Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2025. Том 66, № 5

УДК 517.54

ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ. I

Д. А. Сбоев

Аннотация. Получено описание гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченный оператор композиции пространств Соболева, функции которых определены на метрических пространствах с мерой. В качестве следствия получена характеризация квазиконформных отображений в метрических пространствах с мерой.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.515

Ключевые слова: оператор композиции, метрическое пространство с мерой, пространство Соболева, $\mathscr{Q}_p$-гомеоморфизм, отображение с конечным искажением, квазиконформное отображение.

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

1. Введение

1.1. Данная работа посвящена описанию гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченный оператор композиции (оператор переноса) пространств Соболева, функции которых определены на метрических пространствах с мерой.

Пусть в метрических пространствах X и Y определены (полу)нормированные функциональные пространства $\mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{G}(Y)$. Тогда гомеоморфизм φ *индуцирует ограниченный оператор композиции* пространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, если для каждой функции $u \in \mathcal{G}(Y)$ композиция $\varphi^* u = u \circ \varphi : X \to \mathbb{R}$ корректно определена, $\varphi^* u \in \mathcal{F}(X)$ и имеет место неравенство

$$\|u \circ \varphi \mid \mathcal{F}(X)\| \leq \|\varphi^*\| \|u \mid \mathcal{G}(Y)\|.$$

1.2. Изложим кратко историю задачи описания операторов композиции пространств Соболева. В работе [1] С. Л. Соболев доказал, что квазиизометрии класса C^1 индуцируют изоморфизмы пространства Соболева L^1_p, $1 \leq p < \infty$, в $\mathbb{R}^n$ по правилу замены переменной. В конце работы Соболев высказывает предположение: « Весьма вероятно, что квазиизометрии — это все преобразования, сохраняющие L^1_p. Доказательство этого автору неизвестно». В 1961 г. В. Г. Мазья при изучении теорем вложения в кандидатской диссертации [2] доказал следующий критерий: *C^1-диффеоморфизм $\varphi : \Omega \to \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(\Omega') \to L^1_p(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty,$$

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-349 от 29.04.2025.

тогда и только тогда, когда существует такая константа K, что неравенство

$$|D\varphi(x)|^p \le K|\det D\varphi(x)|$$

выполнено для всех $x \in \Omega$. Из этого получаем, что при $p \neq n$ в классе C^1-диффеоморфизмов квазиизометрии и только они суть все преобразования, сохраняющие пространство L^1_p при замене переменной, а при $p = n$ — это квазиконформные гомеоморфизмы. Таким образом, гипотеза Соболева не подтверждается лишь при $p = n$.

В 1968 г. на первом Донецком коллоквиуме по теории квазиконформных отображений Ю. Г. Решетняк поставил вопрос: охарактеризовать все изоморфизмы пространств L^1_n, порожденных квазиконформными гомеоморфизмами. Окончательный ответ на этот вопрос был получен в 1975 г. в работе [3]: квазиконформные гомеоморфизмы индуцируют структурные изоморфизмы пространств L^1_n и, обратно, любой структурный изоморфизм T пространств L^1_n определяет квазиконформный гомеоморфизм φ такой, что $T = \varphi^*$. Вслед за этой работой были рассмотрены аналогичные вопросы для всей шкалы пространств L^1_p: при $p > n$ см. [4], при $p \in (n-1, n)$ см. [5] и при $p \in [1,\infty) \setminus \{n\}$ см. [6]. В 80-е гг. было инициировано изучение отображений, порождающих *ограниченные* операторы композиции пространств Соболева. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в [7, 8].

На текущий момент получены необходимые и достаточные условия на измеримые отображения, индуцирующие оператор композиции весовых пространств Соболева в евклидовом пространстве

$$\varphi^* : L^1_p(\Omega', v) \cap C^1(\Omega') \to L^1_q(\Omega, u)$$

при $1 \le q \le p < \infty$ (см. [9]). На группах Карно получены критерии для гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченный оператор композиции пространств Соболева с весовой функцией в образе

$$\varphi^* : L^1_p(\Omega', \omega) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega)$$

при $1 \le q \le p < \infty$ (см. [10]). В [11–13] получен критерий для гомеоморфизмов из области группы Карно (риманова многообразия) в метрическое пространство, индуцирующих ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_p(\Omega') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega)$$

при $1 \le q \le p \le \infty$.

1.3. В настоящей работе доказана следующая

Теорема. *Пусть X, Y — метрические пространства с мерой и $\varphi : X \to Y$ — гомеоморфизм. Отображение φ индуцирует ограниченный оператор композиции пространств Соболева*

$$\varphi^* : D^{1,p}(Y) \cap \mathrm{Lip}(Y) \to D^{1,p}(X), \quad 1 \le p < \infty,$$

по правилу $D^{1,p}(Y) \cap \mathrm{Lip}(Y) \ni u \mapsto \varphi^* u = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

(a) *φ принадлежит классу Решетняка $D^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X; Y)$,*

(b) *существует константа $K > 0$ такая, что*

$$|D_p\varphi|(x) \le K(\mathcal{J}\varphi(x))^{\frac{1}{p}} \quad \text{для } \mu\text{-п. в.} \quad x \in X, \tag{1}$$

причем норма операторной функции искажения $K_{p,p}(\cdot,\varphi)$ *в* $L^\infty(X)$ (*наименьшая константа* K *в неравенстве* (1)) *совпадает с* $\|\varphi^*\|$: $\|K_{p,p}(\cdot,\varphi) \mid L^\infty(X)\| = \|\varphi^*\|$.

Гомеоморфизмы, удовлетворяющие условиям (a), (b) теоремы 1.3, называют $\mathscr{Q}_p$*-гомеоморфизмами* ($\mathscr{Q}_{p,p}$*-гомеоморфизмами*).

Отметим, что в теореме 1.3 не требуется никаких дополнительных условий от гомеоморфизма и не требуется условий от пространств, кроме самых естественных: сепарабельность пространств и конечность меры ограниченных множеств, что контрастирует с работами [14, 15].

1.4. Опишем структуру работы.

Разд. 2 содержит предварительные сведения о метрических пространствах с мерой, геометрической теории меры, пространствах Соболева, отображениях класса Решетняка и отображениях с ограниченным искажением.

Разд. 3 содержит доказательство основного результата. Отличие от стандартного рассуждения — доказательство регулярности отображения. Оно идейно похоже на доказательство регулярности гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченный оператор композиции пространств BV (см. [16]): используя ограниченность оператора композиции, доказываем, что некоторый набор мер в образе обладает мажорантой, тогда супремум мер ограничен той же мажорантой; доказывается, что перенесенный в прообраз супремум мер (норма BV-производной отображения) — это не что иное, как мера $B \mapsto \int\limits_B |D\varphi|^p\,d\mu$. По всей видимости, некоторые аналогии уже возникали при доказательстве регулярности отображений, индуцирующих ограниченный оператор композиции пространств Соболева на группах Карно (см. [17]). Отметим также лемму 3.3, изначально доказанную в работе [11] в случае, когда отображение действует из группы Карно в метрическое пространство. Эта лемма позволяет получить точное значение нормы оператора композиции (см. [11–13] и настоящую работу).

Разд. 4 содержит некоторые результаты о квазиконформных отображениях в метрических пространствах с мерой: установлена взаимосвязь между квазиконформными гомеоморфизмами и гомеоморфизмами, индуцирующими ограниченный оператор композиции пространств Соболева $D^{1,Q}$.

1.5. Данная работа — первая из цикла. В следующей доказан критерий ограниченности оператора композиции пространств Соболева

$$\varphi^* : D^{1,p}(Y) \cap \mathrm{Lip}(Y) \to D^{1,q}(X), \quad 1 \le q < p < \infty.$$

2. Предварительные сведения

Символом C обозначаем константу, значение которой может изменяться контролируемым образом при каждом переходе. Совокупность всех подмножеств множества X обозначается символом $\mathscr{P}(X)$. Под словом мера имеется в виду внешняя мера, т. е. функция множеств $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ такая, что $\mu(\varnothing) = 0$ и μ счетно субаддитивна. Под измеримостью понимается измеримость по Каратеодори. Как обычно, область — открытое связное множество.

