Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2025. Том 66, № 6

УДК 519.17

ОПИСАНИЕ ИНЦИДЕНТНЫХ 3–ГРАНЯМ РЕБЕР В 3–МНОГОГРАННИКАХ БЕЗ СМЕЖНЫХ 3–ГРАНЕЙ

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Вес $w(e)$ ребра e в 3-многограннике это сумма степеней его концевых вершин. Ребро $e = uv$ есть (i, j)-ребро, если $d(u) \leq i$ и $d(v) \leq j$. В 1940 г. Лебег доказал, что каждый 3-многогранник содержит $(3, 11)$-ребро, или $(4, 7)$-ребро, или $(5, 6)$-ребро, где 7 и 6 неулучшаемы. В 1955 г. Коциг доказал, что каждый 3-многогранник содержит ребро с суммой степеней концевых вершин не более 13, причем граница точна. О. В. Бородин (1987), отвечая на вопрос Эрдеша, доказал, что каждый плоский граф без вершин степени меньше 3 содержит такое ребро. Более того, О. В. Бородин (1991) усилил этот результат, доказав, что найдется либо $(3, 10)$-ребро, или $(4, 7)$-ребро, или $(5, 6)$-ребро.

Для 3-многогранников получены верхние оценки минимального веса (суммы степеней концевых вершин) всех его ребер, обозначаемого w; инцидентных 3-грани, w^*; и инцидентных двум 3- граням, w^{**}. В частности, О. В. Бородин (1996) доказал, что если $w^{**} = \infty$, т. е. не существует ребер, инцидентных двум 3-граням, то либо $w^* \leq 9$, либо $w \leq 8$, где обе оценки неулучшаемы.

Недавно мы усилили этот факт, доказав, что $w^{**} = \infty$ влечет наличие либо $(3, 6)$-ребра, либо $(4, 4)$-ребра, инцидентных с 3-гранью, либо иначе $(3, 5)$-ребра, причем описание точно. (Хорошо известно, что если $(3, 5)$-ребра присутствуют, то может вообще не быть 3-граней.)

Цель нашей статьи — усилить вышеуказанный результат, доказав, что $w^{**} = \infty$ влечет либо $(3, 6)$-ребро, окруженное 3-гранью и 4-гранью, либо $(4, 4)$-ребро, окруженное 3-гранью и 7^--гранью, либо $(3, 5)$-ребро, где ни один из параметров не может быть улучшен. Главной трудностью было построение 3-многогранника, подтверждающего точность 7 в данном описании.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.603

Ключевые слова: планарный граф, структурные свойства, 3-многогранник, ребро, вес, точное описание.

Посвящается светлой памяти
Семёна Самсоновича Кутателадзе

1. Введение

Степень вершины или грани x, т. е. число инцидентных ей ребер, обозначим через $d(x)$. *k-Вершина* это вершина v с $d(v) = k$. *k-Грань* f имеет $d(f) = k$. Через k^+ или k^- обозначим любое целое число, не меньшее или не большее, чем

Работа первого автора поддержана Министерством науки и высшего образования России (проект FWNF-2022-0017). Работа второго автора поддержана Министерством науки и высшего образования России, грант FSRG-2023-0025.

k, соответственно. Следовательно, k^+-вершина v удовлетворяет неравенству $d(v) \geq k$, и т. д.

Ребро uv есть (i,j)-*ребро*, если $d(u) \leq i$ и $d(v) \leq j$. *Вес* $w(e)$ ребра e в 3-многограннике это сумма степеней его концевых вершин. Через $\delta(G)$ и $w(G)$ обозначим минимальную вершинную степень и минимальный вес ребер графа G соответственно. Будем опускать аргумент всякий раз, когда он ясен из контекста.

Еще в 1904 г. Вернике [1] доказал, что каждый 3-многогранник с $\delta = 5$ удовлетворяет неравенству $w \leq 11$. В 1940 г. Лебег [2] доказал, что каждый 3-многогранник содержит либо $(3,11)$-ребро, либо $(4,7)$-ребро, либо $(5,6)$-ребро, где параметры 7 и 6 наилучшие из возможных. В 1955 г. Коциг [3] доказал, что для каждого 3-многогранника верно неравенство $w \leq 13$, причем оценка точна.

