Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2025. Том 66, № 6

УДК 513.81

РАДИУС ИНЪЕКТИВНОСТИ ВЫТЯНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

В. Н. Берестовский, А. Мустафа

Аннотация. Найден радиус инъективности вытянутого эллипсоида вращения в трехмерном евклидовом пространстве. Он равен в точности расстоянию вдоль двойного меридиана между его сопряженными симметричными относительно полюса точками и меньше половины длины экватора. Найден и применен метод сколь угодно точных компьютерных вычислений радиуса инъективности произвольного вытянутого эллипсоида вращения.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.602

Ключевые слова: геодезическая, поле Якоби, радиус инъективности, сопряженные точки, экспоненциальное отображение, эллипсоид вращения, эллиптические интегралы.

§ 1. Введение

Радиус инъективности i_p (соответственно число σ_p) полного риманова многообразия M в его точке p определяется как точная верхняя граница чисел $r > 0$ таких, что экспоненциальное отображение Exp_p многообразия M в точке p (соответственно его дифференциал $d(\mathrm{Exp}_p)$) является диффеоморфизмом на открытом шаре $U(0, r)$ радиуса r с центром в нуле касательного евклидова пространства M_p к M в точке p (соответственно невырожденный на $U(0, r)$).

Радиус инъективности $i(M)$ (соответственно число σ) многообразия M есть точная нижняя граница чисел i_p (соответственно σ_p) для всех $p \in M$.

В следствии 4.14 из [1] доказано (формула Клингенберга), что радиус инъективности $i(M)$ компактного риманова многообразия M равен

$$i(M) = \min\{\sigma, l_0/2\}, \tag{1}$$

где l_0 — минимум длин нетривиальных геодезических петель на M.

Пусть M —эллипсоид вращения

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad a > 0, \tag{2}$$

в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с индуцированной из $\mathbb{R}^3$ римановой метрикой. Эллипсоид (2) задается параметрическими уравнениями

$$(x, y, z) = (\cos u \cos\varphi, \cos u \sin\varphi, a \sin u), \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{3}$$

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0006. Работа второго автора выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-349 от 29.04.2025.

Здесь u — *широта*, φ — *долгота* или *полярный угол*.

Если $a = 1$, то хорошо известно, что $i(M) = \sigma = l_0/2 = \pi$.

Эллипсоид вращения (2) называется *сплюснутым*, если $0 < a < 1$, и *вытянутым*, если $a > 1$.

Максимум гауссовой кривизны сплюснутого эллипсоида вращения достигается на его экваторе и равен $1/a^2$. Поэтому вследствие известных результатов римановой геометрии σ равно πa, т. е. первому сопряженному значению вдоль экватора. Главный результат статьи [2]: $i(M) = \pi a < l_0/2 < \pi$, если $0 < a < 1$.

Основной результат этой статьи — следующая

Теорема 1. *Для радиуса инъективности $i(M)$ каждого вытянутого эллипсоида вращения M, заданного уравнением* (2) *при $a > 1$ имеют место соотношения $i(M) = \sigma < \min(\pi, l_0/2)$. При этом $\sigma = \sigma_p$ для любой точки $p \in M$, отличной от полюсов эллипсоида и такой, что p и ближайшая к p сопряженная относительно проходящего через p двойного меридиана $m(p)$ точка p' находятся на расстоянии $\sigma(p)/2 = \sigma(p')/2$ вдоль $m(p)$ от одного из полюсов эллипсоида.*

Она является непосредственным следствием предложения 1, теоремы 3, ее следствия 2 и теорем 4, 5 о ближайших сопряженных точках.

Кроме того, в этой статье составлен алгоритм для построения последовательности чисел $\sigma_n(a)$, сходящейся сверху к $\sigma = \sigma(a) = \sigma_p = \sigma_p(a)$ для p из теоремы 1 и каждого $a > 1$; даны примеры приближенного вычисления $\sigma(a)$ посредством этого алгоритма с использованием приложения “Wolfram Mathematica”.

В данной статье на основании [2] доказывается, что $l_0/2 = \pi$, если $1 < a \leq 2$. Чему равно l_0, если $a > 2$, авторам неизвестно.

Отметим сильное отличие применяемых методов в этой статье и статье [2].

В статье [2] доказательства и необходимые оценки основаны чаще всего на применении правила Клеро для поиска геодезических и первой вариации длин геодезических; поля Якоби не используются.

Используемые в этой статье результаты из [2] суммированы в теореме 2.

Кроме этого, основную роль в доказательствах ключевых теорем 3–5, предложений 2, 4 и их следствий играют выражение гауссовой кривизны (5) эллипсоида (2), два вида (10) и (14) линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка для ориентированных длин $b(s)$ и $b(u)$ как функций длины дуги s или широты u ортогональных к геодезическим полей Якоби, якобиевы вариации, теорема Штурма о нулях решений линейных однородных ОДУ 2-го порядка и теорема о неявной функции.

В доказательстве теоремы 3 достаточно уравнения (10). Далее требуется общее решение уравнения (14), полученное в предложении 2. Это решение содержит эллиптические интегралы первого и второго рода. Проводить какие-либо вычисления с ними невозможно. Поэтому использующее предложение 2 и теорему 4 доказательство теоремы 5 сводит их к вычислениям с элементарными функциями и применению теоремы о неявной функции.

Предложение 4 позволяет вычислить приближенно с любой точностью $\sigma(a)$, равное радиусу инъективности эллипсоида (2) при разных $a > 1$. Примеры таких вычислений представлены в конце статьи.

Заметим, что решить задачу для достаточно простого объекта было непросто.

§ 2. Некоторые следствия результатов из [2]

Вследствие (3) верхнюю половину эллипсоида (2) можно задать уравнением

$$z = a\sqrt{1-r^2}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2} = \cos u, \quad 0 \le r \le 1. \tag{4}$$

В [2] установлено, что

$$K(r) = \frac{a^2}{(1+(a^2-1)r^2)^2}, \tag{5}$$

$$a^2 = K(0) \le K(r) \le K(1) = \frac{1}{a^2}, \quad 0 < a < 1, \tag{6}$$

$$\frac{1}{a^2} = K(1) \le K(r) \le K(0) = a^2, \quad 1 < a, \tag{7}$$

где $K(r)$— гауссова кривизна эллипсоида (2).