Мера μ в метрическом пространстве (X, d_X) называется *мерой Бореля*, если любое множество B из борелевской σ-алгебры $\mathscr{B}(X)$ — μ-измеримое множество. Мера μ на X называется *регулярной мерой Бореля*, если μ — мера Бореля и для любого множества $A \subset X$ существует множество $B \in \mathscr{B}(X)$ такое, что $A \subset B$ и $\mu(B) = \mu(A)$. Мера μ называется *нетривиальной*, если $\mu(X) > 0$, мера μ

называется *конечной на ограниченных множествах*, если $\mu(B) < \infty$ для любого шара $B \subset X$.

В настоящей работе *метрическое пространство с мерой* — тройка (X, d_X, μ), где (X, d_X) — сепарабельное метрическое пространство и μ — нетривиальная и конечная на ограниченных множествах регулярная мера Бореля на X. Из определения следует, что метрическое пространство с мерой σ-конечно.

Максимум a и b обозначается символом $a \vee b$, минимум — $a \wedge b$. Символом χ_A обозначаем характеристическую функцию множества A. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ обозначается через $\mathscr{L}^n$.

Метрические пространства с мерой.

2.1. Лекции [18] содержат введение в анализ на метрических пространствах.

Пусть (X, d_X, μ), (Y, d_Y, ν) — метрические пространства с мерой. Символом $B_X(x,r)$ обозначаем открытый шар в X, т. е. $B_X(x,r) = \{x' \in X \mid d_X(x,x') < r\}$, и через $\overline{B}_X(x,r)$ — замкнутый шар, т. е. $\overline{B}_X(x,r) = \{x' \in X \mid d_X(x,x') \leq r\}$. Отметим, что всегда имеет место включение $\operatorname{cl} B_X(x,r) \subset \overline{B}_X(x,r)$, где $\operatorname{cl} B_X(x,r)$ — замыкание шара $B_X(x,r)$.

Пространства $L^p(E,\mu)$, где $E \subset X$ — измеримое множество и $1 \leq p \leq \infty$, определяются стандартным образом. Символом $\operatorname{Lip}(Y)$ будем обозначать все липшицевы функции $u : Y \to \mathbb{R}$, а через 1-$\operatorname{Lip}(Y)$ — липшицевы функции с константой Липшица, не превосходящей единицы.

Сформулируем свойство регулярных мер Бореля.

2.2. Лемма. *Пусть μ — регулярная мера Бореля на метрическом пространстве (X, d_X). Тогда для любого μ-измеримого множества $A \subset X$ имеет место равенство*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset A,\ C \subset X \text{ — замкнутое множество}\},$$

если $B \subset X$ — произвольное множество, то

$$\mu(B) = \inf\{\mu(O) \mid B \subset O,\ O \subset X \text{ — открытое множество}\}.$$

Доказательство леммы 2.2 можно найти, например, в [19, 20].

2.3. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, определенной на σ-алгебре $\mathcal{A}$, и $(Y, \mathcal{A}', \nu)$ — другое пространство с мерой. Если $\varphi : X \to Y$ — измеримое отображение между этими пространствами, т. е. $\varphi^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ для всех $A' \in \mathcal{A}'$, то определим *перенос меры* (push-forward) μ посредством φ по формуле

$$(\mu \circ \varphi^{-1})(A') = \mu(\varphi^{-1}(A')), \quad A' \in \mathcal{A}'.$$

Свойства данной операции описаны, например, в [21, § 3.6].

Супремум мер Бореля.

2.4. Пусть ν_1 и ν_2 — внешние меры в X. Определим *максимум* $\nu_1 \vee \nu_2$ формулой

$$(\nu_1 \vee \nu_2)(A) = \sup\{\nu_1(A_1) + \nu_2(A_2)\},$$

где $A \subset X$ и супремум берется по всем разбиениям $A = A_1 \cup A_2$. Понятно, что выполняются оценки

$$\nu_i(A) \leq (\nu_1 \vee \nu_2)(A) \leq \nu_1(A) + \nu_2(A)$$

для всех множеств $A \subset X$, где $i = 1, 2$.

Следующие свойства данной операции вытекают из определений.

Предложение. *Пусть* ν_1, ν_2 *— внешние меры в* X. *Тогда*
(a) $\nu_1 \vee \nu_2$ *— внешняя мера,*
(b) *если* ν_1, ν_2 *суть меры Бореля, то* $\nu_1 \vee \nu_2$ *— мера Бореля.*

2.5. Пусть $\nu_1, \nu_2, \dots$ — последовательность внешних мер в X. Определим супремум последовательности мер формулой

$$\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \nu_n\right)(A) = \lim_{n\to\infty} (\nu_1 \vee \dots \vee \nu_n)(A), \quad \text{где } A \subset X.$$

В силу монотонности последовательности $(\nu_1 \vee \dots \vee \nu_n)(A)$ супремум счетного набора мер эквивалентно можно определить следующим равенством:

$$\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \nu_n\right)(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\nu_1 \vee \dots \vee \nu_n)(A), \quad \text{где } A \subset X.$$

При помощи предложения 2.4 получаем следующее утверждение.

Предложение. *Пусть* $\nu_1, \nu_2, \dots$ *— последовательность внешних мер в* X. *Тогда*
(a) $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n$ *— внешняя мера,*
(b) *если каждая мера* ν_i, $i \in \mathbb{N}$, *— борелевская мера, то* $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n$ *— мера Бореля,*
(c) *если для каждого* $n = 1, 2, \dots$ *выполняется неравенство* $\nu_i(A) \leq \nu(A)$, *где* ν *— некоторая внешняя мера и* $A \subset X$ *— произвольное подмножество, то выполняется неравенство*

$$\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} \nu_n\right)(A) \leq \nu(A).$$

2.6. Замечание. Пусть $\{\nu \mid \nu \in \mathcal{F}\}$ — произвольное семейство мер в X. Супремум такого семейства определяется формулой

$$\left(\bigvee_{\nu\in\mathcal{F}} \nu\right)(A) = \sup \left(\bigvee_{\lambda\in\mathcal{C}} \lambda\right)(A), \quad A \subset X,$$

где точная верхняя грань берется по всем счетным подсемействам $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

Предложение 2.5 имеет место и для супремума произвольного семейства мер.

Сингулярные меры.

2.7. Говорят, что мера λ, определенная на пространстве $(X, \mathscr{B}(X))$, *сконцентрирована на множестве* B, если $\lambda(E) = \lambda(B \cap E)$ для всех $E \in \mathscr{B}(X)$. Это условие эквивалентно следующему: $\lambda(E) = 0$, если $B \cap E = \varnothing$, $E \in \mathscr{B}(X)$.

Мера λ на пространстве с мерой $(X, \mathscr{B}(X), \mu)$ называется *сингулярной относительно меры* μ, если существуют борелевские дизъюнктные множества $A, B \subset X$ такие, что μ сконцентрирована на A, λ сконцентрирована на B. Из определения следует, что $\mu(B) = 0$, где B — множество, на котором сконцентрирована мера λ.

Якобиан гомеоморфизма. Формула площади. В данном пункте введем якобиан гомеоморфизма $\varphi : X \to Y$, который может не обладать $\mathcal{N}$-свойством Лузина[1)]. Данный подход будет основан на теореме Радона — Никодима. Отметим также работу [22], где была получена формула площади для непрерывных отображений (необязательно гомеоморфизмов) с $\mathcal{N}$-свойством Лузина между метрическими пространствами с мерой.

2.8. Пусть $\varphi : X \to Y$ — гомеоморфизм. Рассмотрим меру $\nu\circ\varphi$ на σ-алгебре борелевских множеств $\mathscr{B}(X)$, заданную формулой $(\nu \circ \varphi)(B) = \nu(\varphi(B))$ для любого борелевского $B \subset X$. Мера $\nu \circ \varphi$ σ-конечна, так как Y — пространство с σ-конечной мерой ν и φ — гомеоморфизм.

Применим теорему Радона — Никодима (см. [21, теоремы 3.2.2 и 3.2.3]): существуют борелевская локально интегрируемая функция $\frac{d(\nu\circ\varphi)}{d\mu}$ и борелевская мера Φ^s, сингулярная относительно μ, такие, что равенство

$$\nu(\varphi(B)) = (\nu \circ \varphi)(B) = \int\limits_B \frac{d(\nu \circ \varphi)}{d\mu}\, d\mu + \Phi^s(B)$$

выполнено для любого борелевского множества $B \subset X$. Далее функцию $\frac{d(\nu\circ\varphi)}{d\mu}$ будем обозначать символом $\mathcal{J}\varphi$.