В 1972 г. Эрдеш (см. [4]) предположил, что оценка Коцига $w \leq 13$ верна для всех планарных графов с $\delta \geq 3$. Первое доказательство гипотезы Эрдеша дал О. В. Бородин [5]. В [6, 7] О. В. Бородин уточнил этот результат, доказав, что каждый 3-многогранник содержит либо $(3,10)$-, либо $(4,7)$-, или $(5,6)$-ребро (как простое следствие из некоторых более сильных структурных фактов, имеющих приложения к раскраске плоских графов).

В некоторых приложениях к раскраске важно найти легкое ребро, инцидентное одной или двум 3-граням. Для 3-многогранников минимальный вес всех его ребер обозначим через w, инцидентных 3-грани — через w^*, а инцидентных двум 3-граням — через w^{**}.

О. В. Бородин [8] доказал, что для каждого 3-многогранника верно либо $w^{**} \leq 13$, либо $w^* \leq 10$, или $w \leq 8$, где все оценки являются наилучшими из возможных. Некоторые другие связанные с этим результаты, а также гипотезы и ссылки можно найти в обзорах [9, 12] и работах [1–8, 13–25].

За последние почти три десятилетия множество исследований было посвящено структурным задачам и задачам раскраски плоских графов, разреженных в том или ином смысле. Нам кажется, что наиболее плотные среди разреженных плоских графов — те, у которых нет 3-граней, имеющих общее ребро, т. е. удовлетворяющие равенству $w^{**} = \infty$.

В частности, новые результаты о структуре плоских графов с минимальной степенью 3 и 4 и $w^{**} = \infty$ при различных дополнительных ограничениях находят применение в 3-раскраске (как правильной, так и неправильной), 3- и 4-выбираемости, а также в недавно введенных 3-DP- и 4-DP-раскрасках (для получения такой информации см. ссылки в выдающейся работе Дворжака и Постля [26] и на нее). Кроме того, в тотальной и вершинно-реберно-граневой раскрасках плоских графов мы часто имеем дело со случаем $w^{**} = \infty$.

Ранее доказанное в [16] утверждение, что каждый 3-многогранник с $w^{**} = \infty$ удовлетворяет точной оценке $w \leq 9$, было усилено О. В. Бородиным в [17] до $w^* \leq 9$ или $w \leq 8$, причем обе оценки точны.

Недавно мы [27] усилили этот результат, доказав, что факт $w^{**} = \infty$ влечет наличие либо $(3,6)$-, либо $(4,4)$-ребра, инцидентных 3-грани, либо $(3,5)$-ребра, причем описание точно. Заметим, что, как хорошо известно, если $(3,5)$-ребра допускаются, то может вообще не быть 3-граней.

Целью нашей статьи является доказательство следующего более сильного результата.

Теорема 1. *Каждый 3-многогранник без смежных 3-граней содержит либо $(4,4)$-ребро, инцидентное 3-грани и 7^--грани, либо $(3,6)$-ребро, инцидентное*