Доказанные в теореме 1, предложении 1, следствии 3 и предложении 3 из [2] результаты можно собрать в следующую теорему.

Теорема 2. *Для любой геодезической на эллипсоиде* (2), *отличной от экватора и двойных меридианов, разность v двух последующих значений полярного угла φ при пересечении этой геодезической с экватором заключена в интервале* $(\pi a, \pi)$, *если* $0 < a < 1$, *и в интервале* $(\pi, \pi a)$, *если* $a > 1$. *При этом v может быть любым числом в указанных интервалах, а длина соответствующей дуги геодезической $l = l(v)$ является строго возрастающей функцией от v при* $0 < a < 1$ *и* $1 < a$.

Замечание 1. На самом деле в теореме 2 подразумевается не $\varphi \in [0, 2\pi)$, а $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{R}$, для которого существует локально изометричное накрывающее отображение $\Psi : \mathbb{R} \to S^1$ на единичную окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ с полярным углом φ такое, что $\Psi(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{\varphi} = \varphi$, если $\widetilde{\varphi} \in [0, 2\pi)$. При этом для любой рассматриваемой в [2] геодезической $\gamma = \gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, на эллипсоиде (2), $a \neq 1$, не включающей его полюса, определена строго возрастающая функция $\widetilde{\varphi}(s) := \widetilde{\varphi}(\gamma(s))$, $s \in \mathbb{R}$.

Следствие 1. *Если* $1 < a \le 2$, *то минимальная длина петли геодезической эллипсоида* (2) *равна* $l_0 = 2\pi$.

Доказательство. Длина экватора эллипсоида (2) равна 2π. Так как $a > 1$, то длина l_m двойного меридиана m эллипсоида (2) больше 2π. Вследствие теоремы 2 при $a \le 2$ максимальная по включению расположенная в полупространстве $z \ge 0$ или $z \le 0$ дуга любой геодезической эллипсоида (2), отличной от экватора и двойных меридианов, не имеет самопересечений, а ее длина больше $l_m/2$. Стало быть, длина петли такой геодезической больше $l_m > 2\pi$.

Замечание 2. Вследствие теоремы 2 для любого числа $a > 2$ расположенные в полупространстве $z > 0$ или $z < 0$ дуги некоторых геодезических эллипсоида (2), отличных от экватора и двойных меридианов, имеют самопересечения.

Предложение 1. *Если* $a > 1$, *то радиус инъективности эллипсоида* (2) *меньше* π.

Доказательство. Существует непродолжаемая кратчайшая эллипсоида, проходящая через полюс p эллипсоида и соединяющая симметричные относительно p точки p_1, p_2. Она не имеет общих точек с экватором, иначе ее длина l будет больше π, длины полуэкватора, соединяющего эти точки. Тогда l меньше l_1, половины длины параллели (полуокружности), соединяющей точки p_1, p_2, так как параллель, отличная от экватора, не является геодезической эллипсоида. Следовательно, $l < l_1 < \pi$.

§ 3. Якобиевы вариации и векторные поля Якоби

Далее в этом параграфе M — произвольное полное риманово многообразие со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ на касательном расслоении TM, в частном случае рассматриваемый нами вытянутый эллипсоид вращения.

Название раздела и терминология соответствуют параграфу 8.3 из [3].

Якобиевой вариацией геодезической (точнее, геодезического отрезка) $\gamma = \gamma(s)$, $s \in [\alpha,\beta]$, называется дифференцируемое отображение $V : [\alpha,\beta] \times J \to M$, $\alpha < \beta$, где J — открытый интервал в $\mathbb{R}$, $0 \in J$, такое, что $V(s,t_0)$ для каждого $t_0 \in J$, — геодезическая, $V(s,0) = \gamma(s)$.

Определение из [3] отличается от данного здесь тем, что $[\alpha,\beta]$ заменено на $\mathbb{R}$.

Якобиева вариация V называется *нормальной*, если для каждого $t_0 \in J$ геодезическая $V(s,t_0)$ нормальна, т. е. параметризована длиной дуги.

Число $\sigma > 0$ называется *первым сопряженным значением* нормальной геодезической γ, если существует ее якобиева вариация V такая, что $\alpha = 0$, $\beta = \sigma$, $V(0,t) \equiv \gamma(0)$, $\frac{\partial V}{\partial t}(s,0) \neq 0$, $0 < s < \beta$, и $\frac{\partial V}{\partial t}(\beta,0) = 0$. При этом $\gamma(0)$, $\gamma(\sigma)$ называются (ближайшими) *сопряженными точками* γ [1, 3, 4].

В разд. 4.2 «Поля Якоби» из [4] гладкое векторное поле $Y = Y(s)$ вдоль геодезической $\gamma = \gamma(s)$, параметризованной длиной дуги, на гладком римановом многообразии называется *векторным полем Якоби вдоль* γ, если для тензора кривизны R

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y + R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma = 0. \tag{8}$$

Векторное поле $Y(s)$ на геодезической $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, называется в параграфе 8.3 из [3] *полем Якоби*, если существует якобиева вариация V геодезической γ:

$$Y(s) = \frac{\partial V}{\partial t}(s,0) \quad \text{для любого } s \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Далее в [3] доказывается, что любое поле Якоби $Y(s)$ (в смысле [3]) на геодезической $\gamma(s)$ удовлетворяет уравнению (8). В [3] дан набросок доказательства утверждения, что любое решение уравнения (8) является полем Якоби.

Из этих результатов нетрудно вывести, что поля Якоби на данной геодезической риманова многообразия M^n составляют линейное пространство размерности $2n$ над $\mathbb{R}$ (см. [3]); для нормальных вариаций геодезической векторные поля вида (9) образуют линейное пространство размерности $2n-1$ над $\mathbb{R}$. В последнем случае есть 1-мерное пространство касательных к геодезической параллельных векторных полей и $2(n-1)$-мерное пространство ортогональных к геодезической векторных полей вида (9).

