

ОБ ИЗОМОРФИЗМАХ ЭНДОМОРФОВ И ДУБЛЕЙ ВИТТА

А. П. Пожидаев

Аннотация. Описание изоморфизмов эндоморфов произвольных конечномерных алгебр, которые не являются строго локальными, сводится к описанию изоморфизмов исходных алгебр, а в случае конечномерных простых левосимметрических дублей Витта над алгебраически замкнутым полем простой характеристики — к дифференциальным автоморфизмам исходных ассоциативных коммутативных дифференциально простых алгебр.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.514

Ключевые слова: эндоморф, дубль Витта, изоморфизм, автоморфизм, левосимметрическая алгебра, простая алгебра, прелиева алгебра

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

§ 1. Введение

Алгебра $\mathcal{A}$ называется *левосимметрической (прелиевой)*, если ассоциатор $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ на $\mathcal{A}$ левосимметричен: $(x, y, z) = (y, x, z)$ для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$. *Правосимметрические* алгебры — это алгебры, антиизоморфные левосимметрическим, т. е. для них выполнено тождество $(x, y, z)_{rs} := (x, y, z) - (x, z, y) = 0$. Как легко видеть, все эти алгебры Ли-допустимы. Алгебры Новикова являются одним из наиболее известных частных случаев левосимметрических алгебр, которые являются естественным обобщением ассоциативных алгебр.

Зафиксируем произвольное основное поле F , характеристику поля F будем обозначать символом $\chi(F)$, а мультипликативную группу поля — через F^* . В дальнейшем $\langle \Upsilon \rangle := \langle \Upsilon \rangle_F$ — линейная оболочка множества Υ над F , где опускаем символ F , если поле ясно из контекста. Если $\mathcal{A}$ — некоторая алгебра (векторное пространство) над F , то через $\text{End}(\mathcal{A})$ будем обозначать алгебру всех F -линейных операторов на $\mathcal{A}$, через $\text{Der}(A)$ — алгебру Ли дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ над полем F , а через $\text{Aut } \mathcal{A}$ — группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$. Если V — векторное пространство над F , то через V^* обозначаем дуальное пространство к V . Образ $\phi(x)$ элемента x под действием $\phi \in \text{End}(\mathcal{A})$ часто обозначается также через ϕ_x ; $[x, y] := xy - yx$ обозначает коммутатор элементов x и y .

Пусть d — ненулевое дифференцирование алгебры $\mathcal{A}$. Если I является d -инвариантным идеалом в $\mathcal{A}$, то это обозначается следующим образом: $I \trianglelefteq_d \mathcal{A}$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

Напомним, что $\mathcal{A}$ называется d -простой, если умножение в $\mathcal{A}$ нетривиально и в $\mathcal{A}$ нет собственных d -инвариантных идеалов (говоря о d -простых алгебрах, мы всегда предполагаем, что $d \neq 0$). Далее через $B_{n,p}(F) := F_p[x_1, \dots, x_n]$ обозначаем алгебру усеченных многочленов от n неизвестных над полем F характеристики p , т. е. $x_i^p = 0$, $x_i^0 := 1$ (единица 1 отождествляется с единицей поля F) для любого $i = 1, \dots, n$, а через $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ — частную производную по x_i . Далее в статье (i') означает ссылку на первое равенство в формуле (i) , а (i'') — на второе равенство.

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра с ненулевым дифференцированием d над полем F . Определим на $\mathcal{A}$ новое умножение правилом $x \circ y = xd(y)$. Обозначим полученную алгебру через $\mathcal{A}(d)$. Хорошо известно, что $\mathcal{A}(d)$ является алгеброй Новикова и $\mathcal{A}(d)$ проста тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является d -простой (и $\mathcal{A} \not\cong F_2[x]$). Более общей является конструкция с умножением $x \circ y = xd(y) + axy$, где $a \in \mathcal{A}$ — некоторый фиксированный элемент (см. [1, 2]); данная алгебра в [3] обозначается через $(\mathcal{A}, d, a)$. Классификация конечномерных простых алгебр Новикова над алгебраически замкнутыми полями характеристики 0 была получена в [4]. В работах [5] (и [3]) дана изящная классификация неассоциативных конечномерных простых алгебр Новикова над (алгебраически замкнутыми) полями характеристики $p > 0$ (полная классификация таких алгебр над полями характеристики $p > 2$ была получена ранее в [6]). А именно, в [5] доказано, что любая такая алгебра изоморфна некоторой алгебре $(\mathcal{A}, d, a)$.

Пусть $(\mathcal{A}, \cdot)$ — алгебра над полем F (символ умножения $\cdot$ обычно будет опускаться). Обозначим через R_a оператор правого умножения в $\mathcal{A}$ на элемент $a \in \mathcal{A}$: $xR_a := x \cdot a := xa$ для всех $x \in \mathcal{A}$; алгебру $\text{End}(\mathcal{A})$ далее будем обозначать через $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$; действие $A \in \mathcal{M}$ на $a \in \mathcal{A}$ будем записывать справа: $A(a) := aA$. Рассмотрим прямую сумму алгебр $E(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \oplus \mathcal{M}$ и наделим ее произведением $\circ$ по правилу

$$A \circ a = aA + [A, R_a], \quad a \circ A = aA, \quad a \circ b = ab, \quad A \circ B = AB$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$, $A, B \in \mathcal{M}$. Полученная алгебра называется (правым) эндоморфом алгебры $\mathcal{A}$. По определению $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ являются подалгебрами в $E(\mathcal{A})$, а $\mathcal{A}$ — это правый модуль над $\mathcal{M}$.

Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ называется алгеброй скалярного правого умножения, если существует $\lambda \in \mathcal{A}^*$ такой, что $ab = \lambda(b)a$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$. В данном случае $\mathcal{A}$ обозначается через $\mathcal{A}_\lambda^r$ (с фиксированным символом λ). Аналогично определяется алгебра левого скалярного умножения $\mathcal{A}_\lambda^l$.

В [7] доказано, что алгебра $E(\mathcal{A})$ является правосимметрической тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — правосимметрическая алгебра, а также доказана следующая

Теорема. Пусть $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{A}_\lambda^r, \mathcal{A}_\lambda^l$. Тогда алгебра $E(\mathcal{A})$ проста.

В [7] были описаны дифференцирования алгебр $E(\mathcal{A})$ в случае унитарных алгебр $\mathcal{A}$, а позднее в [8] ограничение на унитарность было снято. В [7] было начато изучение автоморфизмов алгебр $E(\mathcal{A})$ в случае, когда $\mathcal{A}$ является прямой суммой полей. В [9] были описаны группы автоморфизмов прелиевых дублей Витта. В настоящей работе в § 2 снимаются все ограничения на $\mathcal{A}$ при описании автоморфизмов (и изоморфизмов) алгебр $E(\mathcal{A})$. Таким образом, в настоящей работе описание изоморфизмов и автоморфизмов эндоморфов алгебр, которые не являются строго локальными, сводится к изоморфизмам и

автоморфизмам исходных алгебр. В случае строго локальных алгебр описание сводится к τ -изоморфизмам. В § 3, 4 обобщаются результаты работы [9] об автоморфизмах прелиевых дублей Витта, а именно, описываются изоморфизмы дублей Витта, при этом доказательства следуют работе [9] и мы в основном даем только формулировки вспомогательных результатов, приводя полные доказательства только для основных теорем. В § 5 показывается отсутствие взаимных изоморфизмов эндоморфов и дублей Витта (кроме тривиального двумерного случая $E_l(\mathcal{B}) \cong W_d(F)$ и $\mathcal{B}$ — алгебра с нулевым умножением).

