

УДК 512.542

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ С УЗКИМ КЛАССОМ СОПРЯЖЕННЫХ ИНВОЛЮЦИЙ

Ю. М. Мао, С. Ц. Ма,
Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. В работе В. Д. Мазурова 2000 г. изучались периодические группы, содержащие инволюции (элементы порядка 2), централизаторы которых являются абелевыми 2-группами. В ней дано описание таких групп при условии, что в них есть нециклическая подгруппа порядка 4. В настоящей работе рассматривается случай, когда централизаторы инволюции группы — локально циклические 2-группы.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.512

Ключевые слова: периодическая группа, инволюция, централизатор, локально конечная группа.

Введение

В работе [1] изучались периодические группы, содержащие инволюции (элементы порядка 2), централизаторы которых являются абелевыми 2-группами. В ней доказано, в частности, что любая такая группа либо локально конечна, либо централизаторы ее инволюций являются бесконечными локально циклическими группами.

В настоящей работе рассматривается случай, когда централизаторы инволюции группы — локально циклические 2-группы.

Теорема 1. Пусть a — инволюция (т. е. элемент порядка 2) в периодической группе G , H — централизатор a в G , т. е.

$$H = \{h \in G \mid ah = ha\}, \quad R = \{r \in G \mid r^a = ara = r^{-1}\}.$$

Если H — локально циклическая 2-группа, то любые две инволюции сопряжены в подгруппе, ими порожденной, любой элемент четного порядка из G является 2-элементом и сопряжен с элементом из H ; порядок любого элемента из R нечетен и справедливы следующие утверждения.

1. $G = RH = HR$ и $R \cap H = 1$. Более того, любой элемент $g \in G$ однозначно представляется в виде $g = g_- g_+$, где $g_- \in R$, $g_+ \in H$, а именно,

$$g_- = (g^a g^{-1})^{-\frac{1}{2}}, \quad g_+ = g_-^{-1} g = (g^a g^{-1})^{\frac{1}{2}} \cdot g.$$

Работа первых двух авторов выполнена при поддержке государственного фонда естественных наук Китая (проект 12371021), работа третьего автора выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-41-10003, работа четвертого автора выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0002).

Здесь для элемента x из G нечетного порядка $y = x^{\frac{1}{2}}$ означает однозначно определенный элемент y со свойством $y^2 = x$.

Кроме того, справедливы следующие утверждения.

1(a). Для $r, s \in R$ тогда и только тогда выполняется равенство $rs = sr$, когда $rs \in R$. R тогда и только тогда является подгруппой G , когда $RR \subseteq R$. Далее, $RR \subseteq R$ тогда и только тогда, когда $[r, s] = 1$ для любых $r, s \in R$.

1(b). Множество R инвариантно относительно H при сопряжении в G . $Ra = \{ra \mid r \in R\}$ совпадает с множеством всех инволюций из G . Любая инволюция сопряжена в G с a .

1(c). Множество RR равно $\{xy \mid x, y \text{ — инволюции в } G\}$ и инвариантно относительно сопряжения в G .

2. Если $RR \subseteq R$, то R — нормальная абелева подгруппа в G и либо $R = 1$, G — локально циклическая группа, либо G — локально конечная группа Фробениуса с ядром R и дополнением H , т. е. G — полупрямое произведение нормальной абелевой подгруппы R на локально циклическую 2-подгруппу H с единственной инволюцией a , $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G$, не лежащего в H .

3. Если $RR \not\subseteq R$, то G — простая не локально конечная группа со следующими свойствами:

(a) $R = \{rsr \mid r, s \in R\}$,

(b) $G = \langle R \rangle = \langle rs \mid r, s \in R \rangle$,

(c) $H = \langle (g^a g^{-1})^{\frac{1}{2}} \cdot g \mid g \in G \rangle$,

(d) Подгруппа $\langle x, y \rangle$, где $x, y \in R$ и $[x, y] \neq 1$, является простой не локально конечной группой, содержащей H .

Доказательство теоремы 1 использует следующий результат.

Теорема 2. Пусть a — инволюция в периодической группе G и для любого $g \in G$ порядок элемента aa^g нечетен. Тогда

$$G = RH = HR,$$

где $H = C_G(a)$ — централизатор инволюции a в G , а $R = \{r \in G \mid r^a = r^{-1}\}$. Кроме того, $H \cap R = 1$.

§ 1. Доказательство теоремы 2

Отметим вначале следующий хорошо известный факт.

Лемма 1. Если x — элемент нечетного порядка в группе, то $\langle x \rangle$ содержит единственный элемент y , для которого $y^2 = x$. При этом $\langle x \rangle = \langle y \rangle$.

Доказательство. Если $x = 1$, то $y = 1$. Пусть порядок x равен $2n+1$, где n — натуральное число. Положим $y = x^{n+1}$. Тогда $y^2 = x^{2n+2} = x^{2n+1} \cdot x = x$. Если $z \in \langle x \rangle$ и $z^2 = x$, то $(y^{-1}z)^2 = y^{-2}z^2 = x^{-1}x = 1$. Поскольку $y^{-1}z$ — элемент нечетного порядка, то $y^{-1}z = 1$, т. е. $y = z$. Очевидно, $x \in \langle y \rangle$. Поскольку $y \in \langle x \rangle$, то $\langle x \rangle = \langle y \rangle$. Лемма доказана.