Пусть $\gamma = \gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, — нормальная геодезическая эллипсоида (2) и $X = X(s)$ — гладкое единичное векторное поле вдоль γ, ортогональное $\dot\gamma(s)$. Тогда любое векторное поле Якоби $Y(s)$ вдоль $\gamma(s)$, ортогональное $\dot\gamma(s)$, можно записать в виде $Y(s) = (X(s),Y(s))X(s)$ и

$$(\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y + R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Y) = (\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y, Y) + (R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Y) = 0.$$

Пусть $b(s) = (X(s),Y(s))$. Тогда

$$(R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Y) = K(\gamma)|\dot\gamma|^2|Y|^2 = K(\gamma)b^2(\gamma),$$

где $K(s) := K(\gamma(s)) = a^2/(1+(a^2-1)\cos^2 u(s))^2$ — гауссова кривизна эллипсоида в точке $\gamma(s)$. Используя свойства ковариантной производной векторных полей и учитывая, что $(Y,\dot\gamma) = (X,\dot\gamma) = 0$, $|X| = |\dot\gamma| = 1$, получаем

$$\nabla_{\dot\gamma}Y = \nabla_{\dot\gamma}(bX) = \dot bX + b\nabla_{\dot\gamma}X = \dot bX,$$

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y = \nabla_{\dot\gamma}(\dot b X) = \ddot b X + \dot b \nabla_{\dot\gamma} X = \ddot b X,$$

$$(\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y, Y) + (R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma, Y) = (\ddot b X, bX) + K(\gamma)b^2 = \ddot b b + K(\gamma)b^2 = 0,$$

$$\ddot b(s) + K(s)b(s) = 0. \tag{10}$$

Замечание 3. В замечании (iii) разд. 4.2 из [4] рассматриваются риманово многообразие M^2, поле Якоби Y на нормальной геодезической γ, ортогональное γ, и выписано уравнение для Y, совпадающее с (10) с точностью до обозначений. После этого говорится, что линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (10) есть уравнение свободных колебаний. Его решения при $K \geq \varkappa > 0$ (как и у нас) имеют осциллирующий характер.

§ 4. Реализация радиуса инъективности на двойном меридиане m

Замечание 4. Далее в доказательстве теоремы 3 будут использоваться без специальных ссылок теорема Штурма из разд. 38 книги [5] и задача 3 после этого параграфа для О.Д.У. (10).

Лемма 1. *Каждая нормальная кратчайшая $\gamma(s)$, $\alpha \leq s \leq \beta$, в (2) допускает нормальную вариацию Якоби $V(t,s)$, $(t,s) \in [\alpha,\beta] \times J$, такую, что $V(\alpha,t) \equiv \gamma(\alpha)$, $\frac{\partial V}{\partial t}(s,0) \neq 0$, $\alpha < s < \beta$. Если $\gamma(\alpha)$, $\gamma(\beta)$ не сопряжены, то $\frac{\partial V}{\partial t}(\beta,0) \neq 0$.*

Доказательство. Можно считать, что $\alpha = 0$. Положим $p := \gamma(0)$, $v_0 := \dot\gamma(0)$. Определим кривую единичных векторов $v = v(t) \in M_p$, $t \in J := \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, так, что ориентированный угол $\angle(v_0, v(t)) = t$. Тогда отображение $V(s,t) := \mathrm{Exp}_p(sv(t))$, $(s,t) \in [0,\beta] \times J$, — нормальная вариация Якоби кратчайшей γ. При этом справедливо первое утверждение, так как $\gamma(0)$ не сопряжена с $\gamma(s)$, $0 < s < \beta$, и второе утверждение, если $\gamma(\alpha)$, $\gamma(\beta)$ не сопряжены.

Радиус инъективности $i(p)$, $p \in M$, для полного риманова многообразия M — непрерывная положительная функция [4]. Поэтому если M компактно, то $i(M) = \min\{i(p), p \in M\} := \delta > 0$.

Теорема 3. *Если M — вытянутый эллипсоид вращения в $\mathbb{R}^3$, то непродолжаемая кратчайшая длины δ — некоторая дуга двойного меридиана эллипсоида.*

Доказательство. Предположим, что существует параметризованная длиной дуги непродолжаемая кратчайшая $\gamma = \gamma(s)$, $s \in [0,\delta]$, не равная дуге меридиана. Тогда определены $\varphi(\gamma(s))$, $0 \leq s \leq \delta$; $\varphi(\gamma(0)) \neq \varphi(\gamma(\delta))$. Применяя, если нужно, некоторые из следующих изометрий эллипсоида: вращение эллипсоида, отражение относительно плоскости экватора, отражение относительно плоскости некоторого двойного меридиана, можно считать, что

$$\varphi(\gamma(0)) = 0 < \varphi(\gamma(\delta)) \leq \pi, \quad z(\gamma(\delta)) \geq |z(\gamma(0))|. \tag{11}$$

На основании предложения 1 имеем $\delta < \pi$ и γ не может быть дугой экватора. Ввиду теоремы 2 γ не более одного раза пересекает экватор и для некоторого числа $\varepsilon \in (0,\delta]$ функция $u(s) := u(\gamma(s))$ строго возрастает на $[0,\varepsilon]$ и строго убывает на $[\varepsilon,\delta]$, если $\varepsilon < \delta$.

Вследствие сказанного из (11) вытекает, что $z(\gamma(\delta)) > 0$.

Кроме того, $\varphi(\gamma(s))$, $0 \leq s \leq \delta$, — строго возрастающая функция.

Для произвольной нормальной якобиевой вариации $V(s,t)$, $(s,t)\in[0,\delta]\times J$, геодезической $\gamma=\gamma(s)$ такой, что $V(\widetilde{s},t)\equiv\gamma(\widetilde{s})$, $t\in J$, для некоторого $\widetilde{s}$ из $[0,\delta]$, все геодезические γ_t вариации V — кратчайшие, и $\frac{\partial V}{\partial t}(s,t_0)\neq 0$ ортогонально γ_{t_0}, $t_0\in J$, если $(s,t_0)\in((0,\delta)\setminus\{\tilde{s}\})\times J$.

Если верно предположение в начале доказательства, то возможны два случая:

1) $\gamma(0)$, $\gamma(\delta)$ не сопряжены относительно γ, но существует другая кратчайшая $\gamma_1(s)$, $0\leq s\leq\delta$ с теми же концами, что γ;

2) $\gamma(0)$, $\gamma(\delta)$ сопряжены относительно γ.

