Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2025. Том 66, № 6

УДК 517.98

ДВА ПРИМЕРА КВАЗИПЛОТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

А. Е. Гутман, И. А. Емельяненков

Аннотация. Доказано, что классы экспоненциально плотных, декартово плотных и рекурсивно плотных векторных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ попарно различны.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.605

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, слабая топология, архимедов конус, пространство последовательностей

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе
с любовью и благодарностью

В работе [1] было инициировано исследование вопроса о том, в каких хаусдорфовых локально выпуклых пространствах все архимедовы конусы замкнуты. (Такие пространства приятны тем, что при любом определении в них архимедова векторного порядка линейные неравенства выдерживают переход к пределам сетей.) Конечномерные пространства, как хорошо известно, обладают этим свойством (см., например, [2, 3.4]). В [1] было показано, что пространства, имеющие несчетную размерность, этим свойством не обладают, а для счетномерных пространств вопрос был оставлен открытым.

В работе [3] было введено понятие квазиплотности и получено исчерпывающее описание счетномерных хаусдорфовых локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты. Таковыми оказались в точности те счетномерные пространства X, у которых топологически сопряженное пространство X' квазиплотно в алгебраически сопряженном пространстве $X^{\#}$, снабженном слабой* топологией.

Благодаря работе [3] квазиплотные пространства стали объектом тщательного изучения, а поскольку в счетномерном случае пространство $X^{\#}$ линейно и топологически изоморфно $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, класс исследуемых объектов естественным образом сузился до квазиплотных векторных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. В работе [4] такие подпространства были охарактеризованы в терминах их связи с проективными параллелотопами и автоморфизмами. Эти результаты в значительной степени прояснили устройство квазиплотных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с геометрической и алгебраической точек зрения, но не привели к немедленному обнаружению новых примеров и сохранили открытым вопрос о совпадении класса таких пространств с другими классами, допускающими существенно более простые определения.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0004).

© 2025 Гутман А. Е., Емельяненков И. А.

В данной заметке в теоремах 1 и 2 построены примеры, подтверждающие сформулированную в [3, 9.8] гипотезу о несовпадении трех видов квазиплотных векторных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — экспоненциально плотных, декартово плотных и рекурсивно плотных.

Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$. Множества рациональных и вещественных чисел обозначаются символами $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Векторное пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ числовых последовательностей $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ снабжается тихоновской топологией (также называемой топологией поточечной сходимости). Кортежи $x = (x(1), \dots, x(n)) \in \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, считаются функциями $x : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$. Линейный оператор $\pi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\pi_n s = s\big|_{\{1,\dots,n\}} = (s(1), \dots, s(n)). \tag{1}$$

Условимся использовать обозначение (1) не только для последовательностей $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, но и для кортежей $s \in \mathbb{R}^m$, где $m \geqslant n$.

Определение 1 [3, 4.1]. *Квазивнутренность* $\operatorname{qi} S$ подмножества S локально выпуклого пространства X определяется как совокупность элементов $x \in S$, для которых клин

$$\mathbb{R}^+(S - x) = \{\lambda(s - x) :\ s \in S,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geqslant 0\}$$

плотен в X.

Предложение 1 [3, 4.13]. *Для любого выпуклого множества $S \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ справедливо равенство*

$$\operatorname{qi} S = \{s \in S : \pi_n s \in \operatorname{int} \pi_n S \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\},$$

где $\operatorname{int} \pi_n S$ — внутренность $\pi_n S$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 2 [3]. Рассмотрим следующие свойства множества $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(a) Y содержит степень $\Lambda^{\mathbb{N}}$ для некоторого плотного подмножества $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$;

(b) Y содержит произведение $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$ для некоторой последовательности плотных подмножеств $\Lambda_n \subseteq \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$;

(c) Y содержит некоторое подмножество $P \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющее следующим трем условиям:
   (i) если $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\pi_n s \in \pi_n P$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $s \in P$;
   (ii) множество $\{p(1) :\ p \in P\}$ плотно в $\mathbb{R}$;
   (iii) для всех $n \in \mathbb{N}$ и $q \in P$ множество $\{p(n+1) :\ p \in P,\ \pi_n p = \pi_n q\}$ плотно в $\mathbb{R}$;

(d) Y имеет непустое пересечение с любым замкнутым ограниченным выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, имеющим непустую квазивнутренность.