Обозначим элемент y из леммы 1 через $y^{\frac{1}{2}}$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть G — группа из условия теоремы 2. Если $g \in G$, то элемент $g^a g^{-1} = (aga)g^{-1} = a(gag^{-1})$ — произведение двух инволюций a и gag^{-1} . По условию теоремы его порядок нечетен, и по лемме 1 для него однозначно определены элементы

$$g_- = (g^a g^{-1})^{-\frac{1}{2}} \text{ и } g_+ = (g^a g^{-1})^{\frac{1}{2}} \cdot g.$$

Доказательство следующей леммы использует идею доказательства леммы 1.2 из [2].

Лемма 2. Для любого $g \in G$

- (a) $g_-^a = g_-^{-1}$,
- (b) $g_+^a = g_+ \in H$,
- (c) $g = g_-g_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) $g_-^a = ((g^a g^{-1})^{-\frac{1}{2}})^a = (g(g^a)^{-1})^{-\frac{1}{2}} = ((g^a)g^{-1})^{\frac{1}{2}} = g_-^{-1}$.

(b) $g_+^a = ((g^a g^{-1})^{\frac{1}{2}}g)^a = ((g^a g^{-1})^{-\frac{1}{2}})g^a = (g^a g^{-1})^{-\frac{1}{2}}g^a g^{-1}g = (g^a g^{-1})^{-\frac{1}{2}} \cdot (g^a g^{-1})^{\frac{1}{2}}(g^a g^{-1})^{\frac{1}{2}}g = (g^a g^{-1})^{\frac{1}{2}}g$.

(c) $g_-g_+ = (g^a g^{-1})^{-\frac{1}{2}} \cdot (g^a g^{-1})^{\frac{1}{2}}g = g$.

Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы 2. По лемме 2 $g_- \in R$, $g_+ \in H$ и $G = RH$. Очевидно, $R^{-1} = \{r^{-1} \mid r \in R\} = R$ и $H^{-1} = H$. Поэтому

$$G = G^{-1} = (RH)^{-1} = H^{-1}R^{-1} = HR.$$

Теорема 2 доказана.

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 3 (В. П. Шунков [3]). Периодическая группа, содержащая инволюцию, централизатор которой конечен, локально конечна.

Пусть теперь G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1.

Лемма 4. Если b — инволюция в G , то ab — элемент нечетного порядка и b сопряжен с a . Все инволюции в G сопряжены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что $\langle a, b \rangle$ — группа диэдра и a инвертирует ab . Если при этом порядок ab четен, то $\langle ab \rangle$ содержит инволюцию $z \neq a$, перестановочную с a , т. е. $\langle z, a \rangle$ — нециклическая подгруппа в H ; противоречие. Поэтому a и b сопряжены. Ввиду произвольности b все инволюции в G сопряжены.

Лемма 5. Если $g \in G$, то либо g — 2-элемент, сопряженный с элементом из H , либо порядок g нечетен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если порядок g четен, то g содержится в централизаторе инволюции. Поскольку все инволюции в G сопряжены, то g сопряжен с элементом из H , т. е. является 2-элементом.

Лемма 6. G удовлетворяет условиям теоремы 2 и выполнен п. 1 теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 вытекает, что aa^g — элемент нечетного порядка для любого $g \in G$, т. е. выполнены условия теоремы 2. Теперь утверждаемое вытекает из заключения теоремы 2 и леммы 2 из ее доказательства.

Пусть $RR \subseteq R$. Так как $R = R^{-1} = \{r^{-1} \mid r \in R\}$, то R — подгруппа. Если $R = 1$, то $G = RH = H$ и G — локально циклическая группа. Если $R \neq 1$, то R абелева, поскольку a инвертирует каждый элемент из R . Для $r \in R$ и $g = sh \in G$, где $s \in R$, $h \in H$, имеем $r^g = r^h$ и

$$(r^h)^a = (r^a)^h = (r^{-1})^h = r^g \in R.$$

Таким образом, $R \trianglelefteq G$ и G локально конечна. Если $g \notin H$, то $g = hr$, где $1 \neq r \in R$, $h \in H$. Допустим, что $H \cap H^g \neq 1$. Тогда $a \in H \cap H^g$ и $a^g = a^{hr} = a^r = r^{-1}ar = r^{-2}a \notin H$; противоречие. П. 2 доказан.