§ 2. Изоморфизмы и автоморфизмы эндоморфов

Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ над полем F *строго локальна*, если в $\mathcal{A}$ существует идеал $I_{\mathcal{A}}$ такой, что $\mathcal{A}/I_{\mathcal{A}} \cong F$. Строго локальные алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ назовем τ -изоморфными, если существуют биективные гомоморфизмы $\psi: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ и $\tau: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{B})$ правых $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ -модулей $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ -модуля $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ и изоморфизм $\theta: \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{B})$ такие, что

$$\psi(xy) = \psi(x)\psi(y) + \psi(x)\tau(y) + \psi(y)\tau(x),$$

$$\tau(xA) = \tau(x)\theta(A), \quad \psi(xA) = \psi(x)\theta(A)$$

для любых $x, y \in \mathcal{A}$; при этом $\psi(I_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{B}}$, $I_{\mathcal{B}}\tau(\mathcal{A}) = 0$, $f_1\tau(e_1) - f_1 \in I_{\mathcal{B}}$, где $e_1 + I_{\mathcal{A}}$ и $f_1 + I_{\mathcal{B}}$ — единицы в $\mathcal{A}/I_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{B}/I_{\mathcal{B}}$ соответственно.

Заметим, что из определения следует изоморфизм $I_{\mathcal{A}} \cong I_{\mathcal{B}}$. Таким образом, если строго локальные алгебры τ -изоморфны, то они обладают изоморфными идеалами коразмерности 1, т. е. эти алгебры «почти» изоморфны. Всюду далее предполагаем, что алгебры не являются одномерными, так как одномерный случай тривиален.

Теорема 2.1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — конечномерные алгебры над полем F , ϕ — изоморфизм $E(\mathcal{A})$ и $E(\mathcal{B})$. Тогда $\phi = \psi + \tau$ для однозначно определенных линейных отображений $\psi: E(\mathcal{A}) \mapsto \mathcal{B}$ и $\tau: E(\mathcal{A}) \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{B})$. Предположим, что ядро ограничения τ на $\mathcal{A}$ равно нулю. Тогда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ строго локальны, ограничение τ на $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ — изоморфизм, а ограничение $\psi: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ есть τ -изоморфизм. Обратно, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ строго локальны и τ -изоморфны, то $E(\mathcal{A}) \cong E(\mathcal{B})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможность требуемого представления $\phi = \psi + \tau$ очевидна. Выпишем условия изоморфизма отображения ϕ . С одной стороны, $\phi(AB) = \psi(AB) + \tau(AB)$ для любых $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \phi(AB) &= \phi(A) \circ \phi(B) = (\psi(A) + \tau(A)) \circ (\psi(B) + \tau(B)) \\ &= \psi(A)\psi(B) + \psi(A)\tau(B) + \psi(B)\tau(A) + [\tau(A), R_{\psi_B}] + \tau(A)\tau(B), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi(AB) &= \psi(A)\psi(B) + \psi(A)\tau(B) + \psi(B)\tau(A), \\ \tau(AB) &= [\tau(A), R_{\psi_B}] + \tau(A)\tau(B), \end{aligned}$$

т. е. $\psi[A, B] = [\psi(A), \psi(B)]$ для любых $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Пусть sl_n — алгебра Ли линейных преобразований со следом 0 векторного пространства $\mathcal{A}$ и ψ_0 — ограничение ψ на sl_n . Тогда ψ_0 является гомоморфизмом алгебр sl_n и $\mathcal{B}^{(-)} := (\mathcal{B}; [\cdot, \cdot])$. Алгебра sl_n проста, поэтому либо $\text{Ker } \psi_0 = 0$, либо $\text{Ker } \psi_0 = sl_n$. Первый случай невозможен, так как $\dim \text{Im } \psi_0 = n^2 - 1 > \dim \mathcal{B} = n > 1$. Если E — единица в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (единицу в $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ обозначим также через E), то E —

единица в $E(\mathcal{A})$, откуда $\phi(E) = E$, т. е. $\psi(E) = 0$, $\tau(E) = E$. Таким образом, $\psi(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = 0$.

Теперь из доказанного выше равенства следует $\tau(AB) = \tau(A)\tau(B)$ для любых $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Обозначим через τ_0 ограничение τ на $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Тогда τ_0 — изоморфизм простых ассоциативных алгебр $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{M}(\mathcal{B})$.

Далее, из $\phi(xA) = \phi(x) \circ \phi(A)$ для любых $x \in \mathcal{A}$ и $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ получаем

$$\psi(xA) = \psi(x)\tau(A), \quad \tau(xA) = \tau(x)\tau(A). \quad (1)$$

Полагая $A = R_y$ в последнем равенстве, выводим

$$\tau(xy) = \tau(x)\tau(R_y). \quad (2)$$

Справедливы следующие равенства:

$$\phi(Ax) = \phi(A) \circ \phi(x) = \tau(A) \circ (\psi_x + \tau_x) = \psi_x \tau(A) + [\tau(A), R_{\psi(x)}] + \tau(A)\tau(x),$$

$$\phi(Ax) = \phi(xA + [A, R_x]) = \psi_x \tau(A) + \tau(x)\tau(A) + [\tau(A), \tau(R_x)],$$

откуда $[\tau(A), \tau(R_x) - R_{\psi(x)} - \tau_x] = 0$ и

$$\tau(R_x) = R_{\psi(x)} + \tau_x + \alpha_x E \quad (3)$$

для некоторого $\alpha \in \mathcal{A}^*$.

Последнее соотношение на изоморфизм дает

$$\begin{aligned} \phi(x \circ y) &= \psi(xy) + \tau(xy) = (\psi(x) + \tau(x)) \circ (\psi(y) + \tau(y)) \\ &= \psi(x)\psi(y) + \psi(x)\tau(y) + \psi(y)\tau(x) + [\tau(x), R_{\psi(y)}] + \tau(x)\tau(y), \end{aligned}$$

откуда, используя (2), получаем

$$\begin{aligned} \tau_x \tau(R_y) &= \tau_x R_{\psi(y)} + \tau_x \tau(y) - R_{\psi(y)} \tau_x, \\ \psi(xy) &= \psi(x)\psi(y) + \psi(x)\tau(y) + \psi(y)\tau(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя (3), первое из данных равенств можно переписать в виде

$$(\alpha_y E + R_{\psi(y)})\tau_x = 0 \quad (5)$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$.

Так как (3) эквивалентно равенствам

$$\psi(y)\tau(R_x) = \psi(y)(R_{\psi(x)} + \tau_x + \alpha_x E)$$

для всех $y \in \mathcal{A}$, то

$$\psi(yx) = \psi(y)\psi(x) + \psi(y)\tau_x + \alpha_x \psi(y).$$

Переставляя x и y и сравнивая с (4), приходим к соотношению

$$\psi(x)\tau(y) = \alpha_x \psi(y) \quad (6)$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Таким образом, (6) эквивалентно (3) при наличии (4).

Из (1) следует, что $\tau(\mathcal{A})$ — правый идеал в $M_n(F)$, при этом $\dim \tau(\mathcal{A}) = n$, так как $\text{Ker } \tau|_{\mathcal{A}} = 0$. Значит, $\tau(\mathcal{A})$ — минимальный правый идеал в $M_n(F)$ и базисы $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$ в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F} := \{f_1, \dots, f_n\}$ в $\mathcal{B}$ можно выбрать так, что

$$\tau(\mathcal{A}) = \langle e_{11}, \dots, e_{1n} \rangle, \quad \tau(e_k) = e_{1k}, \quad f_k e_{ij} = \delta_{ik} f_j, \quad i, j, k = 1, \dots, n,$$

где δ — символ Кронекера, e_{ij} — матричные единицы в $M_n(F)$.