Множество Y, обладающее свойством (a), (b), (c), (d), называется соответственно *экспоненциально плотным*, *декартово плотным*, *рекурсивно плотным* и *квазиплотным* (см. [3, 6.2, 8.9, 9.8]).

Предложение 2 [3, 8.9]. *Для любого подмножества $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имеют место следующие импликации:*

$$\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)} \Rightarrow \text{(c)} \Rightarrow \text{(d)}.$$

Замечание 1. В [3, 6.4] доказано, что каждое из условий (a)–(d) влечет плотность Y в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ относительно тихоновской топологии. Там же приведен пример плотного векторного подпространства $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, не обладающего свойствами (a)–(d).

До недавнего времени список примеров собственных квазиплотных векторных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ включал лишь экспоненциально плотные пространства $\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $\operatorname{lin}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и их образы при проективных автоморфизмах (см. [3, 8.10; 4, 4.2]). (Здесь и ниже $\operatorname{lin} S$ — линейная оболочка множества S в векторном пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.) Для векторных подпространств $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ также оставался открытым вопрос об эквивалентности условий (a)–(d) (см. [3, 9.8]). Приведенные ниже теоремы частично проясняют этот вопрос.

Теорема 1. *Условия* (a) *и* (b) *не эквивалентны для векторных подпространств* $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. Пусть $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность попарно различных алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ вещественных чисел. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим плотное подмножество

$$\mathbb{Q}\,t_n = \{qt_n : q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$$

и докажем, что декартово плотное векторное подпространство

$$Y = \operatorname{lin} \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}\,t_n \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

не является экспоненциально плотным.

Достаточно показать, что Y не содержит ни одной ненулевой постоянной последовательности. Допустим, это не так. Тогда $(1, 1, \dots) \in Y$, а значит, найдутся $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^m$ и последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{Q}^m$ такие, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{m} x(i)q_n(i)t_n = 1$$

или, что то же самое, $\langle q_n \,|\, x\rangle = t_n^{-1}$, где $\langle u \,|\, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} u(i)v(i)$ для $u, v \in \mathbb{R}^m$.

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \langle q_1 \,|\, x\rangle = t_1^{-1}, \\ \dots, \\ \langle q_m \,|\, x\rangle = t_m^{-1} \end{cases}$$

в виде $Qx = y$, где матрица $Q \in \mathbb{Q}^{m\times m}$ состоит из элементов $Q_{ij} = q_i(j)$, а вектор $y \in \mathbb{R}^m$ полагается равным $\bigl(t_1^{-1}, \dots, t_m^{-1}\bigr)$.

Заметим, что матрица Q обратима. Действительно, в противном случае транспонированная матрица Q^{T} удовлетворяет равенству $Q^{\mathrm{T}}q = 0$ для некоторого ненулевого вектора $q \in \mathbb{Q}^m$, и тогда

$$\sum_{i=1}^{m} q(i)t_i^{-1} = \langle q \,|\, y\rangle = \langle q \,|\, Qx\rangle = \langle Q^{\mathrm{T}}q \,|\, x\rangle = 0,$$

что противоречит алгебраической независимости чисел $t_1, \dots, t_m$ над $\mathbb{Q}$.

Наконец, используя обратимость матрицы Q и полагая

$$p = \bigl(Q^{-1}\bigr)^{\mathrm{T}} q_{m+1} \in \mathbb{Q}^m,$$

заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{m} p(i)t_i^{-1} = \bigl\langle \bigl(Q^{-1}\bigr)^{\mathrm{T}} q_{m+1} \,|\, y\bigr\rangle = \langle q_{m+1} \,|\, Q^{-1}y\rangle = \langle q_{m+1} \,|\, x\rangle = t_{m+1}^{-1}$$

вопреки алгебраической независимости чисел $t_1, \dots, t_m, t_{m+1}$ над $\mathbb{Q}$. $\square$

Теорема 2. *Условия* (b) *и* (c) *не эквивалентны для векторных подпространств* $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. Введем обозначение $\mathbb{Q}_\circ = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ и рассмотрим какую-либо инъективную функцию

$$t : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_\circ^n \to \mathbb{R},$$

образ которой является алгебраически независимым над $\mathbb{Q}$ подмножеством $\mathbb{R}$. Для произвольной последовательности $\rho \in \mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$ определим $\hat\rho \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ формулой

$$\hat\rho \;=\; \big(\rho(1),\ \rho(2)\,t(\pi_1\rho),\ \rho(3)\,t(\pi_2\rho),\ \ldots,\ \rho(n)\,t(\pi_{n-1}\rho),\ \ldots\big)$$

и покажем, что множество

$$P = \big\{\hat\rho : \rho \in \mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}\big\}$$

удовлетворяет условиям (i)–(iii).