Пусть теперь $RR \not\subseteq R$. Предположим, что N — собственная нетривиальная нормальная подгруппа в G . Если N состоит только из элементов нечетного порядка, то a при сопряжении в G индуцирует в N автоморфизм без неподвижных точек и поэтому N абелева. Ясно, что $C_G(N)$ не содержит инволюций и поэтому $M = NC_G(N)$ — нормальная абелева подгруппа в G , не содержащая инволюций, и a при сопряжении в G индуцирует в M автоморфизм, инвертирующий любой элемент из M . Этот автоморфизм принадлежит центру $\text{Aut}(M)$, поэтому $M\langle a \rangle \trianglelefteq G$. Замена N на $M\langle a \rangle$ дает собственную нормальную подгруппу в G , содержащую инволюцию, тем самым можно считать, что N содержит инволюцию. Так как все инволюции в G сопряжены, то $a \in N$. Любая инволюция из G содержится в N , поэтому $G = NH$ и $R \leq N$. Так как $H = C_G(a) \leq N$, то $G = RH \leq N$; противоречие. Итак, G — простая группа.

Допустим, что G локально конечна. Пусть $r, s \in R$ и $rs \notin R$. В конечной подгруппе $G_0 = \langle r, s, a \rangle$ централизатор H_0 инволюции a — циклическая 2-группа, поэтому $G_0 = R_0H_0$, где R_0 — абелева нормальная подгруппа в G_0 , содержащая все элементы нечетного порядка, поэтому $r, s \in R_0$ и $rs \in R_0 \leq R$; противоречие.

Итак, G не является локально конечной группой. Отметим, что для $r, s \in R$ элемент rsr принадлежит R . Действительно,

$$(rsr)^a = r^a s^a r^a = r^{-1} s^{-1} r^{-1} = (rsr)^{-1}.$$

По определению R элемент rsr принадлежит R . С другой стороны, любой элемент $r \in R$ равен $rr^{-1}r \in \{rsr \mid r, s \in R\}$. Это доказывает п. 3(а).

Очевидно, $\langle R \rangle$ инвариантна относительно H . Поскольку $G = \langle R \rangle H$, то одна из силовских 2-подгрупп в $\langle R \rangle$ либо совпадает с H и тогда $\langle R \rangle = G$, либо она конечна и тогда $RR \subseteq R$; противоречие. Поэтому $G = \langle R \rangle$ и $\langle rs \mid r, s \in R \rangle$ неабелева, т. е. $rs \neq sr$ для некоторых $r, s \in R$. Очевидно, $R_a = \{ra \mid r \in R\}$ состоит из инволюций (поскольку $(ra)^2 = rara = rr^{-1} = 1$), и для $r, s \in R$ элемент $rasa = rs^{-1}$ инвертируется инволюцией и поэтому сопряжен с элементом из R .

Обозначим через G_0 подгруппу $\langle r, s \rangle$, где $r, s \in R$ и $rs \neq sr$. Очевидно, G_0 a -инвариантна, поэтому если она не содержит инволюций, то она абелева и $rs = sr$; противоречие. Итак, G_0 содержит инволюцию, скажем, b . Так как a сопряжена с b в $\langle a, b \rangle$, то $a \in G_0$.

Пусть $H_0 = C_{G_0}(a)$. Если H_0 конечна, то G_0 локально конечна и $R_0 = \{x \in R \mid x^a = x^{-1}\} \cap G_0$ абелева. Однако в этом случае $r, s \in R_0$ и $rs = sr$; противоречие. Поэтому H_0 бесконечна и, следовательно, $H_0 = H$. Теперь простота G_0 доказывается так же, как простота G в п. 3.

Докажем п. 3(d). Если G локально конечна, то, очевидно, любые два элемента из R порождают конечную подгруппу. Пусть теперь любые два элемента $r, s \in R$ порождают конечную подгруппу. Ясно, что $\langle r, s \rangle$ a -инвариантна. По условию она конечна и подгруппа $C_0 = \langle r, s, a \rangle$ также конечна. Поскольку порядок G_0 четен, то G_0 — группа Фробениуса с дополнением четного порядка. Поэтому ее ядро абелево и содержит r, s . Отсюда следует, что $RR \subseteq R$, т. е. по п. 2 R , а вместе с ней $G = RH$ локально конечна.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что авторам неизвестны примеры групп, удовлетворяющих п. 3 теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазуров В. Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.
2. Шумяцкий П. В. Периодические группы с регулярной четверной группой автоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 1987. № 11. С. 78–82.
3. Шунков В. П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.

Поступила в редакцию 9 июня 2025 г.

После доработки 9 июня 2025 г.

Принята к публикации 12 июня 2025 г.

Мао Юемэй (Mao Yuemei) (ORCID 0000-0003-4152-1753)

Школа математики и статистики,
Университет Датун в Шаньси,
Датун, Шаньси, 037009, КНР
(School of Mathematics and Statistics,
ShanXi DaTong University,
Datong, Shanxi, 037009, P.R. China
maoyuemei@126.com

Ма Сюэцзянь (Ma Xiaojian) (ORCID 0009-0009-9215-5889)

Школа математики и статистики,
Университет Датун в Шаньси,
Датун, Шаньси, 037009, КНР
(School of Mathematics and Statistics,
ShanXi DaTong University,
Datong, Shanxi, 037009, P.R. China
mxj790808@163.com

Лыткина Дарья Викторовна (ORCID 0000-0003-3028-8490)

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович (ORCID 0000-0002-5052-3972)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vic.mazurov@gmail.com