Отметим, если в (X, d_X, μ) мера μ обладает свойством локального асимптотического удвоения для замкнутых шаров, то имеет место равенство

$$\mathcal{J}\varphi(x) = \lim_{\substack{\overline{B}_X(x',r)\ni x,\\ r\to 0+}} \frac{\nu(\varphi(\overline{B}_X(x',r)))}{\mu(\overline{B}_X(x',r))} \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } x \in X.$$

Подробнее см. [19, теоремы 2.9.2, 2.9.7].

2.9. Таким образом, приходим к разложению $X = Z_\varphi \cup \Sigma_\varphi \cup X_{\mathrm{r}}$, где Z_φ — множество нулей якобиана $\mathcal{J}\varphi$ и Σ_φ — множество сингулярности φ (множество концентрации меры Φ^s, см. § 2.7), $X_r = X \setminus (Z_\varphi \cup \Sigma_\varphi)$. Заметим, что вне множества Σ_φ гомеоморфизм φ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина, так как $\Phi^s = 0$ вне Σ_φ. Аналогичное разложение Y можно написать для обратного отображения φ^{-1}: $Y = Z_{\varphi^{-1}} \cup \Sigma_{\varphi^{-1}} \cup Y_{\mathrm{r}}$.

Покажем, что $\varphi(\Sigma_\varphi) \subset Z_{\varphi^{-1}}$ с точностью до множества ν-меры нуль. Используя свойство $\mu(\Sigma_\varphi) = 0$, выводим

$$\int\limits_{\varphi(\Sigma_\varphi)} \mathcal{J}\varphi^{-1}\, d\nu \le \mu(\Sigma_\varphi) = 0,$$

поэтому $\varphi(\Sigma_\varphi) \subset Z_{\varphi^{-1}}$ с точностью до множества ν-меры нуль. Аналогично можно показать, что $\varphi(Z_\varphi) \subset \Sigma_{\varphi^{-1}}$ с точностью до множества ν-меры нуль. Поэтому, удаляя из $Z_{\varphi^{-1}}$ и $\Sigma_{\varphi^{-1}}$ борелевские подмножества ν-меры нуль, можно считать, что имеют место разложения пространств на борелевские множества $X = Z_\varphi \cup \Sigma_\varphi \cup X_{\mathrm{r}}$ и $Y = Z_{\varphi^{-1}} \cup \Sigma_{\varphi^{-1}} \cup Y_{\mathrm{r}}$, причем $\varphi(\Sigma_\varphi) = Z_{\varphi^{-1}}$ и $\varphi(Z_\varphi) = \Sigma_{\varphi^{-1}}$.

2.10. Итак, получаем *формулу площади* для гомеоморфизма φ:

$$\int\limits_E \mathcal{J}\varphi\, d\mu = \nu(\varphi(E))$$

[1)] Отображение φ обладает *$\mathcal{N}$-свойством Лузина*, если образ множества нулевой μ-меры имеет ν-меру нуль.

для всех борелевских множеств $E \subset X \setminus \Sigma_\varphi$.

Рассуждая аналогично [19, теорема 3.2.5], приходим к формуле замены переменной в интеграле Лебега.

Предложение. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — гомеоморфизм, $u : Y \to \mathbb{R}$ — неотрицательная измеримая функция. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_A u(\varphi(x))\mathcal{J}\varphi(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{\varphi(A)} u(y)\,d\nu(y)$$

для любого измеримого множества $A \subset X \setminus \Sigma_\varphi$.

Модуль семейства кривых.

2.11. Пусть $\mathfrak{M}(X)$ — семейство всех непостоянных спрямляемых кривых в X. В некоторых случаях множество $\mathfrak{M}(X)$ может быть пустым: например, если X — канторово множество $C(\lambda)$, $0 < \lambda < 1/2$, или любое вполне несвязное множество; кривая Коха $\mathcal{K}$ или любое пространство типа снежинки[2)].

Для подсемейства $\Gamma \subset \mathfrak{M}(X)$ обозначим символом $F(\Gamma)$ все борелевские функции $\varrho : X \to [0,\infty]$ такие, что

$$\int\limits_\gamma \varrho\,ds \geq 1 \quad \text{для всех } \gamma \in \Gamma.$$

Интеграл $\int_\gamma \varrho\,ds$ понимается в следующем смысле: пусть $\widetilde{\gamma}$ — натуральная параметризация γ и $l(\gamma)$ — длина кривой, тогда полагаем

$$\int\limits_\gamma \varrho\,ds = \int\limits_0^{l(\gamma)} \varrho(\widetilde{\gamma}(t))\,dt.$$

Для каждого $1 \leq p < \infty$ определим p-модуль семейства кривых Γ формулой

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in F(\Gamma)} \int\limits_X \varrho^p\,d\mu.$$

Если множество функций $F(\Gamma)$ пусто, то полагаем $M_p(\Gamma) = +\infty$.

Будем говорить, что некоторое свойство *выполняется для M_p-п. в. кривых*, если это свойство выполняется для всех кривых $\gamma \in \mathfrak{M}(X) \setminus \Gamma$, где $M_p(\Gamma) = 0$.

Сформулируем свойства p-модуля семейств кривых. Доказательства этих свойств можно найти, например, в [18, 20; 23, § 5].

2.12 Лемма. *Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

(a) *M_p — внешняя мера на $\mathfrak{M}(X)$,*

(b) *если $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathfrak{M}(X)$ и любая кривая из Γ_1 содержит подкривую из Γ_2, то $M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2)$,*

(c) *пусть $\Gamma \subset \mathfrak{M}(X)$, тогда $M_p(\Gamma) = 0$ в том и только в том случае, если существует неотрицательная борелевская функция $\varrho \in L^p(X)$ такая, что*

$$\int\limits_\gamma \varrho\,ds = +\infty \quad \text{для всех } \gamma \in \Gamma.$$

[2)] Метрическое пространство (X,d) называется *пространством типа снежинки* (snowflake space), если некоторая степень метрики $d^{1+\varepsilon}$ — снова метрика.

Верхний градиент.

2.13. Пусть $u : X \to \mathbb{R}$ — функция. Борелевская функция $g : X \to [0, +\infty]$ называется *верхним градиентом* для u, если

$$|u(x) - u(y)| \leq \int\limits_{\gamma} g\, ds \tag{2}$$

для всех спрямляемых кривых $\gamma \in \mathfrak{M}(X)$ с концевыми точками $x, y \in X$. Функция g называется *p-слабым верхним градиентом*, если (2) выполняется для M_p-п. в. кривых $\gamma \in \mathfrak{M}(X)$, соединяющих точки x и y.

Если $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и Ω — открытое подмножество X, то функция g называется верхним градиентом для u в Ω, если g — верхний градиент для u в метрическом пространстве с мерой $(\Omega, d_X|(\Omega \times \Omega), \mu_\Omega)$, где $\mu_\Omega(A) = \mu(\Omega \cap A)$ для любого множества $A \subset X$ (см., например, [20, лемма 3.3.11]). Аналогично определяется p-слабый верхний градиент в $\Omega \subset X$.

Доказательство следующей леммы приведено, например, в [23, лемма 6.7].

2.14. Лемма. *Если u — липшицева функция, то*

$$\operatorname{lip} u(x) = \varliminf_{r \to 0+} \frac{L(x, u, r)}{r} \text{ — верхний градиент для } u,$$

где $L(x, u, r) = \sup\{|u(x) - u(y)| \mid d_X(x, y) \leq r\}$ для $r > 0$.

В частности, из леммы 2.14 следует, что носитель верхнего градиента липшицевой функции содержится в носителе самой функции.

Пространства Соболева. Пусть $1 \leq p < \infty$. Пространство Соболева $D^{1,p}(\Omega)$, где Ω — открытое множество в X, состоит из измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, обладающих p-слабым верхним градиентом класса $L^p(\Omega, \mu)$ в Ω.

