

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛЯ БЕЛЬТРАМИ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

М. В. Нецадим

Аннотация. Изучаются обобщенные поля Бельтрами, которые определяются как решение системы $\operatorname{rot}^n A = \lambda A$, где λ — функция и $A = (P, Q, R)$ — вектор-функция переменных (x, y, z) , $n \in \mathbb{N}$. Для $\lambda = 1$ и произвольного натурального n система приводится к вполне интегрируемому виду, причем результат зависит от четности числа n . Для $n = 1$ и произвольной функции λ система также приведена к вполне интегрируемому виду.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.513

Ключевые слова: обобщенные поля Бельтрами, переопределенные системы дифференциальных уравнений в частных производных, условия совместности.

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

Введение. Векторное поле $A = (P, Q, R)$ переменных (x, y, z) в $\mathbb{R}^3$, параллельное собственному ротору, называется полем Бельтрами [1–3]. Аналитически это представляется следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\operatorname{rot} A = \lambda A,$$

где λ — некоторая функция переменных (x, y, z) и $\operatorname{rot} A = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$. Это же соотношение можно записать в виде

$$A \times \operatorname{rot} A = 0,$$

исключив функцию λ , с использованием операции векторного произведения.

Хорошо известно, что поля Бельтрами являются стационарными решениями несжимаемых уравнений Эйлера в $\mathbb{R}^3$. Более того, они оказались очень мощными инструментами для анализа структуры решений зависящих от времени уравнений Эйлера и Навье — Стокса (см., например, [4–8]). В контексте физики плазмы поля Бельтрами известны как поля без сил. Анализ полей Бельтрами с непостоянным коэффициентом пропорциональности чрезвычайно сложен. В этой связи одним из основных вопросов является определение, для каких функций λ существует нетривиальное векторное поле, удовлетворяющее уравнениям (1).

В настоящей работе рассматриваются векторные поля $A = (P, Q, R)$, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{rot}^n A = \lambda A, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5.(проект FWNF-2022-0009).

где λ — функция и $A = (P, Q, R)$ — вектор-функция переменных (x, y, z) , $n \in \mathbb{N}$. Решения системы (1) будем называть *обобщенными полями Бельтрами*. Соотношение (1) рассматривается с точки зрения переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных [9, 10].

Система (1) для $\lambda = 1$ и произвольного n приведена к вполне интегрируемому виду. При этом результат зависит от четности натурального числа n (теоремы 1 и 2). При $n = 1$ и произвольной функции λ система (1) также приведена к вполне интегрируемому виду (теорема 3). Полученные результаты могут быть использованы, например, для конструктивного решения прямых и обратных задач математической физики [11–14].

Заметим, что впервые зависимость между скоростью и вихрем вида (1) для $n = 1$ была предложена в работе И. С. Громека [15] для стационарных решений уравнений Эйлера невязкой несжимаемой жидкости и позже через 8 лет независимо Бельтрами [16]. В российской литературе такие течения называются течениями Громеки — Бельтрами или винтовыми течениями. История вопроса подробно изложена в монографии О. Ф. Васильева [17].

В работе используются стандартные обозначения для операторов векторного анализа: $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — градиент, $\Delta w = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ — оператор Лапласа. Частные производные по переменным обозначаются нижними индексами, например, $\frac{\partial P}{\partial x} = P_x$. Все рассматриваемые функции предполагаются аналитическими.

1. Уравнение $\text{rot}^{2m+1} A = A$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Общее решение системы*

$$\text{rot}^{2m+1} A = A, \quad (1.1)$$

где $m \geq 0$ целое, определяется из решения следующей системы уравнений:

- 1) функция R — решение уравнения $\Delta D^2 R + R = 0$, где $D = (-1)^m \Delta^m$;
- 2) функция Q — решение системы уравнений:

$$\begin{aligned} D^2 Q_{zz} &= D^2 R_{yz} - DR_x - Q, \\ DQ_{xz} &= DR_{xy} + Q_y + R_z, \\ DQ_{yz} &= -DR_{xx} - DR_{zz} - Q_x, \\ Q_{xx} &= -Q_{yy} - \Delta DR_x - R_{yz}, \end{aligned}$$

которая находится в инволюции в силу уравнения на R ;

- 3) функция P определяется формулой $P = DR_y - DQ_z$.