1) Прежде всего должно быть $\varphi(\gamma(\delta))<\pi$. Иначе, применяя упомянутую выше нормальную якобиеву вариацию $V(s,t)$ геодезической $\gamma(s)$, $0\leq s\leq\delta$, при $\widetilde{s}=\delta$, получим для некоторого *фиксированного* $t>0$ или $t<0$, достаточно близкого к 0, кратчайшую γ_t с $\varphi(\gamma_t(0))<0$, $\varphi(\gamma_t(\delta))=\pi$, чего не может быть.

Так как $\varphi(\gamma(\delta))<\pi$, то в этом случае для некоторого *фиксированного* $t>0$ или $t<0$, достаточно близкого к 0, кратчайшие $\gamma_1(s)$ и $V(s,t)$, $s\in[0,\delta]$, пересекутся помимо $s=0$ при единственном $\widetilde{s}\in(0,\delta)$. Это противоречит тому, что эти кривые — кратчайшие.

2) Предположим сначала, что $z(\gamma(0))\geq 0$.

Применим упомянутую выше нормальную якобиеву вариацию $V(s,t)$ геодезической $\gamma(s)$, $0\leq s\leq\delta$, при $\tilde{s}=0$.

Вследствие сказанного, в особенности выделенного выше утверждения, $r(V(s,t))<r(\gamma(s))$, следовательно $K(V(s,t))>K(\gamma(s))$ для *фиксированного* $t>0$ или $t<0$, достаточно близкого к 0, и всех $s\in(0,\delta)$. Поэтому относительно геодезической $V(s,t)$, $s\in[0,\delta]$, точка $V(0,t)$ сопряжена некоторой точке $V(s,t)$, где $0<s<\delta$. Это противоречит определению δ.

Предположим теперь, что $z(\gamma(0))<0$. Тогда существует единственное $\widetilde{s}\in(0,\delta)$ такое, что $z(\gamma(\widetilde{s}))=0$. Следовательно, точка $p:=\gamma(\widetilde{s})$ не сопряжена относительно γ ни с $\gamma(0)$, ни с $\gamma(\delta)$ согласно определению δ.

Применяя доказательство леммы 1, определим вариацию Якоби кратчайших

$$V(s,t)=\mathrm{Exp}_p((s-\widetilde{s})v(t)),\quad (s,t)\in[0,\delta]\times J.$$

Тогда $r(V(s,t))<r(\gamma(s))$, следовательно, $K(V(s,t))>K(\gamma(s))$ для фиксированного $t>0$ или $t<0$, достаточно близкого к 0, и всех $s\in[0,\delta]\setminus\{\widetilde{s}\}$. Поэтому относительно геодезической $V(s,t)$, $s\in[0,\delta]$, точка $V(0,t)$ сопряжена некоторой точке $V(s,t)$, где $0<s<\delta$. Это противоречит определению δ.

Следствие 2. *Если M — эллипсоид (2), $a>1$, то $i(M)=\delta=\sigma<l_0/2$.*

Доказательство. В теореме 3 доказано, что радиус инъективности δ достигается на двойном меридиане. Тогда если $\delta=l_0/2$, то $l_0/2$ — длина меридиана, $l_0/2>\pi$, что противоречит неравенству $\delta<\pi$ из предложения 1.

§ 5. Решения О.Д.У. (10) для двойного меридиана m

Найти общие решения О.Д.У. (10) для m как функции параметра s не удается.

Найдем эти решения как функции $b(u)$ от модифицированной широты $u\in[-\pi/2,3\pi/2)$ двойного меридиана m вытянутого эллипсоида вращения: на одном из его меридианов u есть обычная широта из (3), а если p — внутренняя точка другого его меридиана, то $u(p)=u(-p)+\pi$.

Пусть на эллипсоиде (2) при $a > 1$ в плоскости с $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ задан двойной меридиан $\gamma(u) = (\cos u, 0, a\sin u)$, $u \in [0, 2\pi]$. Тогда его длина дуги равна

$$s(u) = \int\limits_0^u \sqrt{1 + (a^2-1)\cos^2\tau}\, d\tau = a\int\limits_0^u \sqrt{1 - k^2\sin^2\tau}\, d\tau, \quad k = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}, \tag{12}$$

$$s'(u) = \sqrt{1 + (a^2-1)\cos^2 u}, \quad \dot{u}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + (a^2-1)\cos^2 u(s)}},$$

$$\begin{aligned}\ddot{u}(s) &= \frac{d}{ds}(1 + (a^2-1)\cos^2 u(s))^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(1 + (a^2-1)\cos^2 u(s))^{-\frac{3}{2}}(-2\dot{u}(s)(a^2-1)\sin u\cos u) \\ &= \frac{(a^2-1)\sin 2u(s)}{2(1 + (a^2-1)\cos^2 u(s))^2}.\end{aligned}$$

Пусть $\gamma = \gamma(s) := \gamma(u(s))$, $b(s) := (X(s), Y(s))$, где $X = X(s)$ — гладкое единичное векторное поле вдоль γ, ортогональное $\dot{\gamma}(s)$, $Y(s) = (X(s), Y(s))X(s)$ — векторное поле Якоби вдоль $\gamma(s)$, ортогональное $\dot{\gamma}(s)$. Тогда согласно дифференциальному уравнению (10) получаем

$$\ddot{b}(s) + K(s)b(s) = 0, \tag{13}$$

где

$$K(s) := K(\gamma(s)) = K(u(s)) = a^2/(1 + (a^2-1)\cos^2 u(s))^2.$$

При этом

$$\dot{b}(s) = \dot{u}(s)b'_u(u(s)) = \frac{1}{\sqrt{1 + (a^2-1)\cos^2 u(s)}}b'_u(u(s)),$$

$$\ddot{b}(s) = \ddot{u}(s)b'_u(u(s)) + (\dot{u}(s))^2 b''_u(u(s)).$$

Подставляя последнее выражение в (13) и убрав s, получим

$$\frac{(a^2-1)\sin 2u}{2(1 + (a^2-1)\cos^2 u)^2}b' + \frac{b''}{1 + (a^2-1)\cos^2 u} + \frac{a^2}{(1 + (a^2-1)\cos^2 u)^2}b = 0,$$

$$b'' + \frac{(a^2-1)\sin 2u}{2(1 + (a^2-1)\cos^2 u)}b' + \frac{a^2}{1 + (a^2-1)\cos^2 u}b = 0. \tag{14}$$

Получили снова линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции $b(u)$.