В случае $(X, d_X, \mu) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|, \mathscr{L}^n)$ пространство $D^{1,p}(\Omega)$ совпадает с пространством $L^{1,p}(\Omega)$ на открытых множествах Ω (пространство $L^{1,p}(\Omega)$ состоит из локально интегрируемых функций, обладающих производными в смысле Соболева класса L^p), см., например, [20, предложение 7.1.2]. Равенство $D^{1,p}(\Omega) = L^{1,p}(\Omega)$ основывается на локальном неравенстве Пуанкаре, поэтому оно верно также и на группах Карно, и на римановых многообразиях.

2.15. В силу [20, теорема 6.3.20] существует единственный p-слабый верхний градиент для функции $u \in D^{1,p}(X)$, $1 \leq p < \infty$, с минимальной L^p-нормой, который далее обозначаем символом $|\nabla_p u|$. В пространстве $D^{1,p}$ вводится полунорма по формуле

$$\|u \mid D^{1,p}(X)\| = \inf_{g_u} \|g_u \mid L^p(X)\| = \||\nabla_p u| \mid L^p(X)\|,$$

где инфимум берется по всем верхним градиентам g_u для u.

Пространство $D^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X)$ состоит из измеримых функций $u : X \to \mathbb{R}$ таких, что для любой точки $x \in X$ существует окрестность U_x точки x такая, что $u \in D^{1,p}(U_x)$. Пространство $N^{1,p}(X)$ состоит из всех функций $u \in L^p(X) \cap D^{1,p}(X)$.

2.16. Может случиться так, что $\mathfrak{M}(X) = \varnothing$ (например, X вполне несвязно или X — пространство типа снежинки) и, следовательно, пространство $D^{1,p}(X)$ тривиально (совпадает с пространством измеримых функций). Приведем достаточное условие нетривиальности $D^{1,p}(X)$. В силу [20, предложение 7.1.33] пространство $N^{1,p}(X)$ нетривиально (т. е. не совпадает с $L^p(X, \mu)$) тогда и только тогда, когда $M_p(X) \neq 0$. Значит, если $M_p(X) \neq 0$, то и пространство $D^{1,p}(X)$ нетривиально.

2.17. Сформулируем следующее свойство функций из пространства $D^{1,p}(X)$.

Лемма. *Пусть $1 \leq p < \infty$. Если $u_i \in D^{1,p}(X)$ для $i = 1, 2$, то $u_1 \vee u_2, u_1 \wedge u_2 \in D^{1,p}(X)$ и для μ-п. в. $x \in X$ выполняются равенства*

$$|\nabla_p(u_1 \vee u_2)| = |\nabla_p u_1| \cdot \chi_{\{u_1 \geq u_2\}} + |\nabla_p u_2| \cdot \chi_{\{u_2 > u_1\}},$$
$$|\nabla_p(u_1 \wedge u_2)| = |\nabla_p u_1| \cdot \chi_{\{u_1 \leq u_2\}} + |\nabla_p u_2| \cdot \chi_{\{u_2 < u_1\}}.$$

2.18. Из леммы 2.14 выводим следующее

Предложение. *Пусть $1 \leq p < \infty$. Если $u_i \in D^{1,p}(X) \cap \mathrm{Lip}(X)$ для $i = 1, 2$, причем $u_1 = u_2$ на открытом множестве $U \subset X$, то $|\nabla_p u_1| = |\nabla_p u_2|$ μ-п. в. в U.*

2.19. Отметим также следующие работы о пространствах Соболева на метрических пространствах с мерой: в [23] описаны различные подходы к определению пространств Соболева; в [24] доказана эквивалентность некоторых определений при минимальных ограничениях на пространства.

Отображения класса Решетняка.

Следующее определение в случае отображений из евклидова пространства в метрическое первоначально было введено в работе [25].

2.20. Определение. Пусть (X, d_X, μ) — метрическое пространство с мерой, (Y, d_Y) — метрическое пространство. Измеримое отображение $\varphi : X \to Y$ *принадлежит классу Решетняка* $D^{1,p}(X;Y)$, $1 \leq p < \infty$, если существует функция $w \in L^p(X)$ такая, что для любой функции $u_z(y) = d(y,z)$, $z \in Y$, композиция $[\varphi]_z = u_z \circ \varphi$ принадлежит пространству $D^{1,p}(X)$ и выполняется поточечное соотношение

$$|\nabla_p[\varphi]_z| \leq w \quad \mu\text{-п. в. в } X. \tag{3}$$

Измеримое отображение φ *принадлежит классу Решетняка* $D^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X;Y)$, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность U_x в X такая, что $\varphi \in D^{1,p}(U_x;Y)$.

Воспользуемся результатами теории K-пространств, чтобы показать, что существует верхняя огибающая семейства функций $|\nabla_p[\varphi]_z|$, $z \in Y$. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство функций в L^p, функция $w \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, называется *мажорантой* множества $\mathcal{F}$, если $|f| \leq w$ п. в. для всех $f \in \mathcal{F}$. Семейство $\mathcal{F}$ называется *о-ограниченным* в L^p, если существует хотя бы одна мажоранта класса L^p. Символом $V_p(\mathcal{F})$ будем обозначать совокупность всех мажорант класса L^p семейства $\mathcal{F}$. Так как L^p — K-пространство[3)] (см. [26, гл. VI (2.6)]), существует наименьший элемент $\sup \mathcal{F}$ множества $V_p(\mathcal{F})$ в смысле естественного порядка в L^p.

Пусть $\varphi \in D^{1,p}(X;Y)$, тогда семейство функций $\mathcal{F} = \{|\nabla_p[\varphi]_z| \mid z \in Y\}$ o-ограничено в $L^p(\Omega)$. Отсюда выводим, что существует единственная верхняя огибающая семейства $\mathcal{F}$, которую будем обозначать символом $|D_p\varphi|$. Отметим, что это рассуждение впервые было приведено в [25, § 1.4] для отображений из евклидова пространства в метрическое.

Отметим, что в случае $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ с евклидовыми расстояниями и мерами Лебега класс Решетняка $D^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ совпадает со стандартным пространством Соболева $L^{1,p}_{\mathrm{loc}}$.

[3)] Пусть в векторном пространстве X над полем $\mathbb{R}$ для некоторых элементов определено отношение $x > 0_X$. Если это отношение удовлетворяет свойствам (a) соотношение $x > 0_X$ исключает $x = 0_X$, (b) из $x > 0_X$, $y > 0_X$ следует $x + y > 0_X$, (c) для любого $x \in X$ существует элемент $y \geq 0$ такой, что $y \geq x$, (d) если $x > 0_X$ и $\alpha > 0$, то $\alpha x > 0_X$, (e) для всякого ограниченного сверху множества $E \subset X$ существует верхняя грань $\sup E$, то говорят, что X — *K-пространство.*

2.21. Предложение. *Пусть (X, d_X, μ) — метрическое пространство с мерой, (Y, d_Y) — сепарабельное метрическое пространство, $\varphi : X \to Y$ — измеримое отображение и $1 \le p < \infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\varphi \in D^{1,p}(X; Y)$,

(b) *существует такая борелевская функция $w \in L^p(X)$, что для любого счетного всюду плотного в Y подмножества $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ функции $[\varphi]_{z_j}$ принадлежат $D^{1,p}(X)$ и выполняется поточечная оценка*

$$|\nabla_p[\varphi]_{z_j}| \le w \quad \mu\text{-п. в. в } X,$$

(c) *существует борелевская функция $\overline{w} \in L^p(X)$ такая, что*

$$d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \le \int\limits_\gamma \overline{w}\, ds$$

для M_p-п. в. кривых $\gamma \in \mathfrak{M}(X)$ с концевыми точками $x, x' \in X$.

(d) *существует такая борелевская функция $\widehat{w} \in L^p(X)$, что для любой $u \in$ 1-Lip(Y) композиция $u \circ \varphi$ принадлежит $D^{1,p}(X)$ и выполняется поточечная оценка*

$$|\nabla_p(u \circ \varphi)| \le \widehat{w} \quad \mu\text{-п. в. в } X.$$

При этом наименьшие функции w, $\overline{w}$ и $\widehat{w}$ μ-п. в. совпадают с $|D_p\varphi|$.