Доказательство. Так как $\text{div } A = 0$, то $\text{rot}^2 A = \nabla(\text{div } A) - \Delta A = -\Delta A$. Следовательно,

$$\text{rot}^{2m} A = (-1)^m \Delta A$$

и уравнение (1.1) равносильно системе

$$\Delta^m \text{rot } A = (-1)^m A, \quad \text{div } A = 0. \quad (1.2)$$

Обозначим $D = (-1)^m \Delta^m$. Тогда систему (1.2) можно переписать в виде

$$DR_y - DQ_z = P, \quad DP_z - DR_x = Q, \quad DQ_x - DP_y = R, \quad P_x + Q_y + R_z = 0.$$

Из первого уравнения исключаем $P = DR_y - DQ_z$. Оставшиеся уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} D(DR_y - DQ_z)_z - DR_x &= Q, \\ DQ_x - D(DR_y - DQ_z)_y &= R, \\ DR_{xy} - DQ_{xz} + Q_y + R_z &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} D^2 Q_{zz} &= D^2 R_{yz} - DR_x - Q, \\ D^2 Q_{yz} &= D^2 R_{yy} - DQ_x + R, \\ DQ_{xz} &= DR_{xy} + Q_y + R_z. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Составляем соотношение $D(DQ_{xz})_z = (D^2 Q_{zz})_x$. В силу (1.3) оно примет вид

$$D^2 R_{xyz} + DQ_{yz} + DR_{zz} = D^2 R_{xyz} - DR_{xx} - Q_x$$

или

$$DQ_{yz} + DR_{zz} = -DR_{xx} - Q_x.$$

Добавляем это соотношение к системе (1.3):

$$\begin{aligned} D^2 Q_{zz} &= D^2 R_{yz} - DR_x - Q, & D^2 Q_{yz} &= D^2 R_{yy} - DQ_x + R, \\ DQ_{xz} &= DR_{xy} + Q_y + R_z, & DQ_{yz} &= -DR_{xx} - DR_{zz} - Q_x. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Составляем соотношение $D(DQ_{yz}) = D^2 Q_{yz}$. В силу (1.4) оно примет вид

$$-D^2 R_{xx} - D^2 R_{zz} - DQ_x = D^2 R_{yy} - DQ_x + R$$

или

$$\Delta D^2 R + R = 0. \quad (1.5)$$

Система (1.4) принимает вид

$$\begin{aligned} D^2 Q_{zz} &= D^2 R_{yz} - DR_x - Q, & DQ_{xz} &= DR_{xy} + Q_y + R_z, \\ DQ_{yz} &= -DR_{xx} - DR_{zz} - Q_x, & \Delta D^2 R + R &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Составляем соотношение $(D^2 Q_{zz})_y = D(DQ_{yz})_z$. В силу (1.6) оно примет вид

$$D^2 R_{yyz} - DR_{xy} - Q_y = -D^2 R_{xxz} - D^2 R_{zzz} - DQ_{xz}$$

или

$$\Delta D^2 R_z - DR_{xy} - Q_y = -DR_{xy} - Q_y - R_z,$$

или

$$(\Delta D^2 R + R)_z = 0$$

— тождество в силу (1.6).

Составляем соотношение $(DQ_{xz})_y = (DQ_{yz})_x$. В силу (1.6) оно примет вид

$$DR_{xyy} + Q_{yy} + R_{yz} = -DR_{xxx} - DR_{xzz} - Q_{xx}$$

или

$$\Delta DR_x + R_{yz} = -Q_{xx} - Q_{yy}. \quad (1.7)$$

Добавляем (1.7) к системе (1.6):

$$\begin{aligned} D^2 Q_{zz} &= D^2 R_{yz} - DR_x - Q, & DQ_{xz} &= DR_{xy} + Q_y + R_z, \\ DQ_{yz} &= -DR_{xx} - DR_{zz} - Q_x, & Q_{xx} &= -Q_{yy} - \Delta DR_x - R_{yz}, \\ \Delta D^2 R + R &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Составляем соотношение $(DQ_{xz})_x = (DQ_{xx})_z$. В силу (1.8) оно примет вид

$$DR_{xxy} + Q_{xy} + R_{xz} = -DQ_{yyz} - \Delta D^2 R_{xz} - DR_{yzz}.$$

В силу (1.5)

$$DR_{xxy} + Q_{xy} = -DQ_{yyz} - DR_{yzz}.$$

Подставляем DQ_{yz} в силу (1.8):

$$DR_{xxy} + Q_{xy} = DR_{xxy} + DR_{yzz} + Q_{xy} - DR_{yzz}$$

— тождество.