Предложение 2. *Общим решением уравнения* (14) *является функция*

$$b(u) = c_1\cos u + c_2(a\sin u\sqrt{1 - k^2\sin^2 u} + a\cos u(F(u,k) - E(u,k))), \tag{15}$$

где $k = \sqrt{a^2-1}/a$, $E(u,k), F(u,k)$ — *эллиптические интегралы Лежандра второго и первого рода соответственно.*

Доказательство. Из теории известно, что общее решение такого О.Д.У. является линейной комбинацией двух независимых решений того же уравнения

[5]. В частности, если известно частное решение y_1 уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то функция

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

является частным независимым от y_1 решением этого же уравнения [5].

Видно, что $b_1(u) = \cos u$ является частным решением уравнения (14), тогда второе частное решение $b_2(u)$, независимое от $b_1(u)$, можно вычислить так:

$$b_2(u) = \cos u \int \frac{e^{-\int \frac{(a^2-1)\sin 2u}{2(1+(a^2-1)\cos^2 u)}\,du}}{\cos^2 u}\,du = \cos u \int \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(1+(a^2-1)\cos^2 u)}}{\cos^2 u}\,du$$
$$= \cos u \int \frac{\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}}{\cos^2 u}\,du = b_2(u). \quad (16)$$

Вычислим интеграл

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}}{\cos^2 u}\,du = \int \sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}(\tan u)'\,du.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_1 = \tan u\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u} + \int \frac{(a^2-1)\sin u\cos u}{\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}}\tan u\,du$$
$$= \tan u\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u} + \int \frac{(a^2-1)\sin^2 u}{\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}}\,du$$
$$= a\tan u\sqrt{1-k^2\sin^2 u} + I_2,$$

$$I_2 = \int \frac{(a^2-1)\sin^2 u}{\sqrt{1+(a^2-1)-(a^2-1)\sin^2 u}}\,du = a\int \frac{k^2\sin^2 u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,du$$
$$= a\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} - \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\right)du.$$

Неопределенный интеграл I_2 символически обозначает некоторое семейство решений О.Д.У. (14), каждое из которых получается выбором нижнего предела интегрирования как произвольного конкретного числа, а верхнего предела — переменной u (при замене переменной интегрирования). Каждое такое решение годится для предложения 2. Заменяя I_2 на $a(F(u,k) - E(u,k))$, где, как обычно,

$$F(u,k) = \int_0^u (1/\sqrt{1-k^2\sin^2 v})\,dv, \quad E(u,k) = \int_0^u \sqrt{1-k^2\sin^2 v}\,dv, \qquad (17)$$

получаем предложение 2.

Учитывая (15), (17), полагая $c_1 = 0$, $c_2 = 1/a$ в (15) и рассматривая $b(u)$, $0 \le u \le \pi$, на двойном меридиане m, видим, что $b(0) = 0$, $F(u,k) - E(u,k) > 0$ при $0 < u \le \pi$, $b(u) > 0$ при $0 < u \le \pi/2$, $b(\pi) < 0$. Поэтому существует $\widetilde{u} \in (\pi/2, \pi)$ такое, что $b(\widetilde{u}) = 0$.

Теорема 4. *Функция*

$$b(u) = \sin u\sqrt{1-k^2\sin^2 u} + \cos u[(F(u,k) - F(\pi/2,k)) - (E(u,k) - E(\pi/2,k))],$$

$u \in [0,\pi]$, *симметрична относительно* $\overline{u} = \frac{\pi}{2}$ *и является решением О.Д.У.* (14).

При этом $b(u) = 0$ *при* $u = u_1 \in (0,\pi/2)$ *и* $u = u_2 = \pi - u_1$, *где*

$$\tan u_1 = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u_1}}[(F(\pi/2,k) - F(u_1,k)) - (E(\pi/2,k) - E(u_1,k))]. \quad (18)$$

Кроме того, длина дуги между двумя соответствующими сопряженными точками на двойном меридиане равна $2a(E(\pi/2,k) - E(u_1,k))$.

Доказательство. Положим $c_2 = 1/a$. Тогда условие симметричности функции (15) при $u \in [0,\pi]$ относительно $\overline{u} = \frac{\pi}{2}$ запишется в виде

$$\sin u\sqrt{1-k^2\sin^2 u} + \cos u(c_1 + F(u,k) - E(u,k)) \\ = \sin u\sqrt{1-k^2\sin^2 u} - \cos u(c_1 + F(\pi-u,k) - E(\pi-u,k)).$$

Следовательно, $c_1 \equiv \frac{1}{2}[(E(u,k) + E(\pi-u)) - (F(u,k) + F(\pi-u,k))]$. Из определения функций $E(u,k)$, $F(u,k)$ и симметричности функции $\sqrt{1-k^2\sin^2 u}$ относительно $\overline{u} = \frac{\pi}{2}$ вытекает, что суммы $E(u,k) + E(\pi-u,k)$ и $F(u,k) + F(\pi-u,k)$ постоянны. Поэтому

$$c_1 = \frac{1}{2}[(E(\pi/2,k) + E(\pi/2,k)) - (F(\pi/2,k) + F(\pi/2,k))] = E(\pi/2,k) - F(\pi/2,k).$$

Следовательно, указанная функция $b(u)$, являющаяся решением ОДУ (14), симметрична относительно $\overline{u} = \frac{\pi}{2}$.

Отсюда следует второе утверждение теоремы.

Из второго утверждения и равенства (12) следует последнее утверждение.

Замечание 5. Величины $F(\pi/2,k)$ и $E(\pi/2,k)$ называются соответственно полными эллиптическими интегралами Лежандра первого и второго рода.

§ 6. Непродолжаемая кратчайшая длины δ

Замечание 6. Далее без специальных ссылок будет использоваться следствие 2 теоремы Штурма из разд. 38 в [5]: Если u_1 и u_2 — два последовательных нуля какого-нибудь решения уравнения типа (14), то всякое другое решение этого уравнения имеет на интервале (u_1,u_2) ровно один нуль, если отношение этих двух решений не постоянно.