Доказательство. Импликации из (a) в (b), из (d) в (a), из (c) в (d) очевидны. Покажем, что из (b) следует (c). Пусть Γ_j — семейство кривых нулевого p-модуля такое, что

$$|d_Y(z_j, \varphi(x)) - d_Y(z_j, \varphi(x'))| \le \int\limits_\gamma w\, ds \tag{4}$$

для всех кривых $\gamma \in \mathfrak{M}\backslash\Gamma_j$ с концевыми точками x, x'. Множество $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ всюду плотно в Y, следовательно, для некоторой последовательности $(z_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ имеет место сходимость $d_Y(z_{j_k}, \varphi(x)) \to 0$ при $k \to \infty$. Подставляя z_{j_k} в неравенство (4) и устремляя $k \to \infty$, выводим

$$d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \le \int\limits_\gamma w\, ds$$

для всех кривых $\gamma \in \mathfrak{M} \setminus \Gamma$, где $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$, с концевыми точками x, x'. $\square$

2.22. Пусть φ — борелевское отображение класса $D^{1,p}(X; Y)$. Допустим, что неравенство

$$d_Y(\varphi(\gamma(a)), \varphi(\gamma(b))) \le \int\limits_\gamma g_\varphi\, ds \tag{5}$$

выполняется для кривой $\gamma : [a, b] \to X$ и любой ее подкривой.

Тогда из (5) следует, что $\varphi \circ \widetilde{\gamma} : [0, l(\gamma)] \to Y$ — абсолютно непрерывная кривая. Здесь $\widetilde{\gamma}$ — натуральная параметризация кривой γ. Из (5) также выводим неравенство

$$\lim_{t'\to t} \frac{l((\varphi \circ \widetilde{\gamma})|[t, t'])}{t' - t} = |(\varphi \circ \widetilde{\gamma})'(t)| \le g_\varphi(\widetilde{\gamma}(t)) \quad \mathscr{L}^1\text{-п. в. в } [0, l(\gamma)]. \tag{6}$$

Поэтому если φ — отображение класса $D^{1,p}(X;Y)$, то образ M_p-почти каждой кривой $\gamma \in \mathfrak{M}(X)$ — абсолютно непрерывная кривая. Действительно, если $\Gamma_0 \subset \mathfrak{M}(X)$ — семейство кривых, для которых неверно неравенство (5), то $M_p(\Gamma_0) = 0$. Пусть $\Gamma \subset \mathfrak{M}(X)$ — семейство кривых таких, что существует подкривая из Γ_0, тогда в силу леммы 2.12 имеет место равенство $M_p(\Gamma) = 0$.

Пусть $\gamma \in \mathfrak{M}(X) \setminus \Gamma$. Тогда для γ выполняется неравенство (6) и, следовательно, для любой неотрицательной борелевской функции $\varrho : X \to \mathbb{R}$ верно

$$\int\limits_{\varphi\circ\gamma} \varrho\, ds = \int\limits_0^{l(\gamma)} \varrho(\varphi\circ\widetilde{\gamma}(t))|(\varphi\circ\widetilde{\gamma})'(t)|\, dt \le \int\limits_0^{l(\gamma)} \varrho(\varphi\circ\widetilde{\gamma}(t))g_\varphi(\widetilde{\gamma}(t))\, dt = \int\limits_\gamma (\varrho\circ\varphi)g_\varphi\, ds. \tag{7}$$

Эти наблюдения лежат в основе следующего предложения.

Предложение. *Пусть $u : Y \to \mathbb{R}$ — липшицева функция, $\varphi : X \to Y$ — измеримое отображение класса Решетняка $D^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X;Y)$. Тогда композиция $u\circ\varphi$ — функция из пространства $D^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X)$ и выполняется оценка*

$$|\nabla_p(u\circ\varphi)|(x) \le |\nabla_p u|(\varphi(x))|D_p\varphi|(x) \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } x \in X.$$

Доказательство. Изменяя отображение φ на множестве меры нуль, можем считать, что φ — борелевское отображение. Измеримость композиции проверяется непосредственно. Покажем, что

$$|\nabla_p(u\circ\varphi)|(x) \le |\nabla_p u|(\varphi(x))|D_p\varphi|(x) \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } x \in X.$$

Пусть Γ_u — семейство кривых p-модуля нуль, для которых не выполняется неравенство

$$|u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))| \le \int\limits_\gamma |\nabla_p u|\, ds.$$

Пусть также Γ_φ — семейство кривых p-модуля нуль, для которых существует такая подкривая γ, что не выполняется следующее неравенство:

$$d_Y(\varphi(\gamma(b)), \varphi(\gamma(a))) \le \int\limits_\gamma |D_p\varphi|\, ds.$$

Пусть $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\varphi$, тогда $M_p(\Gamma) = 0$ и для $\gamma \in \mathfrak{M}(X) \setminus \Gamma$ выводим

$$|u(\varphi(\gamma(b))) - u(\varphi(\gamma(a)))| \le \int\limits_{\varphi\circ\gamma} |\nabla_p u|\, ds \le \int\limits_\gamma |\nabla_p u|(\varphi(s))|D_p\varphi|(s)\, ds,$$

где последнее неравенство верно в силу (7). В силу леммы 2.14 функция $|\nabla_p u|$ ограничена и $|D_p\varphi| \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$, поэтому композиция $u\circ\varphi$ принадлежит пространству $D^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X)$. $\square$

Отображения с конечным искажением. Функция искажения. Пусть $\varphi : X \to Y$ — гомеоморфизм класса Решетняка $D^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X;Y)$, $1 \le q < \infty$.

2.23. Определение. Гомеоморфизм φ называется *отображением с конечным искажением*, если

$$|D_q\varphi|(x) = 0 \quad \text{для } \mu\text{-п. в.} \quad x \in Z_\varphi = \{x' \in X \mid \mathcal{J}\varphi(x') = 0\}.$$

Введем также операторную функцию искажения.

2.24. Определение. Пусть $\varphi : X \to Y$ — гомеоморфизм класса $D^{1,q}_{\mathrm{loc}}(X;Y)$, $1 \le q < \infty$, с конечным искажением. *Операторная функция искажения* $K_{q,p}(\cdot,\varphi)$ определяется по формуле

$$K_{q,p}(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|D_q\varphi|(x)}{(\mathcal{J}\varphi(x))^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \mathcal{J}\varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что в силу конечности искажения φ функция $K_{q,p}(\cdot,\varphi)$ корректно определена.

3. Доказательство основного результата

Напомним предположения о пространствах: (X, d_X, μ) и (Y, d_Y, ν) — метрические пространства с мерой, т. е. это сепарабельные пространства с нетривиальными регулярными мерами Бореля и меры μ, ν конечны на ограниченных множествах.

3.1. Теорема. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — гомеоморфизм. Отображение φ индуцирует ограниченный оператор композиции пространств Соболева*

$$\varphi^* : D^{1,p}(Y) \cap \mathrm{Lip}(Y) \to D^{1,p}(X), \quad 1 \le p < \infty,$$

по правилу $D^{1,p}(Y) \cap \mathrm{Lip}(Y) \ni u \mapsto \varphi^* u = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

(a) *φ принадлежит классу Решетняка $D^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X;Y)$,*

(b) *существует константа $K > 0$ такая, что*

$$|D_p\varphi|(x) \le K(\mathcal{J}\varphi(x))^{\frac{1}{p}} \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } x \in X.$$

При этом норма операторной функции искажения $K_{p,p}(\cdot,\varphi)$ в $L^\infty(X)$ совпадает с $\|\varphi^*\|$.

3.2. Замечание. Может случиться так, что $\mathfrak{M}(X) = \varnothing$. В таком случае задача вырождается: любой гомеоморфизм будет индуцировать ограниченный оператор композиции пространств $D^{1,p}$.

Доказательство необходимости в теореме 3.1. Пусть $z \in Y$, $r > 0$. Введем функцию $u_{z,r}(y) = (r - d_Y(y,z)) \vee 0$. Понятно, что $u_{z,r} \in 1\text{-}\mathrm{Lip}(Y) \cap D^{1,p}(Y)$. Положим

$$\mathcal{F}(Y) = \{u_{z,r} \mid z \in Y,\ r > 0\}.$$

Пусть $U \subset Y$ — открытое множество конечной меры и $u \in 1\text{-}\mathrm{Lip}(Y)$ — некоторая функция с носителем $\operatorname{supp} u \subset U$, причем $\operatorname{dist}_X(\operatorname{supp} u, X \setminus U) > 0$.