Составляем соотношение $(DQ_{yz})_{xx} = (DQ_{xx})_{yz}$. В силу (1.8) оно примет вид

$$-DR_{xxx} - DR_{xxz} - Q_{xx} = -DQ_{yyz} - \Delta D^2 R_{xyz} - DR_{yzz}.$$

В силу (1.8) подставляем DQ_{yz} :

$$-DR_{xxx} - DR_{xxz} - Q_{xx} = DR_{xxy} + DR_{yzz} + Q_{xy} - \Delta D^2 R_{xyz} - DR_{yzz}$$

или

$$-DR_{xxx} - DR_{xxz} - Q_{xx} = DR_{xxy} + Q_{xy} - \Delta D^2 R_{xyz},$$

или

$$-\Delta DR_{xx} - Q_{xx} = Q_{xy} - \Delta D^2 R_{xyz}.$$

В силу (1.5)

$$-\Delta DR_{xx} - Q_{xx} = Q_{xy} + R_{xyz}.$$

В силу (1.8) подставляем Q_{xx} :

$$-\Delta DR_{xx} + Q_{xy} + \Delta DR_{xx} + R_{xyz} = Q_{xy} + R_{xyz}$$

— тождество.

Составляем соотношение $(D^2 Q_{zz})_{xx} = D^2(Q_{xx})_{zz}$. В силу (1.8) оно примет вид

$$D^2 R_{xyz} - DR_{xxx} - Q_{xx} = -D^2 Q_{yyz} - \Delta D^3 R_{zz} - D^2 R_{yzz}.$$

В силу (1.8) подставляем DQ_{yz} :

$$D^2 R_{xyz} - DR_{xxx} - Q_{xx} = -D(-DR_{xx} - DR_{zz} - Q_x)_{yz} - \Delta D^3 R_{zz} - D^2 R_{yzz}$$

или

$$-DR_{xxx} - Q_{xx} = DQ_{xyz} - \Delta D^3 R_{zz}.$$

В силу (1.5)

$$-DR_{xxx} - Q_{xx} = DQ_{xyz} + DR_{zz}.$$

В силу (1.8) подставляем DQ_{yz} :

$$-DR_{xxx} - Q_{xx} = -DR_{xxx} - DR_{zz} - Q_{xx} + DR_{zz}$$

— тождество.

Итак, система (1.8) находится в инволюции.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если оператор D представить в виде

$$D = (-1)^m (\partial_z^{2m} + \dots),$$

то систему уравнений на функцию Q можно представить в виде

$$\partial_z^{4m+2} Q = \dots, \quad \partial_z^{2m+1} \partial_x Q = \dots, \quad \partial_z^{2m+1} \partial_y Q = \dots, \quad \partial_x^2 Q = \dots,$$

разрешенном относительно старших производных, считая, что задан порядок $z > x > y$. Старший моном имеет вид $(2, 1, 4m+2)$, и можно выписать начальные данные по Томасу для данной системы:

$$\partial_z^p \partial_x^q Q|_{z=x=y=0} = \alpha_{pq}, \quad p = 0, \dots, 4m+1, \quad q = 0, 1,$$

где α_{pq} — произвольные константы,

$$\partial_z^{4m+2} \partial_x^q Q|_{x=y=0} = \beta_q(z), \quad q = 0, 1,$$

где $\beta_q(z)$ — произвольные функции переменной z ,

$$\partial_z^p \partial_x^2 Q|_{z=y=0} = \gamma_p(x), \quad p = 0, \dots, 4m+1,$$

где $\gamma_p(x)$ — произвольные функции переменной x ,

$$\partial_z^p \partial_x^q \partial_y Q|_{z=x=0} = \delta_{pq}(y), \quad p = 0, \dots, 4m+1, \quad q = 0, 1,$$

где $\delta_{pq}(y)$ — произвольные функции переменной y .