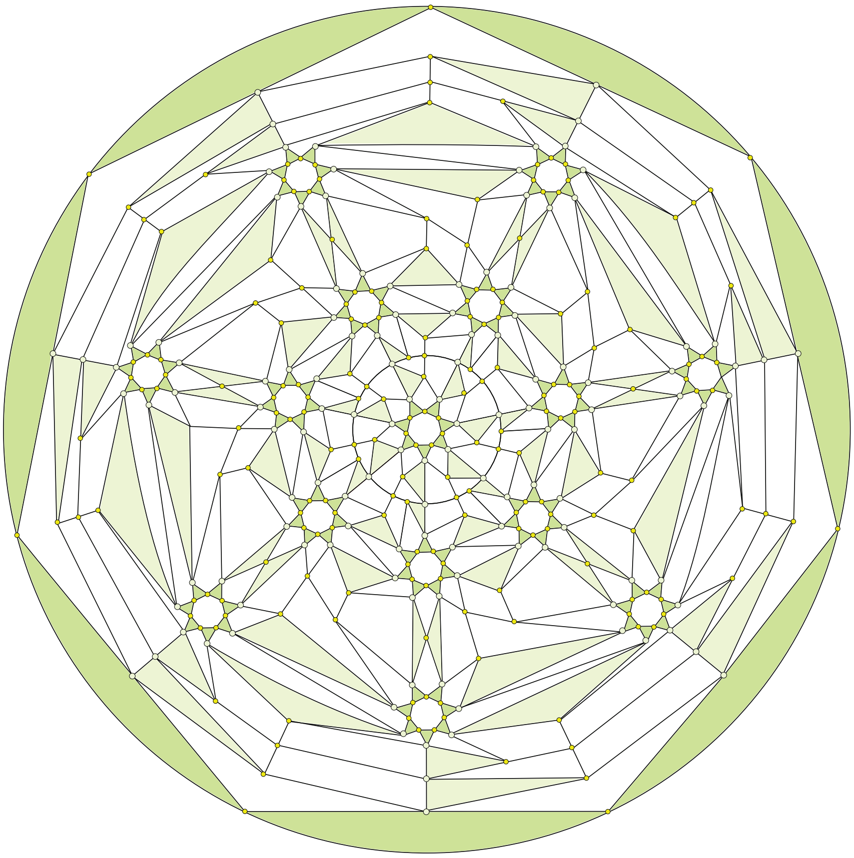

Рис. 1. Каждое полуслабое $(4,4)$-ребро инцидентно 7-грани.

3-грани и 4-грани, либо $(3,5)$-ребро, где ни один из параметров не может быть усилен.

Главной трудностью было построение 3-многогранника, подтверждающего точность 7 в данном описании.

2. Доказательство теоремы 1

Ребро называется *полуслабым*, если оно инцидентно 3-грани. На рис. 1 мы видим граф без 3-вершин, в котором каждое полуслабое (4,4)-ребро инцидентно 7-грани, что подтверждает необходимость и неулучшаемость первого варианта в теореме 1.

В [17] получен плоский граф (с $w^{**} = \infty$, что также предполагается в доказательстве ниже) с вершинами степеней только 3 и 6, в котором каждое ребро является полуслабым и соединяет 3^+-вершину с 6-вершиной. Это подтверждает необходимость и неулучшаемость второго варианта в теореме 1.

Третий вариант подтверждается двойственным многогранником известного архимедова тела, в котором каждое ребро соединяет 3-вершину с 5-вершиной и инцидентно двум 4-граням.

2.1. Перераспределение зарядов и его следствия. Через P обозначим контрпример к теореме 1. Пусть V, E и F — множества вершин, ребер и граней

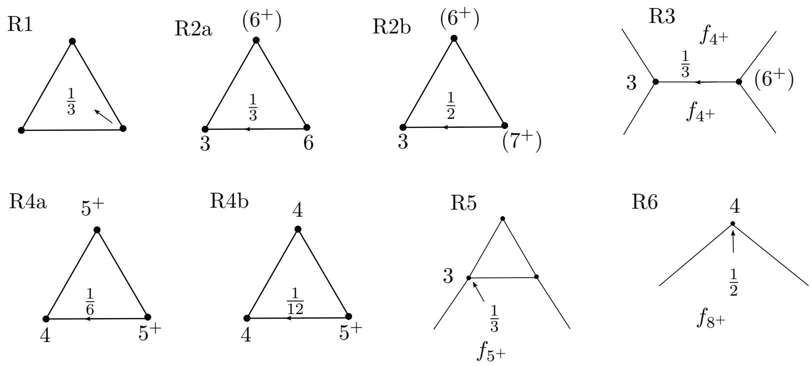

Рис. 2. Перераспределение зарядов.