Из биективности ϕ и доказанного равенства $\psi(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = 0$ следует, что ψ можно рассматривать как биективное отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Следовательно, существуют $g_i \in \mathcal{A}$ такие, что $\psi(g_i) = f_i$ для любого $i = 1, \dots, n$. Пусть $g_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} e_k$ для некоторых $\gamma_{ik} \in F$ и всех $i = 1, \dots, n$. Тогда $\tau(g_i) = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} e_{1k}$. Можно считать, что $\alpha \neq 0$, так как иначе из (6) следует $\tau = 0$ на $\mathcal{A}$, противоречие с условием теоремы. Выберем $a \in \mathcal{A}$ таким, что $\alpha(a) = 1$. Тогда из (6) получаем $\psi(a)\tau(x) = \psi(x)$ для любого $x \in \mathcal{A}$. Пусть $\psi(a) = \nu f_1 + \sum_{k=2}^n \nu_k f_k$ для некоторых $\nu \in F^*$, $\nu_k \in F$. Имеем

$$\psi(a)\tau(g_i) = \nu \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} f_k = f_i,$$

откуда $\nu\gamma_{ii} = 1$ и $\gamma_{ij} = 0$, т. е. $g_i = \nu^{-1}e_i$ для любых $1 \leq i \leq n$. Таким образом, $\psi(e_i) = \nu f_i$ для любого i .

Заметим, что при данном выборе базисов τ оказывается «тождественным» отображением на $M_n(F)$, отождествляя $\text{End}(\mathcal{A}) = M_n(F) = \text{End}(\mathcal{B})$: $e_k e_{ij} = \delta_{ik} e_j$; $f_k e_{ij} = \delta_{ik} f_j$. Действительно, из (1) при $x = e_k$, $A = e_{ij}$ получаем

$$\tau(\delta_{ik} e_j) = \delta_{ik} e_{1j} = \tau(e_k)\tau(e_{ij}) = e_{1k}\tau(e_{ij}).$$

Домножая полученное слева на e_{k1} , приходим к равенству $\delta_{ik} e_{kj} = e_{kk}\tau(e_{ij})$. Суммируя по всем k , имеем $e_{ij} = \tau(e_{ij})$.

Из (6) получаем

$$\psi(e_i)\tau(e_j) = \alpha(e_i)\psi(e_j), \quad \nu f_i e_{1j} = \nu \delta_{1i} f_j = \alpha(e_i)\nu f_j$$

для любых i и j , откуда $\alpha(e_i) = \delta_{1i}$ для любого i .

Пусть π — проекция на подпространство $\langle f_1 \rangle$, отождествляемое с F , т. е. $\pi(b)$ — коэффициент при f_1 в разложении $b \in \mathcal{B}$ по базису $\mathcal{F}$. Подействуем (5) на f_i при $y = e_1$: $(f_i + \nu f_i f_1)\tau_x = 0$, т. е. $\pi(f_1^2) \neq 0$, $\pi(f_i f_1) = 0$ для любого $i \neq 1$. Действуя (5) на f_i при $y = e_j$, $j \neq 1$, получим $f_i f_j \tau_x = 0$, т. е. $\pi(f_1^2) \neq 0$, $\pi(f_i f_j) = 0$ для любых i и j , одновременно не равных 1.

Пусть $I := I_{\mathcal{B}} := \{b \in \mathcal{B} : \pi(b) = 0\}$. Тогда I — идеал в $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}/I \cong F$. Легко видеть, что $f_1 + \nu f_1^2 \equiv 0 \pmod{I_{\mathcal{B}}}$.

Равенство (5) эквивалентно соотношению $(\alpha_y z + z\psi_y)\tau_x = 0$, откуда $\alpha_y z + z\psi_y \in I_{\mathcal{B}}$ для любых $x, y \in \mathcal{A}$, $z \in \mathcal{B}$. Последнее эквивалентно $\alpha(e_1)f_1 + f_1\psi(e_1) = \alpha(e_1)f_1 - f_1 \in I_{\mathcal{B}}$, т. е. (5) истинно.

Пусть $e_1^2 = \mu e_1 + e$ для некоторых $\mu \in F$, $e \in I_{\mathcal{A}} := \langle e_2, \dots, e_n \rangle$. Тогда из (4) при $x = y = e_1$ получаем

$$\mu \nu f_1 \equiv \nu^2 f_1^2 + 2\nu f_1 e_{11} \equiv \nu f_1 \pmod{I_{\mathcal{B}}},$$

откуда $\mu = 1$. Осталось заметить, что $f_1\tau(e_1) - f_1 \in I_{\mathcal{B}}$, где $e_1 + I_{\mathcal{A}}$, $f_1 + I_{\mathcal{B}}$ — единицы в $\mathcal{A}/I_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{B}/I_{\mathcal{B}}$ соответственно. Таким образом, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ строго локальны; ограничение τ на $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ — изоморфизм, а ограничение $\psi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ есть τ -изоморфизм.

Обратно, пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ строго локальны и τ -изоморфны, а $\psi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$, $\tau : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{B})$ и $\theta : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{B})$ удовлетворяют условиям теоремы и τ -изоморфизма. Пусть

$$\mathcal{A} = \langle e_1 \rangle \oplus I_{\mathcal{A}}, \quad I_{\mathcal{A}} = \langle e_2, \dots, e_n \rangle, \quad \mathcal{B} = \langle f_1 \rangle \oplus I_{\mathcal{B}}, \quad I_{\mathcal{B}} = \langle f_2, \dots, f_n \rangle,$$

где $f_1^2 = -f_1 + f$, $f \in I_{\mathcal{B}}$, $\psi(e_i) = f_i$. Обозначим через e_{ij} и $\bar{e}_{ij}$ матричные единицы в базисах $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{f_1, \dots, f_n\}$ соответственно. Положим $\alpha(e_i) := \delta_{1i}$, $i = 1, \dots, n$.

Заметим, что при данном выборе базисов имеем

$$\psi(e_i e_{kl}) = \delta_{ik} f_l = \psi(e_i) \theta(e_{kl}) = f_i \theta(e_{kl})$$

для любых $i, k, l = 1, \dots, n$, откуда $\theta(e_{kl}) = \bar{e}_{kl}$. Далее,

$$\tau(e_i e_{kl}) = \delta_{ik} \tau(e_l) = \tau(e_i) \bar{e}_{kl},$$

откуда $\tau(e_l) = \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{e}_{jl}$ для любых $i, j, k, l = 1, \dots, n$ и условие $I_{\mathcal{B}} \tau(\mathcal{A}) = 0$ дает $\tau(e_l) = \beta_1 \bar{e}_{1l}$. Так как $f_1 \tau(e_1) - f_1 \in I_{\mathcal{B}}$, то $\beta_1 = 1$.

Положим $\phi = \psi + \tau$, где ψ и τ рассматриваем как отображения из $E(\mathcal{A})$, полагая $\psi(A) = 0$ и $\tau(A) = \theta(A)$ для любой $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Тогда ϕ биективно, (1) и (4) выполнены по условию. Условие (6) легко проверяется.

Как замечено ранее, (5) эквивалентно соотношению $\alpha(e_1) f_1 + f_1 \psi(e_1) = \alpha(e_1) f_1 - f_1 \in I_{\mathcal{B}}$. Таким образом, ϕ — изоморфизм алгебр $E(\mathcal{A})$ и $E(\mathcal{B})$. $\square$

Будем говорить, что алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются $\mathcal{M}$ -изоморфными, если существует изоморфизм ψ алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ такой, что $\psi(xA) = \psi(x)\tau(A)$ для некоторого изоморфизма $\tau : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B})$; обозначение: $\mathcal{A} \stackrel{\mathcal{M}}{\cong} \mathcal{B}$.