Теорема 5. *Длина дуги двойного меридиана между ближайшими нулями* $u_1 < u_2$ *решения* $b(u)$ *уравнения* (14) *для эллипсоида* (2) *минимальна, если* $a > 1$ *и*

$$0 < u_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим семейство решений уравнения (14)

$$b(v,u) = \cos u[F(u,k) - E(u,k) - (F(v,k) - E(v,k))] + \sin u\sqrt{1-k^2\sin^2 u} \quad (19)$$

(вида (15) при $c_1 = -(F(v,k) - E(v,k))$, $c_2 = 1/a$), где $v \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Для каждого $v \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ есть в точности два последовательных нуля $u_l(v)$, $l = 1,2$, функции $b(v,u)$ таких, что $0 \leq u_1(v) < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < u_2(v) \leq \pi - u_1(v)$, причем равенство в последнем неравенстве достигается только при $v = \frac{\pi}{2}$. Поэтому $u_l(\frac{\pi}{2})$, $l = 1, 2$, — нули u_l из теорем 4, 5. Пусть $0 = b(u(v)) := b(v, u(v))$, где $u(v)$ какой-то из нулей $u_l(v)$, $l = 1, 2$, функции $b(v, u)$.

Тогда $\cos(u(v)) \neq 0$ и из (19) следует равенство

$$f(v, u(v)) := F(v,k) - E(v,k) - (F(u(v),k) - E(u(v),k)) \\ = \tan u(v)\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)}. \quad (20)$$

Кроме того, вследствие (19), (20) при всех $v \in [0, \pi/2]$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}b\right)(v, u(v)) = \sin u(v) f(v, u(v)) + \cos u(v)\left(\frac{k^2\sin^2 u(v)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)}}\right) \\ + \cos u(v)\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)} + \sin u(v)\frac{-k^2\sin u(v)\cos u(v)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)}} \\ = \sin u(v)\left[\operatorname{tg} u(v)\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)} - \frac{k^2\sin u(v)\cos u(v)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)}}\right] + \frac{\cos u(v)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)}} \\ = \frac{1}{\cos u(v)\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)}}[\sin^2 u(v)(1 - k^2\sin^2 u(v) - k^2\cos^2 u(v)) + \cos^2 u(v)] \\ = \frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)}}{\cos u(v)} \neq 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial}{\partial u}b \neq 0$ в некоторой окрестности точки $(v, u(v))$.

Тогда по теореме о неявной функции (теорема 2.12 в [6]) $u(v)$, $v \in [0, \pi/2]$, — непрерывно дифференцируемая функция, и на основании (19), (20)

$$0 = b'_v(u(v)) = \frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)}u'(v)}{\cos u(v)} - \frac{k^2\sin^2 v\cos u(v)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 v}}.$$

Стало быть,

$$u'(v) = \frac{k^2\sin^2 v}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 v}}\frac{\cos^2 u(v)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u(v)}}.$$

Пусть

$$l(v) := a(E(u_2(v),k) - E(u_1(v),k)) = a\int\limits_{u_1(v)}^{u_2(v)}\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}\,du$$

— длина дуги двойного меридиана между соответствующими сопряженными точками,

$$l'(v) = a[u_2'(v)\sqrt{1 - k^2\sin^2 u_2(v)} - u_1'(v)\sqrt{1 - k^2\sin^2 u_1(v)}] \\ = \frac{ak^2\sin^2 v}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 v}}[\cos^2 u_2(v) - \cos^2 u_1(v)] \leq 0$$

и в последнем неравенстве достигается равенство только при $v = \frac{\pi}{2}$ и $v = 0$.

Как следствие функция $l(v)$ строго убывает на отрезке $0 \le v \le \pi/2$.

Ввиду (15), (19) $b(0,u)$ получается из (15) при $c_1 = 0$ и $c_2 = 1/a$.

Нули $u_1(v)$ рассмотренного выше семейства функций $b(v,u)$, $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$, заполняют весь отрезок $[0, u_1]$, где u_1 было в теореме 4, и $u = u_1(0) = 0$.

Рассмотрим теперь при $v \in [-1, 0]$ семейство решений уравнения (14)

$$b(v,u) = -v\cos u + (1+v)[(F(u,k) - E(u,k))\cos u + \sin u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}]. \quad (21)$$

Заметим, что функции $b(v,u)$ из (19) и (21) совпадают при $v = 0$.

Есть в точности два последовательных нуля $u_1(v)$ и $u_2(v)$ функции $b(v,u)$ для каждого $v \in (-1, 0]$ таких, что $-\frac{\pi}{2} < u_1(v) \le 0$, $\frac{\pi}{2} < u_2(v) < \frac{3\pi}{2}$.

Пусть $0 = b(u(v)) := b(v, u(v))$, где $u(v)$ — какой-то из нулей $u_l(v)$, $l = 1, 2$. Тогда $\cos(u(v)) \ne 0$ при $v \in (-1, 0]$ и из (21) получаем равенство

$$g(v, u(v)) := E(u(v), k) - F(u(v), k) = \frac{-v}{1+v} + \tan u(v)\sqrt{1-k^2\sin^2 u(v)}. \quad (22)$$

Кроме того, вследствие (21), (22) при всех $v \in (-1, 0]$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial u}b\right)(v,u(v)) &= \frac{(1+v)k^2\sin^2 u(v)\cos u(v)}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u(v)}} \\ &\quad + (1+v)\tan u(v)\sqrt{1-k^2\sin^2 u(v)}\sin u(v) \\ &\quad + (1+v)\cos u(v)\left(\sqrt{1-k^2\sin^2 u(v)} - \frac{k^2\sin^2 u(v)}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u(v)}}\right) \\ &= \frac{(1+v)\sqrt{1-k^2\sin^2 u(v)}}{\cos u(v)} \ne 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{\partial}{\partial u}b \ne 0$ в некоторой окрестности точки $(v, u(v))$.