Тогда в силу ограниченности оператора композиции выполнены оценки

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(U)} |\nabla_p(u \circ \varphi)|^p \, d\mu \le \|\varphi^*\|^p \int\limits_{Y} |\nabla_p u|^p \, d\nu \le \|\varphi^*\|^p \nu(U). \tag{8}$$

3.3. Покажем, как распространить неравенство (8) на произвольную липшицеву функцию с константой Липшица не больше единицы. Этот метод изначально появился в [11, лемма 4.2] для измеримых отображений, определенных на областях групп Карно со значениями в метрическом пространстве (лемма С. В. Павлова). Незначительная модификация аргументов этой леммы позволяет распространить ее на метрические пространства с мерой.

Если $U \subset Y$ — открытое подмножество в (Y, d_Y), то символом $\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(U)$ будем обозначать липшицевы функции u такие, что $\operatorname{dist}_Y(\operatorname{supp} u, Y \setminus U) > 0$.

Лемма. *Пусть (X, d_X, μ) — метрическое пространство с мерой, (Y, d_Y) — метрическое пространство и $1 \leq q < p = \infty$. Пусть также $\varphi : X \to Y$ — измеримое отображение, $U \subset Y$ — открытое подмножество, $A > 0$ — некоторая константа.*

Допустим, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{\operatorname{Lip}}(U)$ композиция $u \circ \varphi$ принадлежит пространству $D^{1,q}(X)$ и выполнено неравенство

$$\Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(U)} |\nabla_q(u \circ \varphi)|^q \, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}} \leq A \operatorname{Lip}(u; U), \tag{9}$$

где $\operatorname{Lip}(u;U) = \sup\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{d_Y(x,y)} \mid x \neq y,\ x, y \in U\right\}$.

Тогда неравенство (9) *выполнено для любой функции $u \in \operatorname{Lip}(Y)$, как только $u \circ \varphi \in D^{1,q}(X)$.*

Доказательство леммы 3.3. Допустим, что функция $u \in \operatorname{Lip}(Y)$ ограничена: $|u| \leq N$. Определим функцию R_N на отрезке $[-N, N]$ формулой

$$R_N(x) = \begin{cases} N - x, & \text{если } x > \frac{N}{2}, \\ x, & \text{если } -\frac{N}{2} \leq x \leq \frac{N}{2}, \\ -N - x, & \text{если } x < -\frac{N}{2}. \end{cases}$$

Тогда если $u \in \operatorname{Lip}(Y)$, $|u| \leq N$, то $R_N \circ u \in \operatorname{Lip}(Y)$ и $|R_N \circ u| \leq \frac{N}{2}$. Более того, имеет место неравенство $\operatorname{Lip}(R_N \circ u; U) \leq \operatorname{Lip}(u; U)$.

Положим $U_{-\delta} = \{y \in Y \mid d_Y(y, Y \setminus U) > \delta\}$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\overline{\delta} > 0$ такое, что

$$\Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(U)} |\nabla_q(u \circ \varphi)|^q \, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}} - \varepsilon \leq \Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(U_{-2\overline{\delta}})} |\nabla_q(u \circ \varphi)|^q \, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(U_{-2\overline{\delta}})} |\nabla_q(R_N \circ u \circ \varphi)|^q \, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}} = \Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(U_{-2\overline{\delta}})} |\nabla_q(R_{\frac{N}{2}} \circ R_N \circ u \circ \varphi)|^q \, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}} = \dots .$$

Число композиций с соответствующими R_N выбирается так, чтобы итоговая функция $v = R_{\frac{N}{2^k}} \circ \dots \circ R_N \circ u \circ \varphi$ удовлетворяла неравенству $|v| \leq \overline{\delta}$.

Определим функцию u_1 по формуле

$$u_1(y) = \begin{cases} v(y), & \text{если } y \in U_{-2\overline{\delta}}, \\ 0, & \text{если } y \in Y \setminus U_{-\overline{\delta}}. \end{cases}$$

Тогда u_1 — липшицева функция с константой Липшица не больше единицы, определенная на $U_{-2\overline{\delta}} \cup (Y \setminus U_{-\overline{\delta}})$. Продолжим u_1 до липшицевой функции $\overline{u}$, заданной на всем Y (см., например, [19, 2.10.44]).

Тогда $\overline{u} \in \operatorname{Lip}(Y)$, $\operatorname{dist}_Y(\operatorname{supp} \overline{u}, Y \setminus U) > 0$, и имеют место следующие неравенства:

$$\Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(U)} |\nabla_q(u \circ \varphi)|^q \, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}} - \varepsilon \leq \Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(U_{-2\overline{\delta}})} |\nabla_q(\overline{u} \circ \varphi)|^q \, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(U)} |\nabla_q(\overline{u} \circ \varphi)|^q \, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}} \leq A \operatorname{Lip}(\overline{u}; U) \leq A \operatorname{Lip}(u; U).$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое утверждение для ограниченных липшицевых функций.

Для произвольной функции $u \in \mathrm{Lip}(Y)$ рассмотрим срезку $\mathrm{cut}_N u = (u \vee -N) \wedge N$, где $N > 0$. Тогда по доказанному имеет место неравенство

$$\Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(U)} |\nabla_q(\mathrm{cut}_N u \circ \varphi)|^q \, d\mu \Bigg)^{\frac{1}{q}} \leq A \,\mathrm{Lip}(\mathrm{cut}_N u; U) \leq A \,\mathrm{Lip}(u; U).$$

Устремляя $N \to +\infty$, получаем требуемое. $\square$

3.4. Итак, благодаря лемме 3.3 неравенство

$$\nu_u(U) = \int\limits_{\varphi^{-1}(U)} |\nabla_p(u \circ \varphi)|^p \, d\mu \leq \|\varphi^*\|^p \nu(U) \tag{10}$$

выполняется для всех открытых множеств $U \subset Y$, $\nu(U) < \infty$, и всех функций $u \in 1\text{-}\mathrm{Lip}(Y) \cap D^{1,p}(Y)$.

Определим меру G_φ в Y формулой $G_\varphi = \bigvee\limits_{u \in \mathcal{F}(Y)} \nu_u$ (см. замечание 2.6). Применяя лемму 2.2, из соотношения (10) заключаем, что выполняется неравенство

$$G_\varphi(B) \leq \|\varphi^*\|^p \nu(B) \tag{11}$$

для всех борелевских $B \subset Y$.

3.5. Рассмотрим меру $G_\varphi \circ \varphi$. Эта мера задается формулой $(G_\varphi \circ \varphi)(B) = G_\varphi(\varphi(B))$ для всех борелевских $B \subset X$ (очевидно, что $\varphi(B)$ — борелевское множество тогда и только тогда, когда B — борелевское, так как φ — гомеоморфизм).

В пространстве X имеет место разложение $X = Z_\varphi \cup \Sigma_\varphi \cup X_{\mathrm{r}}$, где Z_φ — множество нулей якобина φ и Σ_φ — множество сингулярности φ (множество, где сконцентрирована мера Φ^s, см. п. 2.9). Покажем, что мера $G_\varphi \circ \varphi$ абсолютно непрерывна относительно μ вне множества сингулярности Σ_φ. Пусть $\mu(E) = 0$ и $E \subset X \setminus \Sigma_\varphi$, тогда выполняются следующие соотношения:

$$\int\limits_E d(G_\varphi \circ \varphi) = \int\limits_{\varphi(E)} dG_\varphi \leq \|\varphi^*\|^p \nu(\varphi(E)).$$

Так как вне Σ_φ отображение φ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина, то $\nu(\varphi(E)) = 0$ (см. предложение 2.10). Значит, $G_\varphi \circ \varphi$ абсолютно непрерывна относительно μ вне Σ_φ.

Из неравенства (11) и σ-конечности Y относительно меры ν заключаем, что мера $G_\varphi \circ \varphi$ σ-конечна на пространстве X.

В силу теоремы Радона — Никодима существует борелевская локально интегрируемая функция

$$\widetilde{g}_\varphi(x) = \frac{d(G_\varphi \circ \varphi)}{d\mu}(x) \quad \text{для } x \in X \setminus \Sigma_\varphi.$$

Определим функцию $g_\varphi(x)$ по формуле

$$g_\varphi(x) = \begin{cases} \widetilde{g}_\varphi(x)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } x \in X \setminus \Sigma_\varphi, \\ \infty, & \text{если } x \in \Sigma_\varphi. \end{cases}$$

Очевидно, что $g_\varphi \in L^p_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$.