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — конечномерные алгебры над полем F , которые не являются строго локальными. Тогда $E(\mathcal{A}) \cong E(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \stackrel{\mathcal{M}}{\cong} \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Доказательство. Пусть $\phi : E(\mathcal{A}) \rightarrow E(\mathcal{B})$ — изоморфизм, $\phi = \psi + \tau$, как и в теореме 2.1. Из доказательства теоремы 2.1 имеем

$$\psi(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = 0, \quad \tau(xA) = \tau(x)\tau(A), \quad \tau(AB) = \tau(A)\tau(B)$$

для любых $x \in \mathcal{A}$, $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Таким образом, τ индуцирует изоморфизм простых ассоциативных алгебр $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{M}(\mathcal{B})$. Так как по теореме 2.1 ядро ограничения τ на $\mathcal{A}$ не равно нулю и τ индуцирует модульный гомоморфизм, то $\tau(\mathcal{A}) = 0$, откуда $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ для любых $x, y \in \mathcal{A}$, т. е. $\psi|_{\mathcal{A}}$ — это изоморфизм алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Как и ранее, $\psi(xA) = \psi(x)\tau(A)$ для любых $x \in \mathcal{A}$ и $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Обратно, пусть ψ — изоморфизм алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ такой, что $\psi(xA) = \psi(x)\tau(A)$ для некоторого изоморфизма $\tau : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B})$. Продолжим ψ и τ линейно на $E(\mathcal{A})$ правилами $\psi(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = 0$, $\tau(\mathcal{A}) = 0$. Определим $\phi : E(\mathcal{A}) \rightarrow E(\mathcal{B})$ посредством $\phi = \psi + \tau$. Из равенства выше при $A = R_y$ получаем $\tau(R_y) = R_{\psi(y)}$ для любого $y \in \mathcal{A}$. Теперь легко проверяется, что ϕ — это изоморфизм алгебр $E(\mathcal{A})$ и $E(\mathcal{B})$.

Окончательно

$$\mathcal{A} \stackrel{\mathcal{M}}{\cong} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}; \quad \mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow E(\mathcal{A}) \cong E(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \stackrel{\mathcal{M}}{\cong} \mathcal{B}. \quad \square$$

Следствие 2.1. Если ψ — изоморфизм конечномерных алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, которые не являются строго локальными, то существует изоморфизм $\tau : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B})$ такой, что $\psi(xA) = \psi(x)\tau(A)$ для любых $x \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Очевидно, что если $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, то $E(\mathcal{A}) \cong E(\mathcal{B})$, но тогда $\mathcal{A} \stackrel{\mathcal{M}}{\cong} \mathcal{B}$ по теореме 2.2. $\square$

Обозначим через $\text{Aut}_{\mathcal{M}} \mathcal{A}$ подмножество автоморфизмов в группе $\text{Aut} \mathcal{A}$, которые автоморфно перестановочны с правым действием $\mathcal{M}$ на $\mathcal{A}$, т. е.

$$\text{Aut}_{\mathcal{M}} \mathcal{A} := \{\psi \in \text{Aut} \mathcal{A} : \exists \tau \in \text{Aut} \mathcal{M} : \psi(xA) = \psi(x)\tau(A) \ \forall x \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{M}\}.$$

Легко проверяется

Предложение 2.1. $\text{Aut}_{\mathcal{M}} \mathcal{A}$ является подгруппой в $\text{Aut} \mathcal{A}$.

Теорема 2.3. Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра над полем F , которая не является строго локальной. Тогда $\text{Aut} E(\mathcal{A}) \cong \text{Aut}_{\mathcal{M}} \mathcal{A}$.

Доказательство. Данная теорема является следствием теоремы 2.2. Действительно, пусть $\phi \in \text{Aut} E(\mathcal{A})$. Тогда $\phi = \psi + \tau$ по теореме 2.1, где ψ можно рассматривать как автоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ такой, что $\psi(xA) = \psi(x)\tau(A)$ для некоторого $\tau \in \text{Aut} \mathcal{M}$ (так можно считать, поскольку $\tau(\mathcal{A}) = 0$). $\square$

Так как левосимметрические алгебры антиизоморфны правосимметрическим, получаем определение (левого) эндоморфа $E_l(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$:

$$a \circ A = aA + [A, L_a], \quad A \circ a = aA, \quad a \circ b = ab, \quad A \circ B = BA$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$, $A, B \in \mathcal{M}$.

Из теоремы 2.2 и отмеченного выше антиизоморфизма получается

Теорема 2.4. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — конечномерные алгебры над полем F , которые не являются строго локальными. Тогда $E_l(\mathcal{A}) \cong E_l(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

§ 3. Изоморфизмы дублей Витта $\mathcal{A}_d$

Всюду далее работаем с конечномерными алгебрами, поэтому полезно привести следующий хорошо известный результат о структуре конечномерных ассоциативных коммутативных d -простых алгебр $\mathcal{A}$ (см. доказательство, например, в [9] или [10]). Далее через $\mathcal{N}$ будем обозначать радикал данных алгебр $\mathcal{A}$.

Лемма 3.1. Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d -простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F , где $d \in \text{Der} \mathcal{A}$, $d \neq 0$. Тогда $\mathcal{A}$ содержит единицу $1 \in \mathcal{A}$, $\chi(F) = p \neq 0$, $\mathcal{A} \cong B_{n,p}(F)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \cdot d(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ и $\text{Ker} d = F$. В частности, $d(\mathcal{A})$ содержит обратимые элементы.

Пусть $d_1, d_2 \in \text{End}(\mathcal{A})$ — пара фиксированных линейных отображений векторного пространства $\mathcal{A}$ над полем F . Положим

$$\text{Aut}_{d_1, d_2} \mathcal{A} := \{\psi \in \text{Aut} \mathcal{A} : \psi d_1 = d_2 \psi\}.$$

При этом будем говорить, что d_1 и d_2 сопряжены посредством автоморфизма ψ .

Напомним определение дубля Витта $\mathcal{A}_d$. Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d и $\overline{\mathcal{A}}$ — изоморфная копия алгебры $\mathcal{A}$ (как векторного пространства).

Дубль Витта $\mathcal{A}_d$. Рассмотрим прямую сумму $\mathcal{A} \oplus \overline{\mathcal{A}}$, где произведение определено правилами

$$\overline{x} \circ y = xd(y), \quad x \circ \overline{y} = 0, \quad x \circ y = xy + \overline{xy}, \quad \overline{x} \circ \overline{y} = \overline{xd(y)}$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Полученная алгебра обозначается через $\mathcal{A}_d$ и называется дублем Витта алгебры $\mathcal{A}$. В [11] доказано, что $\mathcal{A}_d$ является левосимметрической алгеброй, которая проста тогда и только тогда, когда d -проста алгебра $\mathcal{A}$.

Легко видеть, что любой изоморфизм $\phi : \mathcal{A}_{d_1} \mapsto \mathcal{A}_{d_2}$ однозначно определяется четверкой линейных отображений ψ, η, θ, π алгебры $\mathcal{A}$, а именно

$$\phi(a) = \psi(a) + \overline{\eta(a)}, \quad \phi(\bar{a}) = \theta(a) + \overline{\pi(a)}.$$

Обозначим $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi)$. Следующая лемма по сути доказана в [9].

Лемма 3.2. Пусть $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) : \mathcal{A}_{d_1} \mapsto \mathcal{A}_{d_2}$. Тогда $\phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y)$ для всех $x, y \in \mathcal{A}_{d_1}$ тогда и только тогда, когда

$$\psi(ab) + \theta(ab) = \psi(a)\psi(b) + \eta(a)d_2\psi(b), \quad \eta(ab) + \pi(ab) = \psi(a)\psi(b) + \eta(a)d_2\eta(b), \quad (7)$$

$$\psi(a)\theta(b) + \eta(a)d_2\theta(b) = 0, \quad \psi(a)\theta(b) + \eta(a)d_2\pi(b) = 0, \quad (8)$$

$$\psi(ad_1(b)) = \theta(a)\psi(b) + \pi(a)d_2\psi(b), \quad \eta(ad_1(b)) = \theta(a)\psi(b) + \pi(a)d_2\eta(b), \quad (9)$$

$$\theta(ad_1(b)) = \theta(a)\theta(b) + \pi(a)d_2\theta(b), \quad \pi(ad_1(b)) = \theta(a)\theta(b) + \pi(a)d_2\pi(b) \quad (10)$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Отображение ϕ биективно тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in \mathcal{A}$ существуют единственные $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что

$$\psi(a) + \theta(b) = x, \quad \eta(a) + \pi(b) = y.$$

Обозначим отображение $\phi = (\psi, 0, 0, \psi)$ через $\psi + \bar{\psi}$.