графа P соответственно. Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для P перепишем в виде

$$\sum_{x \in V \cup F} (d(x) - 4) = -8. \tag{1}$$

Каждая вершина и грань x вносит *заряд* $\mu(x) = d(x) - 4$ в формулу (1), так что только заряды 3-вершин и 3-граней отрицательны. Используя свойства контрпримера P, перераспределим заряды μ, сохранив их сумму так, что *новый заряд* $\mu'(x)$ окажется неотрицательным для всех $x \in V \cup F$. Это будет противоречить тому, что сумма новых зарядов по формуле (1) равна -8.

В дальнейшем обозначим вершины, смежные (инцидентные) вершине (грани) x в циклическом порядке, через $v_1, \dots, v_{d(x)}$. Ребро назовем *сильным*, если оно не инцидентно 3-грани.

Мы применяем следующие правила распределения зарядов (рис. 2).

R1. *Каждая 3-грань получает $\frac{1}{3}$ от каждой инцидентной вершины.*

R2. *Каждая 3-вершина v_1 получает от смежной вершины v_2 вдоль полуслабого ребра:*

(a) $\frac{1}{3}$, если $d(v_2) = 6$, и

(b) $\frac{1}{2}$, если $d(v_2) \geq 7$.

R3. *Каждая 3-вершина получает $\frac{1}{3}$ от смежной вершины вдоль каждого сильного ребра.*

R4. *Каждая 4-вершина v, инцидентная грани $f_1 = v_1 v v_2$, получает от каждой смежной 5^+-вершины v_2:*

(a) $\frac{1}{6}$, если $d(v_1) \geq 5$, и

(b) $\frac{1}{12}$, если $d(v_1) = 4$.

R5. *Каждая 3-вершина, инцидентная 3-грани и 5^+-грани f, получает $\frac{1}{3}$ от f.*

R6. *Каждая 4-вершина получает $\frac{1}{2}$ от каждой инцидентной 8^+-грани.*

2.2. Проверка того, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$.

Случай 1. $f \in F$. Если $d(f) = 3$, то $\mu'(f) = 4 - 3 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$ по R1. Если $d(f) = 4$, то f не участвует в R1–R6, поэтому $\mu'(f) = \mu(f) = 0$.

Подслучай 1.1. $5 \le d(f) \le 7$. Заметим, что $f = v_1v_2\dots$ может участвовать только в R5. Предположим, f дает $\frac{1}{3}$ вершине v_2, где $d(v_1) \ge 6$ и $d(v_3) \ge 6$ благодаря отсутствию $(3,5)$-ребер в P, и ребро v_1v_2 инцидентно 3-грани. Чтобы оценить общую передачу от грани f, перебросим $\frac{1}{12}$ от v_2 на каждую из вершин v_1, v_3. Теперь каждая вершина, инцидентная грани f, получает от f не более $\frac{1}{6} = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{12}$. Как результат, $\mu'(f) = d(f) - 4 - d(v) \times \frac{1}{6} = \frac{5d(v)-24}{6} > 0$, что и требовалось.

Подслучай 1.2. $d(f) \ge 8$. Теперь каждая инцидентная вершина получает не более $\frac{1}{2}$ от грани f по R5 или R6, откуда следует $\mu'(f) = d(f) - 4 - d(f) \times \frac{1}{2} = \frac{d(f)-8}{2} \ge 0$.

Случай 2. $v \in V$.

Подслучай 2.1. $d(v) = 3$. Если v не инцидентна 3-граням, то $\mu'(v) = 4 - 3 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$ по R3.

Пусть v инцидентна 3-грани $f = v_1vv_2$ (в точности одной, поскольку $w^{**} = \infty$). Тогда v получает $\frac{1}{3}$ от 6^+-соседа v_3 по R3 и дает $\frac{1}{3}$ грани f по R1.

Если $d(v_1) \ge 7$, то v получает $\frac{1}{2}$ от v_1 по R2b. Если $d(v_1) = 6$, то v получает $\frac{1}{3}$ от v_1 по R2a и $\frac{1}{3}$ от 5^+-грани $f_3 = v_1vv_3\dots$ по R5 ввиду свойств нашего контрпримера P. В обоих случаях v_1 вместе с f_3 приносит вершине v не менее $\frac{1}{2}$. То же самое верно для v_2 и $f_2 = v_2vv_3\dots$, откуда $\mu'(v) \ge 3-4+2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = 0$.