По теореме о неявной функции $u(v)$, $v \in (-1, 0]$, — непрерывно дифференцируемая функция и на основании (21), (22)

$$\begin{aligned}0 = b'_v(u(v)) &= \frac{(1+v)\sqrt{1-k^2\sin^2 u(v)}\,u'(v)}{\cos u(v)} - [1 + g(v, u(v))]\cos u(v) \\ &\quad + \sin u(v)\sqrt{1-k^2\sin^2 u(v)} = \frac{(1+v)\sqrt{1-k^2\sin^2 u(v)}\,u'(v)}{\cos u(v)} - \frac{\cos u(v)}{1+v}.\end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$u'(v) = \frac{\cos^2 u(v)}{(1+v)^2\sqrt{1-k^2\sin^2 u(v)}}.$$

Пусть

$$l(v) := a(E(u_2(v), k) - E(u_1(v), k)) = a\int\limits_{u_1(v)}^{u_2(v)} \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,du$$

— длина дуги двойного меридиана между соответствующими сопряженными точками,

$$l'(v) = a[u_2'(v)\sqrt{1-k^2\sin^2 u_2(v)} - u_1'(v)\sqrt{1-k^2\sin^2 u_1(v)}] \\ = \frac{a(\cos^2 u_2(v) - \cos^2 u_1(v))}{(1+v)^2}.$$

Последнее выражение отрицательно по крайней мере для v, достаточно близких к нулю. Оно может равняться нулю, только если $u_2(v) - u_1(v) = \pi$, т. е. когда $l(v)$ равно длине L меридиана (половины двойного меридиана), и положительно тогда и только тогда, когда $l(v) > L$. Это неравенство невозможно, поскольку тогда $l'(v) > 0$, что приводит к противоречию.

Следовательно, $l'(v) \le 0$, $-1 < v < 0$.

Для завершения доказательства заметим, что нули $u_1(v) < u_2(v)$ семейства решений $b(v,u)$, $v \in [-1, \pi/2]$, и нули $\pi - u_2(v) < \pi - u_1(v)$ полученного из него зеркальной симметрией двойного меридиана (относительно полюсов) семейства решений уравнения (14) дают ближайшие нули $u_1 < u_2$ всех ненулевых решений $b(u)$ уравнения (14). А такая симметрия двойного меридиана индуцируется зеркальной симметрией эллипсоида относительно некоторой плоскости в $\mathbb{R}^3$, включающей полюсы.

§ 7. Вычисление радиуса инъективности

Предложение 3. *Для любого* $k \in [0,1)$ *существует единственное решение* $u_1 = u_1(k)$ *уравнения* (18) *на полуинтервале* $[0, \frac{\pi}{2})$.

Доказательство. Наличие двух решений уравнения (18) на полуинтервале $[0, \frac{\pi}{2})$ эквивалентно тому, что функция $b(u)$ из теоремы 4 (другими словами, векторное поле Якоби) обращается в нуль в двух различных (сопряженных) точках дуги меридиана, соединяющей верхнюю вершину эллипсоида с экватором. Этого не может быть, так как каждый меридиан является кратчайшей.

Лемма 2. *Если в уравнении* (18) $0 \le k = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ *и* $u_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, *то* $u_1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $k = 0$.

Доказательство. Пусть $k = 0$. Тогда

$$\tan u_1 = F(\pi/2, 0) - F(u_1, 0) - (E(\pi/2, 0) - E(u_1, 0)) \\ = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - u_1\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - u_1\right)\right) = 0$$

и $u_1 = 0$, поскольку $u_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Если же $u_1 = 0$, то

$$0 = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \Rightarrow k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} du = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует непрерывно дифференцируемая строго возрастающая функция* $u_1 = u_1(k)$, $0 \le k < 1$, *где* u_1*— решение уравнения* $b(u) = 0$ *в теореме* 4.

Доказательство. Вследствие (18)

$$\sqrt{1-k^2\sin^2 u_1}\tan u_1 - (F(\pi/2, k) - F(u_1, k)) + E(\pi/2, k) - E(u_1, k) = 0.$$

Но

$$F(\pi/2,k)-F(u_1,k)+E(\pi/2,k)-E(u_1,k)=k^2\int\limits_{u_1}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}}\,d\tau.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1-k^2\sin^2 u_1}\tan u_1-k^2\int\limits_{u_1}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}}d\tau=0.$$

Пусть

$$f=f(k,u)=\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\tan u-k^2\int\limits_{u}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}}\,d\tau.$$

Тогда

$$f_u(k,u)=\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}{\cos^2 u}-\frac{k^2\sin^2 u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}+\frac{k^2\sin^2 u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}=\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}{\cos^2 u}>0.$$

По теореме о неявной функции существует непрерывно дифференцируемая функция $u_1=u_1(k)$, так как f непрерывно дифференцируема на $(0,1)\times(0,\frac{\pi}{2})$. Кроме того, $u_1'(k)=-f_k(k,u_1(k))/f_u(k,u_1(k))$. Теперь достаточно доказать, что $f_k<0$. Имеем

$$f_k=\frac{-k\sin^2 u\tan u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}-2k\int\limits_{u}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}}\,d\tau-k^2\int\limits_{u}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{-1}{2}(-2k\sin^2\tau)\sin^2\tau}{(1-k^2\sin^2\tau)^{\frac{3}{2}}}\,d\tau<0.$$

Лемма доказана.

Замечание 7. Из доказательства леммы 3 следует, что равенство (18) эквивалентно равенству $\tan(u_1(k))=g_k(u_1(k))$, где

$$g_k(u)=\frac{k^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\int\limits_{u}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}}\,d\tau,\quad u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ k\in(0,1).$$

Ясно, что $0<g_k(u)$ для всех $(u,k)\in[0,\frac{\pi}{2})\times(0,1)$.

Лемма 4. *Пусть* $k\in(0,1)$ *фиксировано. Тогда* $\arctan(g_k(u))<u_1(k)$ *для всех* $u\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $u\neq u_1(k)$, *где* $u_1(k)$ *— решение уравнения* (18).

