжая его нулем при $t<0$, получим функцию $\overline{u}(t,x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 2. Следовательно, из оценки (2.13) получим

$$\|(|\xi|^4+a)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\widehat{\overline{u}}_\gamma(\eta,\xi),L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|=0,\quad \gamma>\gamma_0.$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что $u(t,x)=0$, т. е. двух различных решений задачи (2.14) не существует.

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
3. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики; Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 2003. Т. I.
4. *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. (2-е изд., перераб. и доп.).
5. *Герасимов С. И., Ерофеев В. И.* Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров: ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014.
6. *Bishop R. E. D.* Longitudinal waves in beams // Aeronautical Quarterly. 1952. V. 3, N 4. P. 280–293.

7. *Rao J. S.* Advanced theory of vibration. New York: John Wiley and Sons, 1992.
8. *Гальперн С. А.* Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 2. С. 239–249.
9. *Wang Y., Guo B.* Blow-up of solution for a generalized Boussinesq equation // Appl. Math. Mech. 2007. V. 28, N 11. P. 1437–1443.
10. *Polat N., Piskin E.* Existence and asymptotic behavior of solution of Cauchy problem for the damped sixth-order Boussinesq equations // Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 2015. V. 31, N 3. P. 735–746.
11. *Бондарь Л. Н., Ма С.* О краевой задаче в цилиндре для одного псевдогиперболического уравнения шестого порядка // Мат. тр. 2024. Т. 27, № 3. С. 30–51.
12. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Koln: VSP, 2003.
13. *Fedotov I., Volevich L. R.* The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russian J. Math. Physics. 2006. V. 13, N 3. P. 278–292.
14. *Демиденко Г. В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
15. *Fedotov I., Shatalov M., Marais J.* Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration // Acta Mechanica. 2016. V. 227, N 11. P. 3315–3324.
16. *Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В.* О корректности задачи Коши для псевдогиперболических уравнений в весовых соболевских пространствах // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 895–911.
17. *Демиденко Г. В.* Энергетические оценки для одного класса псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2024. Т. 64, № 8. С. 1466–1475.
18. *Pereira P. J. S., Lopes N. D., Trabuco L.* Soliton-type and other travelling wave solutions for an improved class of nonlinear sixth-order Boussinesq equations // Nonlinear Dynam. 2015. V. 82, N 1–2. P. 783–818.
19. *Zhang Z., Huang J., Sun M.* Well-posedness and decay property for the generalized damped Boussinesq equation with double rotational inertia // Kodai Math. J. 2016. V. 39, N 3. P. 535–551.
20. *Умаров Х. Г.* Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболического уравнения, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 3. С. 672–689.
21. *Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В., Нурмахматов В. С.* Краевая задача в цилиндре для одного псевдогиперболического уравнения // Челябинск. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, № 4. С. 469–482.
22. *Шеметова В. В.* Одна краевая задача для псевдогиперболического уравнения в четверти пространства // Мат. тр. 2025. Т. 28, № 2. С. 102–123.
23. *Петровский И. Г.* Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986.
24. *Лере Ж.* Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 1 августа 2025 г.
После доработки 1 августа 2025 г.
Принята к публикации 27 августа 2025 г.

Демиденко Геннадий Владимирович (ORCID 0000-0001-6338-7247),
Ма Синь
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
demidenko@math.nsc.ru, s.ma2@g.nsu.ru