Прежде всего заметим, что для любых $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$ равенства $\rho = \sigma$ и $\hat\rho = \hat\sigma$ эквивалентны и, более того,

$$\pi_n\rho = \pi_n\sigma \;\Leftrightarrow\; \pi_n\hat\rho = \pi_n\hat\sigma \tag{2}$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, импликация «$\Rightarrow$» тривиальна, так как для всякой функции $\rho \in \mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$ кортеж $\pi_n\hat\rho$ однозначно определяется числами $\rho(1), \ldots, \rho(n)$ и значениями функции t на кортежах, составленных из этих чисел. Импликацию «$\Leftarrow$» несложно установить индукцией по n. Для $n = 1$ она обеспечивается равенствами $\hat\rho(1) = \rho(1)$ и $\hat\sigma(1) = \sigma(1)$. Если же эта импликация справедлива для n и имеет место равенство $\pi_{n+1}\hat\rho = \pi_{n+1}\hat\sigma$, то в силу $\pi_n\hat\rho = \pi_n\hat\sigma$ имеем $\pi_n\rho = \pi_n\sigma$, а недостающее равенство $\rho(n+1) = \sigma(n+1)$ следует из соотношений

$$\rho(n+1)\,t(\pi_n\rho) = \hat\rho(n+1) = \hat\sigma(n+1) = \sigma(n+1)\,t(\pi_n\sigma) = \sigma(n+1)\,t(\pi_n\rho)$$

и отсутствия нуля в образе функции t.

(i) Пусть $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и пусть $\pi_n s \in \pi_n P$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. имеется такая последовательность $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$, что $\pi_n s = \pi_n\widehat{\rho_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $s \in P$.

Определим последовательность $\rho \in \mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$, полагая $\rho(n) = \rho_n(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Индукцией по n установим равенство

$$\pi_n\widehat{\rho_n} = \pi_n\hat\rho \tag{3}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, для $n = 1$ равенство (3) сразу вытекает из (2). Если же (3) справедливо для n, то

$$\pi_n\widehat{\rho_{n+1}} = \pi_n\pi_{n+1}\widehat{\rho_{n+1}} = \pi_n\pi_{n+1}s = \pi_n s = \pi_n\widehat{\rho_n} = \pi_n\hat\rho,$$

откуда в силу (2) следует соотношение $\pi_n\rho_{n+1} = \pi_n\rho$, обеспечивающее недостающее равенство

$$\widehat{\rho_{n+1}}(n+1) = \rho_{n+1}(n+1)\,t(\pi_n\rho_{n+1}) = \rho(n+1)\,t(\pi_n\rho) = \hat\rho(n+1).$$

Благодаря (3) для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$s(n) = (\pi_n s)(n) = (\pi_n\widehat{\rho_n})(n) = (\pi_n\hat\rho)(n) = \hat\rho(n),$$

т. е. $s = \hat\rho$ и тем самым $s \in P$.

(ii) Множество

$$\{p(1):\, p\in P\} = \left\{\hat\rho(1):\, \rho\in\mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}\right\}$$

совпадает с $\mathbb{Q}_\circ$ и поэтому плотно в $\mathbb{R}$.

(iii) С учетом (2) для любых $n\in\mathbb{N}$ и $\sigma\in\mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$ множество

$$\begin{aligned}\{p(n+1):\, p\in P,\ \pi_n p = \pi_n\hat\sigma\} &= \left\{\hat\rho(n+1):\, \rho\in\mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}},\ \pi_n\hat\rho = \pi_n\hat\sigma\right\}\\ &= \left\{\rho(n+1)\, t(\pi_n\rho):\, \rho\in\mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}},\ \pi_n\rho = \pi_n\sigma\right\}\end{aligned}$$

совпадает с $\mathbb{Q}_\circ\, t(\pi_n\sigma)$ и поэтому плотно в $\mathbb{R}$.