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d_i -простая алгебра над полем F . Тогда $\phi : \mathcal{A}_{d_1} \mapsto \mathcal{A}_{d_2}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда d_1 и d_2 сопряжены посредством некоторого автоморфизма $\psi \in \text{Aut}_{d_1, d_2} \mathcal{A}$, при этом $\phi = \psi + \bar{\psi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $d := d_1$. Рассмотрим сначала случай $\eta \neq 0$. Обозначим $I := \text{Ker } \eta$ и предположим, что $d(I) \neq 0$. Из (8') следует, что $\psi(I)\theta(\mathcal{A}) = 0$. Тогда из (9'') получаем $\eta(\mathcal{A}d(I)) = 0$, т. е. $\mathcal{A}d(I) \subseteq I$ и, в частности, $d(I) \subseteq I$. Последнее означает, что $\mathcal{A}I \leq_d \mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}I$ является ненулевым d -идеалом в $\mathcal{A}$, а потому $\mathcal{A}I = \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}d(I) \leq_d \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}d(I) = \mathcal{A}$, но $\mathcal{A}d(I) \subseteq I$, откуда $I = \mathcal{A}$, т. е. $\eta = 0$. Получили противоречие.

Таким образом, если $\eta \neq 0$ и $I = \text{Ker } \eta \neq 0$, то $d(I) = 0$. В данном случае, как и ранее, имеем $\mathcal{A}I = \mathcal{A}$. Из (7) получаем $(\psi - \eta + \theta - \pi)(I\mathcal{A}) = 0$, откуда $\psi - \eta = \pi - \theta$. По лемме 3.2 для любых $x, y \in \mathcal{A}$ существуют $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что $(\psi - \eta)(a) + (\theta - \pi)(b) = x - y$, т. е. $(\psi - \eta)(a - b) = x - y$, откуда следует биективность отображения $\psi - \eta$. Из (7) получаем $\eta(\mathcal{A})d_2(\psi - \eta)(\mathcal{A}) = 0$, и из невырожденности $\psi - \eta$ следует $\eta(\mathcal{A})d_2(\mathcal{A}) = 0$. Так как $\mathcal{A} \cdot d_2(\mathcal{A}) \leq_d \mathcal{A}$, то $d_2(\mathcal{A})$ содержит обратимые элементы, значит, $\eta(\mathcal{A}) = 0$; противоречие.

Рассмотрим случай невырожденного преобразования η . В этом случае из (8) следует равенство $d_2(\theta - \pi) = 0$, и теперь из (10) получаем $\theta = \pi$. Из (7) выводим

$$(\psi - \eta)(ab) = \eta(a)d_2(\psi - \eta)(b)$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Из леммы 3.2 вытекает невырожденность $\psi - \eta$, откуда следует существование ненулевого $b \in \mathcal{A}$ такого, что $(\psi - \eta)(b) = 1$. Подставляя данный b в равенство выше, получаем $(\psi - \eta)(\mathcal{A}b) = 0$, откуда $\mathcal{A}b = 0$ и $b = 0$; противоречие.

В итоге пришли к случаю $\eta = 0$. Из (8) следует $\psi(\mathcal{A})\theta(\mathcal{A}) = 0$. Либо $\text{Im } \psi$, либо $\text{Im } \theta$ содержит обратимый элемент, т. е. или $\psi = 0$, или $\theta = 0$. Случай $\psi = 0$ противоречив, значит, $\theta = 0$. Равенство (7) и невырожденность ϕ влекут $\psi \in \text{Aut } \mathcal{A}$, $\pi = \psi$. Из (9') получаем $\psi(ad(b)) = \psi(a)d_2\psi(b)$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$, откуда $\psi \in \text{Aut}_{d_1, d_2} \mathcal{A}$ и $\phi = \psi + \bar{\psi}$.

Обратно, если $\phi = \psi + \bar{\psi}$, где $\psi \in \text{Aut}_{d_1, d_2} \mathcal{A}$, то легко видеть, что ϕ является изоморфизмом алгебр $\mathcal{A}_{d_1}$ и $\mathcal{A}_{d_2}$. $\square$

§ 4. Изоморфизмы обобщенных дублей Витта

Пусть, как и ранее, $\mathcal{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d , $\overline{\mathcal{A}}$ — изоморфная копия $\mathcal{A}$ (как векторного пространства). Положим

$$x \cdot y = xy, \quad x \cdot \overline{y} = \overline{xy}, \quad \overline{x} \cdot y = xd(y) + \overline{xy}, \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xd(y)}$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Полученная алгебра обозначается через $W_d(\mathcal{A})$ и называется левосимметрическим *обобщенным дублем Витта*.

В [11] доказано, что $W_d(\mathcal{A})$ является левосимметрической алгеброй, которая проста тогда и только тогда, когда d -проста алгебра $\mathcal{A}$.

Пусть есть два дубля $\mathbb{A}_1 := W_{d_1}(\mathcal{A})$ и $\mathbb{A}_2 := W_{d_2}(\mathcal{A})$. Как и в предыдущем параграфе, легко видеть, что любое линейное отображение $\phi : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ однозначно определяется четверкой линейных отображений ψ, η, θ, π алгебры $\mathcal{A}$, а именно

$$\phi(a) = \psi(a) + \overline{\eta(a)}, \quad \phi(\overline{a}) = \theta(a) + \overline{\pi(a)}.$$

Обозначим $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi)$. Следующая лемма по сути также доказана в [9].

Лемма 4.1. Пусть $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$. Тогда ϕ является изоморфизмом алгебр $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ тогда и только тогда, когда

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b) + \eta(a)d_2\psi(b), \quad \eta(ab) = \psi(a)\eta(b) + \eta(a)\psi(b) + \eta(a)d_2\eta(b), \quad (11)$$

$$\theta(ab) = \psi(a)\theta(b) + \eta(a)d_2\theta(b), \quad \pi(ab) = \psi(a)\pi(b) + \eta(a)\theta(b) + \eta(a)d_2\pi(b), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \psi(ad_1(b)) + \theta(ab) &= \theta(a)\psi(b) + \pi(a)d_2\psi(b), \\ \eta(ad_1(b)) + \pi(ab) &= \theta(a)\eta(b) + \pi(a)\psi(b) + \pi(a)d_2\eta(b), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \theta(ad_1(b)) &= \theta(a)\theta(b) + \pi(a)d_2\theta(b), \\ \pi(ad_1(b)) &= \theta(a)\pi(b) + \pi(a)\theta(b) + \pi(a)d_2\pi(b) \end{aligned} \quad (14)$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$, и для любых $x, y \in \mathcal{A}$ существуют единственные $u, v \in \mathcal{A}$ такие, что

$$\psi(u) + \theta(v) = x, \quad \eta(u) + \pi(v) = y.$$

Более того, $\psi(1) = 1$, $\eta(1) = 0$.

Всюду далее d_i ($i = 1, 2$) обозначает некоторое фиксированное ненулевое дифференцирование алгебры $\mathcal{A}$, относительно которого $\mathcal{A}$ является дифференциально простой.