Доказательство. Ясно, что

$$\frac{dg_k(u)}{du}=g_k'(u)=\frac{k^2\sin u\cos u}{1-k^2\sin^2 u}(g_k(u)-\tan u).$$

Поэтому $g_k'(u_1(k))=0$. Вследствие предложения 3 последнее равенство выполняется для единственного $u\in(0,\frac{\pi}{2})$, $u=u_1(k)$. Далее,

$$g_k'(u)=\frac{k^2\sin u}{1-k^2\sin^2 u}(\cos u\ g_k(u)-\sin u).$$

Следовательно, $g_k'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. При этом

$$g_k'(u)>0,\ u\in(0,u_1(k)),\quad g_k'(u)<0,\ u\in\left(u_1(k),\frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. $g_k(u)<g_k(u_1(k))=\tan u_1(k)$, если $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $u\neq u_1(k)$.

Следствие 3. *Если* $G(k) := F\big(\frac{\pi}{2}, k) - E(\frac{\pi}{2}, k\big)$, $k \in (0,1)$, *то*

$$\arctan(g_k(0)) = \arctan(G(k)) < u_1(k).$$

Предложение 4. *Если* $x_0 := 0$ *и* $x_n := \arctan(g_k(x_{n-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, *то* $x_n \nearrow u_1(k)$.

Доказательство. Для каждого $k \in (0,1)$ имеем $x_1 - x_0 = \arctan(G(k)) > 0$.

Предположим, что $x_n - x_{n-1} > 0$. Тогда

$$x_{n+1} - x_n = \arctan(g_k(x_n)) - \arctan(g_k(x_{n-1})) = \arctan\left(\frac{g_k(x_n) - g_k(x_{n-1})}{1 + g_k(x_n)g_k(x_{n-1})}\right).$$

Вследствие леммы 4 $x_1 = \arctan(g_k(0)) < \arctan(g_k(u_1(k))) = u_1(k)$ для каждого $k \in (0,1)$. Предположим, что $x_n < u_1(k)$. Тогда

$$x_{n+1} = \arctan(g_k(x_n)) < \arctan(g_k(u_1(k))) = u_1(k).$$

Поэтому $x_n < u_1(k)$ для всех натуральных n. Из предположения индукции и того, что функция $g_k(u)$ строго возрастает на полуинтервале $u \in [0, u_1(k))$, следует, что $g_k(x_n) - g_k(x_{n-1}) > 0$. Аналогично

$$\arctan\left(\frac{g_k(x_n) - g_k(x_{n-1})}{1 + g_k(x_n)g_k(x_{n-1})}\right) = x_{n+1} - x_n > 0.$$

Поэтому $x_n \nearrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n =: x(k)$. Поскольку функции $g_k(u)$, $\arctan$ непрерывны, имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \arctan(g_k(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})),$$

т. е. $x(k) = \arctan(g_k(x(k)))$ и $\tan(x(k)) = g_k(x(k))$. Так как решение $u_1(k)$ уравнения (18) единственно, то $x(k) = u_1(k)$.

Замечание 8. Определенная в предложении 4 последовательность x_n позволяет получить хорошую оценку для $u_1(k)$ снизу.

Следствие 4. *Пусть*

$$\sigma_n(a) := 2\int\limits_{x_n(k)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (a^2-1)\cos^2\tau}\, d\tau.$$

Тогда $\sigma_n(a) \searrow \sigma(a)$ (*см. введение*), *где*

$$\sigma(a) = 2\int\limits_{u_1(k)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (a^2-1)\cos^2\tau}\, d\tau,$$

$x_n(k)$— *последовательность из предложения* 4 *и* $u_1(k)$— *корень уравнения* (18) *для любого* $k = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$, $a > 1$.

Пусть $n = 100$.

Пример 1. $\sigma_{100}(3) = 0.74959$, $\sigma_{100}(4) = 0.431298$, $\sigma_{100}(5) = 0.288134$, $\sigma_{100}(6) = 0.211236$, $\sigma_{100}(7) = 0.164441$, $\sigma_{100}(8) = 0.133409$, $\sigma_{100}(9) = 0.111522$, $\sigma_{100}(10) = 0.0953589$.

Пример 2. $\sigma_{100}(20) = 0.036365$, $\sigma_{100}(30) = 0.0214715$, $\sigma_{100}(40) = 0.0149387$, $\sigma_{100}(50) = 0.0113311$, $\sigma_{100}(60) = 0.00906516$, $\sigma_{100}(70) = 0.00751939$, $\sigma_{100}(80) = 0.00640234$, $\sigma_{100}(90) = 0.00556003$, $\sigma_{100}(100) = 0.0049038$.

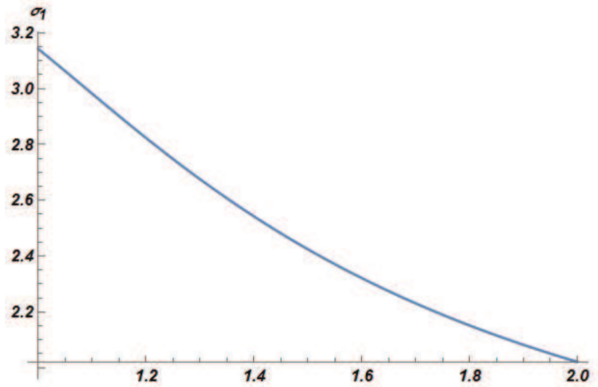

Рис. 1.. График функции $\sigma_1(a)$, $a \in [1, 2]$.

Предложение 5. *Если* $1 < a \leq 2$, *то* $\sigma_1(a) < \pi$.

Это предложение подтверждает график функции $\sigma_1(a)$, $1 \leq a \leq 2$, на рис. 1, полученный в результате компьютерных вычислений по программе с использованием “Wolfram Mathematica”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sakai T.* Riemannian geometry. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1996. (Transl. Math. Monogr.; V. 149).
2. *Берестовский В. Н., Мустафа А.* Радиус инъективности и кратчайшие сплюснутого эллипсоида вращения // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 15–26.
3. *Постников М. М.* Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971.
4. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
5. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
6. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.

Поступила в редакцию 10 июня 2024 г.
После доработки 30 июня 2025 г.
Принята к публикации 7 июля 2025 г.

Берестовский Валерий Николаевич (ORCID 0000-0001-5739-9380)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`vberestov@inbox.ru`

Мустафа Али (ORCID 0009-0007-7586-4398)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`alimostafa19967777@gmail.com`