Для функции R начальные данные имеют следующий вид:

$$\partial_z^k R|_{z=0} = r_k(x, y), \quad p = 0, \dots, 2m+1,$$

где $r_k(x, y)$ — произвольные функции переменных x и y .

2. Уравнение $\text{rot}^{2m} A = A$. Рассмотрим уравнение

$$\text{rot}^{2m} A = A. \quad (2.1)$$

Так как $\text{rot}^2 A = \nabla \text{div} A - \Delta A$ и $\text{div} A = \text{div} \text{rot}^{2m} A = 0$, рассматриваемое уравнение равносильно системе

$$\Delta^m A = (-1)^m A, \quad \text{div} A = 0.$$

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Пусть

$$L = \partial_y^n - L_0$$

— дифференциальный оператор порядка n , где

$$L_0 = \sum_{0 \leq i+j+k \leq n, j \neq n} a_{ijk} \partial_x^i \partial_y^j \partial_z^k,$$

a_{ijk} — постоянные коэффициенты. Тогда система

$$LP = P, \quad LQ = Q, \quad LR = R, \quad P_x + Q_y + R_z = 0$$

находится в инволюции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем систему в виде

$$\partial_y^n P = L_0 P + P, \quad \partial_y^n Q = L_0 Q + Q, \quad \partial_y^n R = L_0 R + R, \quad P_x = -Q_y - R_z.$$

Составим соотношение $(\partial_y^n P)_x = \partial_y^n (P_x)$. Имеем

$$L_0 P_x + P_x = -\partial_y^n (Q_y + R_z), \quad L_0 P_x + P_x = -(\partial_y^n Q)_y - (\partial_y^n R)_z,$$

$$L_0 P_x + P_x = -(L_0 Q + Q)_y - (L_0 R + R)_z, \quad L_0 (P_x + Q_y + R_z) + P_x + Q_y + R_z = 0$$

— тождество в силу системы.

Лемма доказана.

В силу леммы система

$$\Delta^m A = (-1)^m A, \quad \operatorname{div} A = 0$$

находится в инволюции.

Найдем произвол решения этой системы.

Функция P находится из системы

$$P_x = -Q_y - R_z, \quad \partial_y^{2m} P = (-1)^m P - (\Delta^m - \partial_y^{2m})P$$

по начальным данным

$$\partial_y^k P|_{x=y=0} = f_k(z), \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1.$$

Функции Q, R находятся из системы

$$\partial_y^{2m} Q = (-1)^m Q - (\Delta^m - \partial_y^{2m})Q, \quad \partial_y^{2m} R = (-1)^m R - (\Delta^m - \partial_y^{2m})R$$

по начальным данным

$$\partial_y^k Q|_{y=0} = q_k(x, z), \quad \partial_y^k R|_{y=0} = r_k(x, z), \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1.$$

Здесь $f_k(z), q_k(x, z), r_k(x, z), k = 0, 1, \dots, 2m-1$, — произвольные аналитические функции своих аргументов.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть

1) функции $Q(x, y, z), R(x, y, z)$ — решение системы Коши — Ковалевской

$$\partial_y^{2m} Q = (-1)^m Q - (\Delta^m - \partial_y^{2m})Q, \quad \partial_y^{2m} R = (-1)^m R - (\Delta^m - \partial_y^{2m})R$$

с начальными данными

$$\partial_y^k Q|_{y=0} = q_k(x, z), \quad \partial_y^k R|_{y=0} = r_k(x, z), \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1,$$

где $q_k(x, z), r_k(x, z), k = 0, 1, \dots, 2m-1$, — произвольные аналитические функции своих аргументов;

2) функция $P(x, y, z)$ — решение системы Коши — Ковалевской

$$P_x = -Q_y - R_z, \quad \partial_y^{2m} P = (-1)^m P - (\Delta^m - \partial_y^{2m})P$$

с начальными данными

$$\partial_y^k P|_{x=y=0} = f_k(z), \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1,$$

где $f_k(z), k = 0, 1, \dots, 2m-1$, — произвольные аналитические функции своих аргументов.

Тогда вектор-функция $A = (P, Q, R)$ является решением уравнения (2.1).