Лемма 4.2. Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d_i -простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F , $i = 1, 2$. Если $\phi = (\psi, \eta, 0, \pi) : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ — изоморфизм, то ψ и π невырождены, $\pi(1) := \alpha \in F^*$, а также для некоторого $c \in \mathcal{A}$ и всех $a, b \in \mathcal{A}$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \psi d_1 &= \alpha d_2 \psi, \quad \pi = \alpha \psi, \quad \eta = c d_2 \psi, \\ \eta(ad_1(b)) &= \alpha(\psi(a)d_2\eta(b) - \eta(b)d_2\psi(a)), \\ \psi(ad_1(b)) &= \psi(a)\psi(d_1b). \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.2 из [9]. $\square$

Автоморфизм ψ алгебры $\mathcal{A}$ такой, что $\psi d_1 = \alpha d_2 \psi$ для некоторого обратимого $\alpha \in \mathcal{A}$, будем называть α -перестановочным с парой $d := (d_1, d_2)$. Пусть $\mathcal{A}^*$ — некоторое подмножество обратимых элементов в $\mathcal{A}$. Обозначим

через $\text{Aut}_d^* \mathcal{A}$ и $\text{Aut}_d^* \mathcal{A}$ подмножества в $\text{Aut } \mathcal{A}$, состоящие из автоморфизмов, α -перестановочных с d :

$$\text{Aut}_d^* \mathcal{A} := \{\psi \in \text{Aut } \mathcal{A} : \psi d_1 = \alpha d_2 \psi \text{ для некоторого } \alpha = \alpha_\psi \in F^*\},$$

$$\text{Aut}_d^* \mathcal{A} := \{\psi \in \text{Aut } \mathcal{A} : \psi d_1 = \alpha d_2 \psi \text{ для некоторого } \alpha = \alpha_\psi \in \mathcal{A}^*\},$$

при этом дифференцирования d_1 и d_2 будем называть α -сопряженными посредством автоморфизма ψ .

Обозначим отображение $\phi = (\psi, 0, 0, \alpha_\psi \bar{\psi})$ через $\psi + \alpha_\psi \bar{\psi}$. При $\psi \in \text{Aut}_d^* \mathcal{A}$ выполняется равенство $\psi d_1 = \alpha d_2 \psi$ для некоторого $\alpha \in F^*$. Так как пара d предполагается фиксированной, то в этом случае α однозначно определяется по ψ . Будем также использовать обозначение ϕ_ψ для отображения $\psi + \alpha_\psi \bar{\psi}$.

Теорема 4.1. Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d_i -простая алгебра, $i = 1, 2$, $\mathcal{A} \not\cong F_2[x]$. Тогда $\phi = (\psi, \eta, 0, \pi) : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ — изоморфизм в том и только том случае, если $\phi = \phi_\psi$, где $\psi \in \text{Aut}_d^* \mathcal{A}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 из [9]. $\square$

Всюду далее символы ψ, η, θ, π обозначают соответствующие компоненты некоторого изоморфизма $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi)$ алгебр $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ над полем F , которое отождествляется с подалгеброй $\langle 1 \rangle_F$. Доказательства следующих технических лемм аналогично доказательствам соответствующих лемм из [9].

Лемма 4.3 (см. лемму 3.4 в [9]). Если $\eta \neq 0$, то $I := \text{Ker } \eta = F$.

Обозначим через $\mathcal{B} = F_2[x]$ двумерную алгебру усеченных многочленов над полем F характеристики 2, а через ∂ — стандартную частную производную по x : $\partial(x) = 1$. Любое дифференцирование d алгебры $\mathcal{B}$ имеет вид $d = \nu \partial$ для некоторого $\nu \in \mathcal{B}$, и для d -простоты $\mathcal{B}$ необходима и достаточна обратимость ν , что мы и предполагаем далее.

Лемма 4.4 (см. лемму 3.5 в [9]). Пусть $\chi(F) = 2$ и $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$. Тогда $\eta = 0$, ψ невырожденно и $d_2 \psi(\mathcal{A}) \not\subseteq \mathcal{N}$.

Лемма 4.5. Пусть $\chi(F) = 2$, $\theta(1) \in \mathcal{N}$ и $\text{Ker } \theta = 0$. Тогда изоморфизм $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ возможен только в случае $\mathcal{A} \cong F_2[x]$.

Доказательство. По лемме 4.1 $\psi(1) = 1, \eta(1) = 0$. Из невырожденности θ и из (12') при $b = 1$ получаем $\eta(\mathcal{A}) \not\subseteq \mathcal{N}$, откуда $\mathcal{A} \cong F_2[x]$, так как иначе по лемме 4.4 $\eta = 0$. $\square$

Для произвольных $k, m, r, s, \nu_i \in F^*$ с условием $\Delta^2 = \nu_1 m s$, где $\Delta := r m + k s$, определим следующее линейное отображение $\phi_\Delta := (\psi, \eta, \theta, \pi)$ алгебр $\mathcal{W}_{d_i}(\mathcal{B})$, $d_i := \nu_i \partial$, $i = 1, 2$:

$$\psi(1) = 1, \quad \eta(1) = 0, \quad \theta(1) = r + s x, \quad \pi(1) = \frac{r^2}{s \nu_2},$$

$$\psi(x) = k + m x, \quad \eta(x) = \frac{k^2}{m \nu_2}, \quad \theta(x) = \Delta \left(\frac{k}{m} + x \right), \quad \pi(x) = \frac{\Delta}{s m \nu_2} (k r + \Delta x).$$

Лемма 4.6 (см. лемму 3.6 в [9]). Пусть $\theta(1) \notin \mathcal{N}$, $\eta(\mathcal{B}) \not\subseteq \mathcal{N}$, $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \theta = 0$. Тогда $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi)$ является изоморфизмом алгебр $\mathcal{W}_{d_i}(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда d_i унитарны и $\phi = \phi_\Delta$ для некоторого $\Delta \in F^*$, $i = 1, 2$.

Замечание. Над $F = \mathbb{Z}_2$ изоморфизмов ϕ_Δ нет, так как Δ всегда равно нулю.

Для произвольных $k, t \in F^*$ определим следующее линейное отображение ϕ_k^t алгебр $\mathcal{W}_{d_i}(\mathcal{B})$ при $d_i = \nu_i \partial$, $\nu_i \in F^*$:

$$\psi(1) = 1, \quad \eta(1) = 0, \quad \theta(1) = t + \frac{\nu_1}{k\nu_2}x, \quad \pi(1) = \frac{kt^2}{\nu_1},$$

$$\psi(x) = 0, \quad \eta(x) = k, \quad \theta(x) = \nu_1, \quad \pi(x) = kt + \nu_1\nu_2^{-1}x.$$

Лемма 4.7 (см. лемму 3.7 в [9]). Пусть $\theta(1) \notin \mathcal{N}$, $\eta(\mathcal{B}) \not\subseteq \mathcal{N}$, $\text{Ker } \psi \neq 0$ и $\text{Ker } \theta = 0$. Тогда $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi)$ является изоморфизмом $\mathcal{W}_d(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда d_i унитарны и $\phi = \phi_k^t$ для некоторых $k, t \in F^*$, $i = 1, 2$.

Для произвольных $k, t, \nu_i \in F^*$ определим следующее линейное отображение $\phi_{k,t}$ алгебр $\mathcal{W}_{d_i}(\mathcal{B})$ при $d_i = \nu_i \partial$, $i = 1, 2$:

$$\psi(1) = 1, \quad \eta(1) = 0, \quad \theta(1) = k^{-1}\nu_1\nu_2^{-1}x, \quad \pi(1) = 0,$$

$$\psi(x) = tk\nu_1^{-1}\nu_2 \left(1 + \frac{t}{\nu_1}x\right), \quad \eta(x) = k, \quad \theta(x) = \nu_1 + tx, \quad \pi(x) = \nu_1\nu_2^{-1}x.$$

Лемма 4.8 (см. лемму 3.8 в [9]). Пусть $\chi(F) = 2$, $\theta(1) \in \mathcal{N}$, $\text{Ker } \theta = 0$. Тогда $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi)$ является изоморфизмом алгебр $\mathcal{W}_{d_i}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, d_i унитарны и $\phi = \phi_{k,t}$ для некоторых $k, t \in F^*$, $i = 1, 2$.