3.6. Покажем, что g_φ — мажоранта для семейства $|\nabla_p(u\circ\varphi)|$, где $u \in \mathcal{F}(Y)$ — функция вида $(r - d_Y(y,y_0))\vee 0$, $y_0 \in Y$, $r>0$.

Из построения выполняется неравенство

$$\nu_u(B) = \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} |\nabla_p(u\circ\varphi)|^p\,d\mu \le G_\varphi(B)$$

для любого борелевского $B\subset Y$ и любой функции $u\in\mathcal{F}(Y)$, поэтому

$$\int\limits_B |\nabla_p(u\circ\varphi)|^p\,d\mu = (\nu_u\circ\varphi)(B) \le (G_\varphi\circ\varphi)(B) = \int\limits_B g_\varphi^p\,d\mu$$

для любого борелевского множества $B\subset X\setminus\Sigma_\varphi$. Отсюда заключаем, что

$$|\nabla_p(u\circ\varphi)|^p \le g_\varphi^p \quad \mu\text{-п. в. в } X.$$

Так как $u=(r-d_Y(y_0,\cdot))\vee 0$ совпадает с $r-d_Y(y_0,\cdot)$ на множестве $B_Y(y_0,r)$, применяя предложение 2.18, заключаем, что φ принадлежит классу Решетняка $D^{1,p}_{\mathrm{loc}}(X;Y)$ и выполняется неравенство $|D_q\varphi|\le g_\varphi$ μ-п. в. в X.

Заметим, что $g_\varphi=0$ μ-п. в. на множестве Z_φ. Действительно, в силу оценки (11) выполняется равенство $G_\varphi(\varphi(Z_\varphi))=0$ и при переносе посредством φ^{-1} получим $g_\varphi=0$ μ-п. в. на Z_φ. Значит, φ — отображение с конечным искажением.

3.7. Установим оценку $|D_p\varphi|^p \le \|\varphi^*\|^p\mathcal{J}\varphi$ для μ-п. в. точек в X.

Имеет место разложение $Y = Z_{\varphi^{-1}}\cup\Sigma_{\varphi^{-1}}\cup Y_{\mathrm{r}}$, причем можно считать, что $\varphi(Z_\varphi)=\Sigma_{\varphi^{-1}}$ и $\varphi(\Sigma_\varphi)=Z_{\varphi^{-1}}$ (см. § 2.9). Пусть $B\subset Y$ — борелевское множество. Используя конечность искажения φ, неравенство (11) и определение g_φ, выводим следующие оценки:

$$\begin{aligned} G_\varphi(B) &= \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} g_\varphi^p\,d\mu = \int\limits_{\varphi^{-1}(B)\setminus\Sigma_\varphi} g_\varphi^p\,d\mu \\ &= \int\limits_{\varphi^{-1}(B)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z_\varphi)} \frac{g_\varphi^p}{\mathcal{J}\varphi}\mathcal{J}\varphi\,d\mu = \int\limits_{B\setminus\varphi(\Sigma_\varphi\cup Z_\varphi)} \frac{g_\varphi^p\circ\varphi^{-1}}{\mathcal{J}\varphi\circ\varphi^{-1}}\,d\nu \le \|\varphi^*\|^p\nu(B). \end{aligned}$$

В силу произвольности борелевского множества B выводим неравенство

$$g_\varphi^p(\varphi^{-1}(y)) \le \|\varphi^*\|^p\mathcal{J}\varphi(\varphi^{-1}(y))$$

для ν-п. в. $y\in Y\setminus(\varphi(\Sigma_\varphi)\cup\varphi(Z_\varphi))$. Учитывая, что $\nu(\varphi(Z_\varphi))=\nu(\Sigma_{\varphi^{-1}})=0$, $\varphi(Z_\varphi)=\Sigma_{\varphi^{-1}}$ и вне $\Sigma_{\varphi^{-1}}$ гомеоморфизм φ^{-1} обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина, получаем неравенство

$$|D_p\varphi|^p(x) \le g_\varphi^p(x) \le \|\varphi^*\|^p\mathcal{J}\varphi(x)$$

для μ-п. в. $x\in X\setminus\Sigma_\varphi$, где $\mu(\Sigma_\varphi)=0$. Отсюда заключаем, что $K_{p,p}(x,\varphi)\le\|\varphi^*\|$ μ-п. в. в X. $\square$

Доказательство достаточности в теореме 3.1. Пусть $u \in D^{1,p}(Y) \cap \mathrm{Lip}(Y)$. Тогда композиция $u \circ \varphi$ измерима. Покажем, что $u \circ \varphi \in D^{1,p}(X)$ и оператор φ^* ограничен. Используя предложения 2.10 и 2.22, выводим следующие соотношения:

$$\int\limits_X |\nabla_p(u \circ \varphi)|^p \, d\mu \le \int\limits_X |\nabla_p u|^p(\varphi(x))|D_p\varphi|^p \, d\mu \le K^p \int\limits_X |\nabla_p u|^p(\varphi(x))\mathcal{J}\varphi(x)\, d\mu(x)$$

$$= K^p \int\limits_{X\setminus\Sigma_\varphi} |\nabla_p u|^p(\varphi(x))\mathcal{J}\varphi(x)\, d\mu(x) = K^p \int\limits_{Y\setminus\varphi(\Sigma_\varphi)} |\nabla_p u|^p \, d\nu \le K^p \int\limits_Y |\nabla_p u|^p \, d\nu,$$

где $K = \|K_{p,p}(\cdot,\varphi) \mid L^\infty(\Omega)\|$. Отсюда также заключаем, что выполняется неравенство $\|K_{p,p}(\cdot,\varphi) \mid L^\infty(\Omega)\| \ge \|\varphi^*\|$. $\square$

3.8. Замечание. При доказательстве теоремы 3.1 использовались следующие свойства пространства $D^{1,p}$.

(a) Пространство $D^{1,p}$ замкнуто относительно поточечных максимума и минимума функций, причем равенство

$$|\nabla_p(u_1 \vee u_2)| = |\nabla_p u_1| \cdot \chi_{\{u_1 \ge u_2\}} + |\nabla_p u_2| \cdot \chi_{\{u_2 > u_1\}}, \quad u_1, u_2 \in D^{1,p},$$

выполняется почти всюду. Для $u_1 \wedge u_2$ требуется аналогичное свойство. Выполнение данного свойства в $D^{1,p}$ — содержательная часть леммы 2.17.

(b) Липшицевы функции содержатся в пространстве $D^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, причем $|\nabla_p u|(y) \le \mathrm{Lip}\, u(y)$ п. в. для всех $u \in \mathrm{Lip} \cap D^{1,p}$, где

$$\mathrm{Lip}\, u(y) = \varlimsup_{r\to 0} \frac{\sup\{|u(y') - u(y)| \mid d_Y(y', y) \le r\}}{r}.$$

В пространстве $D^{1,p}$ это свойство выполнено в силу леммы 2.14.

(c) Для измеримого отображения $\varphi : X \to Y$ класса $D^{1,p}(X;Y)$ в смысле Решетняка и липшицевой функции $u \in \mathrm{Lip}(Y)$ композиция $u \circ \varphi$ принадлежит пространству $D^{1,p}(X)$ и выполняется оценка «нормы градиента»

$$|\nabla_p(u \circ \varphi)|(x) \le |\nabla_p u|(\varphi(x))|D_p\varphi|(x) \quad \text{почти всюду.}$$

Данное свойство для $D^{1,p}$ — следствие предложения 2.22.

Таким образом, если пространство Соболева S^p, $1 \le p < \infty$, функции которого определены на метрическом пространстве с мерой, обладает свойствами (a)–(c), то выполняется теорема 3.1: гомеоморфизм $\varphi : X \to Y$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : S^p(Y) \cap \mathrm{Lip}(Y) \to S^p(X)$$

тогда и только тогда, когда

(i) $\varphi \in S^p_{\mathrm{loc}}(X;Y)$,

(ii) существует константа $K > 0$ такая, что неравенство $|D_p\varphi| \le K(\mathcal{J}\varphi)^{\frac{1}{p}}$ выполнено почти всюду в X.

При этом наименьшая константа K в п. (ii) совпадает с нормой оператора композиции $\|\varphi^*\|$.