Таким образом, векторное подпространство

$$Y = \operatorname{lin} P \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

рекурсивно плотно. Покажем, что оно не является декартово плотным.

Предположим вопреки доказываемому, что Y удовлетворяет условию (b). В этом случае существуют последовательности $y, z\in Y$, для которых $y(1)\neq z(1)$ и $y(n) = z(n)$ при $n>1$, а значит,

$$e_1 = (1,0,0,\dots) = \frac{1}{y(1)-z(1)}(y-z)\in Y = \operatorname{lin} P.$$

Следовательно, найдутся $n\in\mathbb{N}$, ненулевые числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ и попарно различные последовательности $\rho_1,\dots,\rho_n\in\mathbb{Q}_\circ^{\mathbb{N}}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\hat\rho_i = e_1.$$

Пусть I — множество всех пар (i,j), где $i,j\in\{1,\dots,n\}$ и $i\neq j$. Учитывая, что $\rho_1,\dots,\rho_n$ попарно различны, рассмотрим натуральные числа

$$m_{ij} = \min\{k\in\mathbb{N}:\, \rho_i(k)\neq\rho_j(k)\},\quad (i,j)\in I,$$

и положим

$$m = \max\{m_{ij}:\, (i,j)\in I\}.$$

Тогда $\pi_k\rho_i\neq\pi_k\rho_j$ при $k\geqslant m$ и $(i,j)\in I$. В частности, числа $t(\pi_k\rho_i)$ различны для различных пар (k,i) таких, что $k\geqslant m$ и $i\in\{1,\dots,n\}$.

Поскольку при $k>m$ справедливы соотношения

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\rho_i(k)\,t(\pi_{k-1}\rho_i) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\hat\rho_i(k) = e_1(k) = 0,$$

имеет место система равенств

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\rho_i(m+1)\,t(\pi_m\rho_i) = 0,\\ &\dots,\\ &\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\rho_i(m+n)\,t(\pi_{m+n-1}\rho_i) = 0.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} \rho_1(m{+}1)\, t(\pi_m \rho_1) & \rho_2(m{+}1)\, t(\pi_m \rho_2) & \dots & \rho_n(m{+}1)\, t(\pi_m \rho_n) \\ \rho_1(m{+}2)\, t(\pi_{m+1} \rho_1) & \rho_2(m{+}2)\, t(\pi_{m+1} \rho_2) & \dots & \rho_n(m{+}2)\, t(\pi_{m+1} \rho_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_1(m{+}n)\, t(\pi_{m+n-1} \rho_1) & \rho_2(m{+}n)\, t(\pi_{m+n-1} \rho_2) & \dots & \rho_n(m{+}n)\, t(\pi_{m+n-1} \rho_n) \end{pmatrix}$$

размера $n \times n$. Ее определитель $|M|$ представляет собой значение однородного многочлена степени n от попарно различных алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ чисел $t(\pi_{m+j-1}\rho_i)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, причем коэффициенты этого многочлена рациональны и отличны от нуля, так как с точностью до знака они являются произведениями чисел вида $\rho_i(m + j) \in \mathbb{Q}_\circ$. Следовательно, $|M| \neq 0$. С другой стороны, система (4) означает равенство $Mx = 0$ для ненулевого вектора $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. $\square$

Замечание 2. Вопрос об эквивалентности условий (c) и (d) для векторных подпространств $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ на данный момент остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В.* Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 36–43.
2. *Aliprantis C. D., Tourky R.* Cones and duality. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.
3. *Гутман А. Е., Емельяненков И. А.* Локально выпуклые пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 945–970.
4. *Гутман А. Е., Емельяненков И. А.* Квазиплотность в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и проективные параллелотопы // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 2. С. 258–276.

Поступила в редакцию 14 августа 2025 г.
После доработки 21 августа 2025 г.
Принята к публикации 25 сентября 2025 г.

Гутман Александр Ефимович (ORCID 0000-0003-2030-7459)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Емельяненков Иван Александрович (ORCID 0009-0002-0914-6412)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
i.emelianenkov@yandex.ru