3. Уравнение $\operatorname{rot} A = \lambda A$. Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть

- 1) $R(x, y, z) \neq 0$ — произвольная функция;
- 2) функции $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ — решение системы Коши — Ковалевской

$$P_z = R_x + \frac{Q}{R}(Q_x - P_y), \quad Q_z = R_y - \frac{P}{R}(Q_x - P_y)$$

с начальными данными

$$P|_{z=0} = P_0(x, y), \quad Q|_{z=0} = Q_0(x, y),$$

где $P_0(x, y), Q_0(x, y)$ — произвольные аналитические функции.

Тогда функция

$$\lambda = \frac{1}{R}(Q_x - P_y)$$

и вектор-функция $A = (P, Q, R)$ являются решением уравнения

$$\operatorname{rot} A = \lambda A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система $\operatorname{rot} A = \lambda A$ имеет вид

$$R_y - Q_z = \lambda P, \quad P_z - R_x = \lambda Q, \quad Q_x - P_y = \lambda R.$$

Из третьего уравнения выразим

$$\lambda = \frac{1}{R}(Q_x - P_y).$$

Тогда первое и второе уравнения примут вид

$$R_y - Q_z = \frac{P}{R}(Q_x - P_y), \quad P_z - R_x = \frac{Q}{R}(Q_x - P_y).$$

Разрешим их относительно производных:

$$P_z = R_x + \frac{Q}{R}(Q_x - P_y), \quad Q_z = R_y - \frac{P}{R}(Q_x - P_y).$$

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Сформулируем следующие вопросы, которые являются естественным продолжением исследований данной статьи.

1. Рассмотреть систему

$$\operatorname{rot}^n A = \lambda A.$$

Здесь $\lambda(x, y, z)$ — заданная скалярная функция. Исследовать на совместность в зависимости от λ при $n \geq 2$.

2. Исследовать групповые свойства [18–20] системы

$$\operatorname{rot}^n A = \lambda A.$$

в зависимости от функции $\lambda(x, y, z)$ при $n \geq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аминов Ю. А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.
2. Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2020.
3. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн: Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972.
4. Shi Changchun, Huang Yongnian. Some properties of three-dimensional Beltrami flows // Acta Mechanica Sinica. 1991. V. 7, N 4. P. 289–294.
5. Clelland J. N., Klotz T. Beltrami fields with nonconstant proportionality factor // Arch. Ration. Mech. Anal. 2020. V. 236, N 1. P. 767–800.
6. Enciso A., Luca R., Peralta-Salas D. Vortex reconnection in the three dimensional Navier–Stokes equations // Adv. Math. 2017. V. 309. P. 452–486.
7. Enciso A., Peralta-Salas D. Beltrami fields with a nonconstant proportionality factor are rare // Arch. Ration. Mech. Anal. 2016. V. 220, N 1. P. 243–260.
8. Sato N., Yamada M. Local representation and construction of Beltrami fields // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2019. V. 391. P. 8–16.
9. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М.: ГИИТЛ, 1948.
10. Помаре Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.
11. Аниконов Ю. Е., Аюпова Н. Б., Бардаков В. Г., Голубятников В. П., Нещади́м М. В. Обратимость отображений и обратные задачи // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 382–432.
12. Аниконов Ю. Е. Конструктивные методы исследования обратных задач для эволюционных уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 2. С. 3–20.
13. Аниконов Ю. Е., Нещади́м М. В. Алгебро-аналитические способы построения решений дифференциальных уравнений // Вестник НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, № 2. С. 3–21.
14. Нещади́м М. В. Функционально инвариантные решения системы Максвелла // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 66–74.
15. Громека И. С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости (докторская диссертация). Отд. изд. Казань, Казань, 1881. (Уч. зап. Казанского ун-та. 1882, кн. III).
16. Beltrami E. Considerations on hydrodynamics // Int. J. Fusion Energy. 1985. V. 3, N 3. P. 53–57.
17. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных течений. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958.
18. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
19. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
20. Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Дужин С. В., Самохин А. В., Торхов Ю. Н., Хорькова Н. Г., Четвериков В. Н. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. М.: Факториал, 1997.

Поступила в редакцию 25 января 2025 г.

После доработки 12 марта 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Нещади́м Михаил Владимирович (ORCID 0000-0002-9463-7496)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

neshch@math.nsc.ru