Зафиксируем $\alpha, \beta \in F^*$, $d_i = \nu_i \partial$, $i = 1, 2$, и определим линейные отображения $\psi_{\alpha,\beta} := (\psi, \eta, 0, \pi)$ и $\psi_{\alpha,\beta}^0 := (\psi, 0, 0, \pi)$ алгебр $\mathcal{W}_{d_1}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{W}_{d_2}(\mathcal{B})$ соответственно правилами

$$\psi(1) = 1, \quad \psi(x) = \beta + \alpha^{-1}\nu_1\nu_2^{-1}x, \quad \eta = \alpha^2\beta^2\nu_1^{-2}d_2\psi, \quad \pi = \alpha\psi;$$

$$\psi(1) = 1, \quad \psi(x) = \beta x, \quad \pi = \alpha\psi.$$

Лемма 4.9. Отображение $\phi = (\psi, \eta, 0, \pi)$ при $\eta \neq 0$ является изоморфизмом алгебр $\mathcal{W}_{d_1}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{W}_{d_2}(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда d_1 и d_2 унитарны и $\phi = \psi_{\alpha,\beta}$ для некоторых $\alpha \in F^*$, $\beta \in F$. Отображение $\phi = (\psi, 0, 0, \pi)$ является изоморфизмом алгебр $\mathcal{W}_{d_1}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{W}_{d_2}(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда d_1 и d_2 являются α -сопряженными посредством ψ и $\phi = \psi_{\alpha,\beta}^0$ для некоторых $\alpha, \beta \in F^*$, $\psi \in \text{Aut}_d^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По леммам 4.1 и 4.2 $\psi(1) = 1$, $\psi(x) = \beta + \gamma x$ для некоторого $\gamma \in F^*$. Используя равенство $\psi d_1 = \alpha d_2 \psi$ из леммы 4.2 с его действием на x , получаем $\nu_2 \alpha \gamma = \psi(\nu_1)$. Из (11'), полагая $a = b = x$ и используя лемму 4.2, выводим $0 = \beta^2 + \nu_2^2 \gamma^2 c$. Если $\beta = 0$, то $c = 0$ и по лемме 4.2 приходим к второму случаю леммы, т. е. d_1 и d_2 являются α -сопряженными и $\phi = \psi_{\alpha,\beta}^0$ (с γ в качестве β).

Если $\beta \neq 0$, то с обратим и $\eta(x) = c\gamma\nu_2$ обратим по лемме 4.2. Тогда из (11'') при $a = b = x$ следует $\eta(x)d\eta(x) = 0$, откуда $\eta(x) \in F^*$, т. е. $\nu_2 \in F^*$ и d_2 унитарно. Тогда и d_1 унитарно. Обратно, если ϕ удовлетворяет вышеуказанным условиям, то непосредственно легко проверяется справедливость (11)–(14), а также биективность ϕ . Тогда ϕ является изоморфизмом по лемме 4.1. $\square$

Лемма 4.10 (см. лемму 3.9 в [9]). Предположим, что θ невырожденно. Тогда $\phi = (\psi, 0, \theta, \pi) : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда пара d является α -сопряженной посредством $\psi \in \text{Aut } \mathcal{A}$ и $\phi = \phi(\gamma) :=$

$(\psi, 0, \gamma\psi, \alpha\psi)$, $\gamma = \xi + \beta\ell$, $\alpha = -\beta^{-1}\xi^2 - 2\xi\ell - \beta\ell^2$ для некоторых $\beta, \xi \in F^*$ и $\ell \in \mathcal{N}$ такого, что $d_2(\ell) = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\psi \in \text{Aut}_d^* \mathcal{A}$ выполняется равенство $\psi d_1 = \alpha d_2 \psi$ для некоторого фиксированного обратимого $\alpha \in \mathcal{A}$. В этом случае при $\chi(F) \neq 2$ однозначно определяются $\beta, \xi \in F^*$, а потому и γ . Таким образом, изоморфизм $\phi(\gamma)$ алгебр $\mathbb{A}_i$ полностью определяется автоморфизмом $\psi \in \text{Aut}_d^* \mathcal{A}$. Будем также использовать обозначение ${}_{\psi}\phi$ для $\phi(\gamma)$. Отметим, что обозначение $\psi(\gamma)$ будем использовать далее для любых автоморфизмов $\phi = \psi(\gamma) := (\psi, 0, \gamma\psi, \alpha\psi)$, с условием $\gamma^2 + \alpha d(\gamma) = 0$, $2\gamma + d(\alpha) = 0$, т. е., в частности, случай $\alpha \in F^*$ и $\gamma = 0$ также допускается.

Теорема 4.2. Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d_i -простая алгебра над полем F , $i = 1, 2$. Тогда если $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ является изоморфизмом, то либо $\phi = \phi(\gamma)$, либо $\mathcal{A} \cong F_2[x]$ и ϕ является изоморфизмом вида $\psi_{\alpha, \beta}, \psi_{\alpha, \beta}^0, \phi_{\Delta}, \phi_k^t, \phi_{k, t}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $\theta = 0$ при $\mathcal{A} \not\cong F_2[x]$ рассмотрен в теореме 4.1. Пусть $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ является изоморфизмом, $\theta \neq 0$, $\Theta := \text{Ker } \theta$. Тогда из (12') получаем $\theta(\mathcal{A}\Theta) = 0$, т. е. $\mathcal{A}\Theta \subseteq \Theta$. Из (14') немедленно следует

$$\theta(\mathcal{A} \cdot d_1(\Theta)) = 0, \quad \mathcal{A} \cdot d_1(\Theta) \subseteq \Theta, \quad d_1(\Theta) \subseteq \Theta.$$

Значит, $\Theta \trianglelefteq_d \mathcal{A}$, т. е. $\Theta = 0$. Таким образом, θ невырожденно.

Из невырожденности θ следует существование $c \in \mathcal{A}$ такого, что $\theta(c) = 1$. Тогда из (14') получаем $\theta(ad_1(c)) = \theta(a)$ для любого $a \in \mathcal{A}$, откуда $ad_1(c) = a$ и $d_1(c) = 1$. Пусть $d := d_2$. Полагая $\theta(1) = \gamma$, при $b = 1$ из (12') получаем

$$\theta(a) = \gamma\psi(a) + d(\gamma)\eta(a) \quad (15)$$

для любого $a \in \mathcal{A}$.

Если $\chi(F) \neq 2$, то $\theta(ac) = \psi(a)$ для любого $a \in \mathcal{A}$ по (12'). Из (13') при $a = 1$, $b = c$ следует, что либо $\psi(c)$ обратим, либо $d\psi(c)$ обратим. Опять же (13') дает $\psi(c) = \pi(c)d\psi(c)$ при $a = b = c$. Таким образом, в любом случае $d\psi(c)$ обратим. Если же $\chi(F) = 2$ и $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$, то лемма 4.4 обеспечивает существование $e \in \mathcal{A}$ такого, что $d\psi(e)$ обратим. Теперь из коммутативности и (11') получаем $\eta(a)d\psi(b) = \eta(b)d\psi(a)$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$, откуда следует существование $\xi \in \mathcal{A}$ такого, что

$$\eta(a) = \xi d\psi(a)$$

для любого $a \in \mathcal{A}$. Далее, из последнего равенства и (15) выводим $\text{Ker } \psi \subseteq \text{Ker } \eta$ и $\text{Ker } \psi \cap \text{Ker } \eta = 0$, т. е. получили невырожденность ψ .