4. Операторы композиции и квазиконформные отображения

Известно, что операторы композиции пространств Соболева в евклидовых пространствах тесно связаны с квазиконформными отображениями: гомеоморфизмы, индуцирующие ограниченный оператор композиции пространств Соболева $L^{1,n}$, где n — размерность пространства, — это в точности квазиконформные гомеоморфизмы см., например, работы [9] (случай евклидовых пространств), [10] (случай групп Карно), [12, 13] (случай римановых многообразий).

4.1. Аналогичная связь имеет место и в метрических пространствах с мерой. Введем некоторые вспомогательные понятия.

Говорят, что метрическое пространство с мерой (X, d_X, μ) *имеет локально Q-ограниченную геометрию*, $Q > 1$, если X сепарабельно, линейно связно, локально компактно и существуют постоянные $C_0 \geq 1$, $0 < \lambda \leq 1$, и убывающая функция $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ такие, что

(a) для любой $x \in X$ существует окрестность U такая, что

$$\mu(B_R) \leq C_0 R^Q,$$

где $B_R \subset U$ — шар радиуса $R > 0$,

(b) для любых дизъюнктных невырожденных континуумов E, F, содержащихся в $B_{\lambda R}$, таких, что $\operatorname{dist}_X(E, F) \leq t \min\{\operatorname{diam}_X E, \operatorname{diam}_X F\}$, выполняется неравенство

$$M_Q(E, F; B_R) \geq \psi(t),$$

где $M_Q(E, F; B_R)$ — Q-модуль множества всех кривых в шаре B_R, соединяющих E, F.

Введем понятие квазиконформного отображения в метрическом пространстве с мерой. Для гомеоморфизма $\varphi : X \to Y$ метрических пространств определим для $x \in X$, $r > 0$ следующие характеристики:

$$L_\varphi(x, r) = \sup\{d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \mid d_X(x, y) \leq r\},$$

$$l_\varphi(x, r) = \inf\{d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \mid d_X(x, y) \leq r\},$$

$$H_\varphi(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{L_\varphi(x, r)}{l_\varphi(x, r)}.$$

4.2. Определение (метрическое определение). Гомеоморфизм φ называется *квазиконформным*, если существует число $1 \leq H < \infty$ такое, что $H_\varphi(x) \leq H$ для всех $x \in X$.

Более общее определение слабой (Q, p)-метрической квазиконформности, $1 \leq p \leq Q$, приведено в [27].

4.3. Определение (геометрическое определение). Гомеоморфизм φ удовлетворяет *Q-геометрическому определению квазиконформности*, если существует константа $L \geq 1$ такая, что

$$\frac{1}{L} M_Q(\Gamma) \leq M_Q(\varphi\Gamma) \leq L M_Q(\Gamma)$$

для любого семейства кривых $\Gamma \subset \mathfrak{M}(X)$.

4.4. Определение (аналитическое определение). Говорят, что гомеоморфизм φ удовлетворяет *Q-аналитическому определению квазиконформности*, если $\varphi \in N^{1,Q}_{\mathrm{loc}}(X;Y)$ и существует константа $H \geq 1$ такая, что $H(\mathcal{J}\varphi)^{\frac{1}{Q}}$ — Q-слабый верхний градиент φ, т. е. выполняется неравенство $|D_Q\varphi| \leq H(\mathcal{J}\varphi)^{\frac{1}{Q}}$ μ-п. в.

4.5. В [28, теорема 9.8] была получена эквивалентность различных определений квазиконформности в пространствах с локально Q-ограниченной геометрией. Тогда частный случай ($p = Q$) теоремы 3.1 может быть сформулирован следующим образом.

Следствие. *Пусть X, Y — пространства с локально Q-ограниченной геометрией и $\varphi : X \to Y$ — гомеоморфизм. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *φ — метрически квазиконформное отображение,*

(b) *φ — локально η-квазисимметрическое отображение,*

(c) *φ удовлетворяет Q-геометрическому определению квазиконформности,*

(d) *φ удовлетворяет Q-аналитическому определению квазиконформности,*

(e) *φ индуцирует ограниченный оператор композиции пространств $D^{1,Q}$.*

Если выполнено одно (любое) из условий (a)–(e), *то обратное отображение φ^{-1} тоже квазиконформный гомеоморфизм. В частности, любой квазиконформный гомеоморфизм индуцирует изоморфизм пространств $D^{1,Q}$.*

Доказательство. Отметим, что принадлежность гомеоморфизма классу $N^{1,Q}_{\mathrm{loc}}(X;Y)$ эквивалентна принадлежности классу $D^{1,Q}_{\mathrm{loc}}(X;Y)$ в пространствах с локально Q-ограниченной геометрией.

Из теоремы 3.1 следует, что пп. (d), (e) эквивалентны. Эквивалентность пп. (a)–(d) установлена в [28, теорема 9.8]. □

О связях различных определений квазиконформности в пространствах с меньшим числом ограничений см., например, [27, 29].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О некоторых группах преобразований n-мерного пространства // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 6. С. 380–382.

2. Мазья В. Г. Классы множеств и теоремы вложения функциональных классов. Некоторые проблемы теории эллиптических операторов. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1961.

3. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W^1_n и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.

4. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 768–773.

5. *Гольдштейн В. М., Романов А. С.* Об отображениях, сохраняющих пространства Соболева // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 3. С. 55–61.

6. *Vodop′yanov S. K.* Composition operators on Sobolev spaces // Complex Analysis and Dynamical Systems II (Nahariya, Israel). Providence, RI: Am. Math. Soc., 2005. P. 401–415.

7. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.

8. *Водопьянов С. К., Томилов А. О.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85, № 5. С. 58–109.

9. *Ukhlov A., Vodopyanov S. K.* Mappings associated with weighted Sobolev spaces // Contemp. Math. 2008. V. 455. P. 369–382.

10. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.

11. *Pavlov S. V., Vodopyanov S. K.* Reshetnyak-class mappings and composition operators. arXiv preprint. arXiv:2507.10254. 2025. 23 p.
12. *Водопьянов С. К.* Операторы композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 6. С. 1128–1152.
13. *Водопьянов С. К.* Новые свойства операторов композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 4. С. 596–612.
14. *Menovschikov A., Ukhlov A.* On mappings generating embedding operators in Sobolev classes on metric measure spaces // J. Math. Anal. Appl. 2025. V. 551, N 2. 129716.
15. *Ukhlov A.* Sobolev homeomorphisms and composition operators on homogeneous Lie groups. arXiv preprint. arXiv:2504.11030. 2025. 13 p.
16. *Сбоев Д. А.* Пространства BV и ограниченные операторы композиции BV-функций на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1304–1326.
17. *Водопьянов С. К., Ухлов А.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 665–682.
18. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. New York: Springer-Verl., 2001.
19. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
20. *Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam N., Tyson J. T.* Sobolev spaces on metric measure spaces. Cambridge, UK: Camb. Univ. Press, 2015.
21. *Богачев В. И.* Основы теории меры. М.; Ижевск: РХД, 2003. Т. 1.
22. *Magnani V.* An area formula in metric spaces. arXiv preprint arXiv:1010.3610. 2010. 6 p.
23. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on metric-measure spaces // Proc. Conf. on Heat Kernels and Analysis on Manifolds, Graphs, and Metric Spaces (Paris, 2002). Providence, RI: Am. Math. Soc., 2003. P. 173–218.
24. *Ambrosio L., Ikonen T., Lučić D., Pasqualetto E.* Metric Sobolev spaces I: equivalence of definitions // Milan J. Math. 2024. V. 92. P. 255–347.
25. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
26. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
27. *Koskela P., Wildrick K.* Analytic properties of quasiconformal mappings between metric spaces // Metric and Differential Geometry: The Jeff Cheeger Anniversary Volume. Basel: Springer, 2012. P. 163–174.
28. *Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam N., Tyson J. T.* Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings // J. d′Anal. Math. 2001. V. 85, N 1. P. 87–139.
29. *Williams M.* Geometric and analytic quasiconformality in metric measure spaces // Proc. Am. Math. Soc. 2012. V. 140, N 4. P. 1251–1266.

Поступила в редакцию 24 июня 2025 г.
После доработки 24 июня 2025 г.
Принята к публикации 3 июля 2025 г.

Сбоев Данил Алексеевич (ORCID 0009-0008-4027-9161)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
d.sboev@g.nsu.ru