Подслучай 2.2. $d(v) = 4$. Заметим, что если v не инцидентна 3-грани, то v не участвует в R1 и $\mu'(v) \ge 0$ с учетом R6.

Допустим, что найдется 3-грань $f_1 = v_1vv_2$. Если $d(v_1) \ge 5$ и $d(v_2) \ge 5$, то v получает $2 \times \frac{1}{6}$ от v_1 и v_2 по R4a и отдает $\frac{1}{3}$ грани f_1 по R1, поэтому 3-грань f_1 ничего не забирает от вершины v. Остается предположить, что $d(v_1) = 4$. Теперь v получает $\frac{1}{2}$ по R6 от 8^+-грани $f_4 = v_1vv_4\dots$ по свойствам G. Поскольку v инцидентна не более чем двум 3-граням, остается рассмотреть случай, когда найдется $f_3 = v_3vv_4$.

Теперь, если найдется 4-вершина в $\{v_2, v_3\}$, то v получает еще $\frac{1}{2}$ от 8^+-грани $f_2 = v_2vv_3\dots$, откуда следует $\mu'(v) = 4-4+2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{3} > 0$ по R1, R6. Наконец, пусть $d(v_2) \ge 5$ и $d(v_3) \ge 5$, что означает, что каждая из v_2, v_3 дает вершине v заряд $\frac{1}{12}$ по R4b, следовательно, $\mu'(v) \ge \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{12} - 2 \times \frac{1}{3} = 0$ с учетом R4a.

Подслучай 2.3. $d(v) = 5$. Здесь v инцидентна не более двум 3-граням, и каждая 3-грань $f_1 = v_1vv_2$ получает $\frac{1}{3}$ от v по R1, тогда как v_1 и v_2 забирают у v либо $2 \times \frac{1}{12}$ по R4b, когда $d(v_1) = d(v_2) = 4$, либо не более чем $\frac{1}{6}$ по R4a в противном случае. Отсюда $\mu'(v) = 5 - 4 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Подслучай 2.4. $d(v) = 6$. Теперь каждая 3-грань v_1vv_2 уносит от v не более $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ по R1, R2a и R4. Здесь мы перераспределим передачу в $\frac{1}{3}$ по R1 следующим образом. Если $d(v_1) = d(v_2) = 4$, то переведем $\frac{1}{6}$ на каждую из 4-вершин v_1 и v_2. В противном случае переводим $\frac{1}{3}$ на 5^+-вершину в грани v_1vv_2. Заметим, что после такого усреднения каждое инцидентное полуслабое ребро собирает не более $\frac{1}{3}$ от v, а 3-грани ничего не забирают. С учетом правила R3 каждое ребро при v уносит от v не более $\frac{1}{3}$. Следовательно, $\mu'(v) \ge 6 - 4 - 6 \times \frac{1}{3} = 0$.

Подслучай 2.5. $d(v) \ge 7$. Здесь 3-грань при v забирает не более $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ от v по R1, R2b и R4. Кроме того, v отдает $\frac{1}{3}$ по R3 каждой смежной 3-вершине по сильному ребру.

Пусть T — число 3-граней при v. Нетрудно видеть, что $T \leq \frac{d(v)}{2}$, откуда $\mu'(v) \geq d(v) - 4 - T \times \frac{5}{6} - (d(v) - 2T) \times \frac{1}{3} = \frac{2d(v)}{3} - 4 - T \times \frac{1}{6} \geq \frac{2d(v)}{3} - 4 - \frac{d(v)}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{7d(v)-48}{12} > 0$, что и требовалось.

Таким образом, мы доказали, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$, а это противоречит формуле (1) и завершает доказательство теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wernicke P.* Über den Kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58, N 3. P. 413–426.

2. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.

3. *Kotzig A.* Contribution to the theory of Eulerian polyhedra (Slovak) // Mat. Čas. 1955. V. 5. P. 101–103.

4. *Grünbaum B.* New views on some old questions of combinatorial geometry // Int. Teorie Combinatorie, Rome (1973). 1976. V. 1. P. 451–468.

5. *Бородин О. В.* Совместные раскраски графов на плоскости // Дискрет. анализ. 1987. Т. 45. С. 21–27.

6. *Borodin O. V.* Joint extension of two Kotzig's theorems on 3-polytopes // Combinatorica. 1992. V. 13, N 1. P. 121–125.

7. *Бородин О. В.* Строение окрестностей ребра в плоском графе и совместная раскраска вершин, ребер и граней // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 5. С. 35–47.

8. *Бородин О. В.* Совместное обобщение теорем Лебега и Коцига о комбинаторике плоских графов // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, № 4. С. 24–27.

9. *Borodin O. V.* Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.

10. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* New results about the structure of plane graphs: a survey // AIP Conference Proceedings. 2017. N 1907. 030051.

11. *Cranston D. W., West D. B.* An introduction to the discharging method via graph coloring // Discrete Math. 2017. V. 340, N 4. P. 766–793.

12. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane – a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.

13. *Aksenov V. A., Borodin O. V., Ivanova A. O.* An extension of Kotzig's theorem // Discussiones Math. Graph Theory. 2016. V. 36, N 4. P. 889–897.

14. *Batueva Ts. Ch-D., Borodin O. V., Bykov M. A., Ivanova A. O., Kazak O. N., Nikiforov D. V.* Refined weight of edges in normal plane maps // Discrete Math. 2017. V. 340, N 11. P. 2659–2664.

15. *Borodin O. V.* On the total coloring of planar graphs // J. Reine Angew. Math. 1989. V. 394. P. 180–185.

16. *Borodin O. V.* Structural theorem on plane graphs with application to the entire coloring // J. Graph Theory. 1996. V. 23, N 3. P. 233–239.

17. *Borodin O. V.* More about the weight of edges in planar graphs // Tatra Mountains Math. Publ. 1996. V. 9. P. 11–14.

18. *Borodin O. V., Hartke S. G., Ivanova A. O., Kostochka A. V., West D. B.* $(5, 2)$-Coloring of sparse graphs // Sib. Electron. Mat. Izv. 2008. V. 5. P. 417–426.

19. *Borodin O. V., Glebov A. N., Raspaud A.* Planar graphs without triangles adjacent to cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable // Thomassen's special issue of Discrete Math. 2010. V. 310, N 20. P. 2584–2594.

20. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Weight of edges in normal plane maps // Discrete Math. 2016. V. 339, N 5. P. 1507–1511.

21. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* An improvement of Lebesgue's description of edges in 3-polytopes and faces in plane quadrangulations // Discrete Math. 2019. V. 342, N 6. P. 1820–1827.

22. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V., Sheikh N. N.* Minimax degrees of quasiplane graphs without 4-faces // Sib. Electron. Mat. Izv. 2007. V. 4. P. 435–439.

23. *Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.* List edge and list total colourings of multigraphs // J. Combin. Theory (B). 1997. V. 71, N 2. P. 184–204.

24. *Ferencová B., Madaras T.* Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310, N 12. P. 1661–1675.

25. *Jendrol' S., Maceková M.* Describing short paths in plane graphs of girth at least 5 // Discrete Math. 2015. V. 338, N 2. P. 149–158.

26. *Dvořák Z., Postle L.* Correspondence coloring and its application to list-coloring planar graphs without cycles of lengths 4 to 8 // J. Combin. Theory Ser. B. 2018. V. 129. P. 38–54.

27. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing edges in normal plane maps having no adjacent 3-faces // Sib. Electron. Math. Rep. 2024. V. 21, N 1. P. 495–500.

Поступила в редакцию 4 июня 2025 г.
После доработки 4 июня 2025 г.
Принята к публикации 15 августа 2025 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`brdnoleg@math.nsc.ru`

Иванова Анна Олеговна (ORCID 0000-0002-6179-3740)
Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`shmgnanna@mail.ru`