Действуя d на (11'), домножая полученное равенство на ξ и вычитая (11''), с учетом получаемого из коммутативности и (11'') равенства $\eta(a)d\eta(b) = \eta(b)d\eta(a)$ приходим к соотношению $\xi\eta(\mathcal{A})d^2\psi(\mathcal{A}) = 0$.

Если $\eta(\mathcal{A})$ содержит обратимые элементы, то ξ обратим. Тогда равенство $\xi\eta(\mathcal{A})d^2\psi(\mathcal{A}) = 0$ дает $d^2 = 0$. Поскольку $\dim \text{Im } d = n - 1$, где $n = \dim_F \mathcal{A}$, последнее равенство допустимо только в случае $\mathcal{A} = F_2[x]$, который и не рассматривается в настоящий момент.

Если же $\eta(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{N}$, то ξ нильпотентен и $\xi\eta(\mathcal{A}) = 0$, так как $d^2 \neq 0$ и $\mathcal{A} \cdot d^2(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Тогда $\xi^2 d\psi(\mathcal{A}) = 0$, $\xi^2 = 0$ и $\eta(\mathcal{A})^2 = 0$. Если $\eta = 0$, то приходим к автоморфизмам $\phi(\gamma)$ из леммы 4.10. Пусть $I := \text{Ker } \eta \neq \mathcal{A}$. Из леммы 4.3 получаем $I = F$, но тогда $\dim \text{Im } \eta = n - 1$, т. е. $\mathcal{A} \cong F_2[x]$, что противоречит текущему предположению.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Как и в лемме 4.4, если $\eta \neq 0$, то $\eta(\mathcal{N}) \not\subseteq \mathcal{N}$, и приходим к следующим возможностям:

- 1) $\eta = 0$, в этом случае выделяются изоморфизмы $\psi(\gamma)$ из леммы 4.10, если θ невырожденно, и изоморфизмы $\psi_{\alpha,\beta}^0$ из леммы 4.9, если $\theta = 0$;
- 2) $\theta(1) \in \mathcal{N}$ — получаются изоморфизмы $\psi_{\alpha,\beta}$ и $\phi_{k,t}$ из лемм 4.9 и 4.8;
- 3) $\theta(1) \notin \mathcal{N}$ и $\text{Ker } \psi \neq 0$ — в этом случае изоморфизмы имеют вид ϕ_k^t из леммы 4.7;
- 4) $\theta(1) \notin \mathcal{N}$ и $\text{Ker } \psi = 0$ — приходим к изоморфизмам ϕ_Δ из леммы 4.6. $\square$

Обозначим через $\mathcal{A}^*$ множество обратимых $\alpha \in \mathcal{A}$ с условием, что существует обратимый $\gamma \in \mathcal{A}$ (или нулевой, если $\alpha \in F$) такой, что $\gamma^2 + \alpha d_2(\gamma) = 0$ и $d_2(\gamma) \in F$. Комбинируя полученные результаты, приходим к следующему результату.

Теорема 4.3. Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d_i -простая алгебра над алгебраически замкнутым полем, $i = 1, 2$. Алгебры $W_{d_1}(\mathcal{A})$ и $W_{d_2}(\mathcal{A})$ изоморфны тогда и только тогда, когда d_1 и d_2 являются α -сопряженными посредством $\psi \in \text{Aut}_d^* \mathcal{A}$.

§ 5. Изоморфизмы эндоморфов и обобщенных дублей Витта

Заметим, что дубль Витта $\mathcal{A}_d$ и обобщенный дубль Витта $W_d(\mathcal{A})$ не изоморфны, так как $W_d(\mathcal{A})$ содержит единичный элемент, а $\mathcal{A}_d$ не содержит такого элемента. По той же самой причине $\mathcal{A}_d$ и $E(\mathcal{B})$ не изоморфны ни для каких алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Так как левосимметрическая алгебра $(\mathbb{A}, d, a)$ является алгеброй Новикова, т. е. удовлетворяет тождеству правокоммутативности, то $(\mathbb{A}, d, a)$ не изоморфна ни одной из алгебр $\mathcal{A}_d$, $W_d(\mathcal{A})$, $E(\mathcal{A})$, которые не являются алгебрами Новикова.

Если $\mathcal{B}$ — левосимметрическая алгебра размерности 1 над полем F характеристики $p > 0$, то легко проверяется, что $E_l(\mathcal{B}) \cong W_d(F)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ — алгебра с нулевым умножением.

Теорема 5.1. Пусть $\mathcal{B}$ — левосимметрическая алгебра над полем F характеристики $p > 0$, $\dim \mathcal{B} > 1$. Тогда $E_l(\mathcal{B}) \not\cong W_d(B_{n,p}(F))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) : E(\mathcal{B}) \mapsto W_d(\mathcal{A})$ — изоморфизм алгебр, где $\phi(x) = \psi(x) + \eta(x)$, $\phi(A) = \theta(A) + \pi(A)$ для любых $x \in \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{B})$, $\psi, \eta : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}$, $\theta, \pi : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{A}$. Тогда, так как $\phi(A \circ x) = \phi(xA)$, то

$$\phi(A \circ x) = \phi(A) \cdot \phi(x), \quad \psi(xA) + \overline{\eta(xA)} = (\theta(A) + \overline{\pi(A)}) \cdot (\psi(x) + \overline{\eta(x)}),$$

откуда после выкладок, приравнявая соответствующие элементы из $\mathcal{A}$, получаем

$$\psi(xA) = \psi(x)\theta(A) + \pi(A)d\psi(x)$$

для всех $x \in \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{M}$, стало быть, если $x \in \text{Ker } \psi$, то $xA \in \text{Ker } \psi$ для любого $A \in \mathcal{M}$. Следовательно, если $\text{Ker } \psi \neq 0$, то $\psi = 0$. В этом случае $\text{Ker } \eta = 0$, что невозможно из соображений размерности. Значит, $\text{Ker } \psi = 0$, что невозможно по тем же соображениям. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelfand I. M., Dorfman I. Ya. Hamiltonian operators and algebraic structures related to them // Funct. Anal. Appl. 1979. V. 13, N 4. P. 248–262.
2. Xu X. Novikov–Poisson algebras // J. Algebra. 1997. V. 190, N 2. P. 253–279.
3. Zhelyabin V. N., Zakharov A. S. On finite-dimensional simple Novikov algebras of characteristic p // Sib. Math. J. 2024. V. 65, N 3. P. 680–687.
4. Zelmanov E. On a class of local translation invariant Lie algebras // Soviet Math. Dokl. 1987. V. 35. P. 216–218.
5. Pozhidaev A. P., Zhelyabin V. N. On simple and semisimple finite-dimensional Novikov algebras and their automorphisms // J. Algebra. Accepted.
6. Xu X. Classification of simple Novikov algebras and their irreducible modules of characteristic 0 // J. Algebra. 2001. V. 246, N 2. P. 673–707.
7. Пожидаев А. П. Об эндоморфах правосимметрических алгебр // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1077–1086.
8. Пожидаев А. П. О конструкции Мицухары для эндоморфов // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 1. С. 41–54.
9. Пожидаев А. П. Группы автоморфизмов прелиевых дублей Витта // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 6. С. 1214–1226.
10. Harper L. R., Jr. On differentiably simple algebras // Trans. Am. Math. Sci. 1961. V. 100, N 1. P. 63–72.
11. Пожидаев А. П. Об обобщенной конструкции Мицухары // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 545–559.

Поступила в редакцию 12 марта 2025 г.

После доработки 12 марта 2025 г.

Принята к публикации 13 мая 2025 г.

Пожидаев Александр Петрович (ORCID 0000-0002-2038-166X)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru