

УДК 514.765

ПОВЕРХНОСТИ НА ГРУППАХ ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА ТИПА

В. А. Кыров

Аннотация. Изучаются поверхности на псевдогельмгольцевой, собственно гельмгольцевой и дуальногельмгольцевой группах Ли. Эти группы объединены общим термином — группы гельмгольцева типа. Выводятся уравнения Дирака, Вайнгартена и Кодацци в спинорном представлении. Исследуется функционал энергии на этих группах.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.511

Ключевые слова: группа Ли, поверхность в группе Ли, собственно гельмгольцева группа, псевдогельмгольцева группа, дуальногельмгольцева группа, уравнение Дирака, уравнение Вайнгартена, уравнение Кодацци.

Памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

1. Введение

Известна классификация Бианки трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли, которая содержит алгебры:

$$VI_a : g_{3,4}^a : [f_1, f_2] = 0, \quad [f_3, f_1] = af_1 - f_2, \quad [f_2, f_3] = f_1 - af_2, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$VII_a : g_{3,5}^a : [f_1, f_2] = 0, \quad [f_3, f_1] = af_1 + f_2, \quad [f_2, f_3] = f_1 - af_2, \quad a > 0;$$

$$IV : g_{3,2} : [f_1, f_2] = 0, \quad [f_3, f_1] = f_1, \quad [f_2, f_3] = f_1 - f_2.$$

Для каждой из этих алгебр Ли существует только по одной связной группе Ли, алгебра Ли которой совпадает с данной алгеброй [1]:

$$g_{3,4}^a \rightarrow G_{3,4}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & e^{az} \operatorname{ch} z & -e^{az} \operatorname{sh} z \\ x & -e^{az} \operatorname{sh} z & e^{az} \operatorname{ch} z \end{pmatrix},$$

$$g_{3,5}^a \rightarrow G_{3,5}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & e^{az} \cos z & -e^{az} \sin z \\ x & e^{az} \sin z & e^{az} \cos z \end{pmatrix},$$

$$g_{3,2} \rightarrow G_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & e^z & 0 \\ x & -ze^z & e^z \end{pmatrix}.$$

Отметим, что группы $G_{3,4}^a$, $G_{3,5}^a$, $G_{3,2}$ односвязные.

Алгебры Ли VI_a , VII_a , IV изоморфны соответственно следующим алгебрам:

$$AG_1 : [e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = -\beta e_2, \quad [e_3, e_1] = \alpha e_1;$$

$$AG_2 : [e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_1 + \gamma e_2, \quad [e_3, e_1] = e_2 - \gamma e_1;$$

$$AG_3 : [e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = -e_2, \quad [e_3, e_1] = e_1 - e_2.$$

Изоморфизмы задаются формулами $e_1 = f_1 + f_2$, $e_2 = f_1 - f_2$, $e_3 = f_3$, $\alpha = a - 1$, $\beta = a + 1$; $e_1 = f_2$, $e_2 = f_1$, $e_3 = -f_3$, $a = \gamma$; $e_1 = f_2$, $e_2 = f_1$, $e_3 = f_3$ соответственно.

Тогда группы Ли $G_{3,4}^a$, $G_{3,5}^a$, $G_{3,2}$ будут соответственно изоморфны псевдогельмгольцевой, собственно гильмгольцевой и дуальногельмгольцевой группам Ли:

$$G_1 : \begin{pmatrix} e^{\alpha z} & 0 & x \\ 0 & e^{\beta z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$G_2 : \begin{pmatrix} e^{-\gamma z} \cos z & -e^{-\gamma z} \sin z & x \\ e^{-\gamma z} \sin z & e^{-\gamma z} \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$G_3 : \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ -ze^z & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где (x, y, z) — точка группы Ли. Эти группы Ли в данной статье называются *группами гильмгольцева типа*. Заметим, что если в (1) допустить $\alpha = -1$, $\beta = 1$, то получится группа *Sol* [2–4].

Заметим, что действия групп Ли (1)–(3) в R^2 задают группы движений геометрий гильмгольцева типа [5, 6]:

$$x' = e^{\alpha a} x + b, \quad y' = e^{\beta a} y + c; \quad (4)$$

$$x' = xe^{-\gamma a} \cos a - ye^{-\gamma a} \sin a + b, \quad y' = xe^{-\gamma a} \sin a + ye^{-\gamma a} \cos a + c; \quad (5)$$

$$x' = e^a x + b, \quad y' = -ae^a x + e^a y + c, \quad (6)$$

причем a, b, c — параметры групп движений.

К геометриям гильмгольцева типа соответственно относятся псевдогельмгольцева геометрия:

$$f(1, 2) = \frac{(y_1 - y_2)^\beta}{(x_1 - x_2)^\alpha}; \quad (7)$$

собственно гильмгольцева геометрия:

$$f(1, 2) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] e^{2\gamma \arctg \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}; \quad (8)$$

дуальногельмгольцева геометрия:

$$f(1, 2) = (x_1 - x_2) e^{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}, \quad (9)$$

причем $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, f — функция пары точек (аналог евклидова расстояния) плоскости R^2 , а $1 = (x_1, y_1)$ и $2 = (x_2, y_2)$ — точки этой плоскости. Эти геометрии найдены Г. Г. Михайличенко и являются геометриями локальной максимальной подвижности [7].

1.1. Связность Леви-Чивиты. Левоинвариантные метрики и связность на группах Ли G_1 , G_2 и G_3 ранее были вычислены в [8]. Результаты вычислений следующие:

для группы G_1 :

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1} e_1 &= \alpha e_3, & \nabla_{e_1} e_2 &= 0, & \nabla_{e_1} e_3 &= -\alpha e_1, & \nabla_{e_2} e_1 &= 0, \\ \nabla_{e_2} e_2 &= \beta e_3, & \nabla_{e_2} e_3 &= -\beta e_2, & \nabla_{e_3} e_1 &= 0, & \nabla_{e_3} e_2 &= 0, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0;\end{aligned}$$

для группы G_2 :

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1} e_1 &= -\gamma e_3, & \nabla_{e_1} e_2 &= 0, & \nabla_{e_1} e_3 &= \gamma e_1, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= 0, & \nabla_{e_2} e_2 &= -\gamma e_3, & \nabla_{e_2} e_3 &= \gamma e_2, \\ \nabla_{e_3} e_1 &= e_2, & \nabla_{e_3} e_2 &= -e_1, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0;\end{aligned}$$

для группы G_3 :

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1} e_1 &= e_3, & \nabla_{e_1} e_2 &= -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_1} e_3 &= -e_1 + \frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_2} e_1 &= -\frac{1}{2}e_3, \\ \nabla_{e_2} e_2 &= e_3, & \nabla_{e_2} e_3 &= \frac{1}{2}e_1 - e_2, & \nabla_{e_3} e_1 &= -\frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_3} e_2 &= \frac{1}{2}e_1, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0.\end{aligned}$$

Заметим, что если в группе G_1 допустить $\alpha = -1$, $\beta = 1$, то ее связность совпадет со связностью группы Sol [2].

1.2. Тензор кривизны. Ниже для вычисления секционной кривизны понадобятся компоненты тензора кривизны относительно записанной выше связности Леви-Чивиты, мы их выписываем по работе [8]:

для группы G_1 :

$$R_{1212} = -\alpha\beta, \quad R_{1313} = -\alpha^2, \quad R_{2323} = -\beta^2;$$

для группы G_2 :

$$R_{1212} = -\gamma^2, \quad R_{1313} = -\gamma^2, \quad R_{2323} = -\gamma^2;$$

для группы G_3 :

$$R_{1212} = -\frac{3}{4}, \quad R_{1313} = -\frac{7}{4}, \quad R_{2323} = -\frac{3}{4}.$$

2. Представление Вейерштрасса

Ниже применяется метод, предложенный И. А. Таймановым и апробированный в статьях [2, 9].

Пусть G — группа Ли, Σ — поверхность, погруженная в G , и $f : \Sigma \rightarrow G$ — погружение; $z = x + iy$ — конформный параметр на Σ , а $I = e^{2\varphi} dz d\bar{z}$ — индуцированная метрика.

Рассмотрим L -расслоение над Σ : $L \rightarrow E = f^{-1}(TG) \rightarrow \Sigma$, и дифференциал

$$d_A : \Omega^1(\Sigma; E) \rightarrow \Omega^2(\Sigma; E),$$

который действует на E -значных 1-формах так:

$$d_A \omega = d'_A \omega + d''_A \omega,$$

где $\omega = u dz + u^* d\bar{z}$, $d'_A \omega = -\nabla_{\bar{\partial}f} u dz \wedge d\bar{z}$, $d''_A \omega = \nabla_{\partial f} u^* dz \wedge d\bar{z}$. Тогда производящие уравнения принимают вид

$$d_A(df) = 0, \tag{10}$$

$$d_A(*df) = ie^{2\varphi}HN dz \wedge d\bar{z}, \quad (11)$$

где H — средняя кривизна, N — нормальный вектор, $*dz = -i dz$, $*d\bar{z} = i d\bar{z}$. Так как метрика левоинвариантна, полагаем $\Psi = f^{-1}\partial f$, $\Psi^* = f^{-1}\bar{\partial}f$. В результате деривационные уравнения принимают следующий вид:

$$\partial\Psi - \bar{\partial}\Psi^* + \nabla_\Psi\Psi^* - \nabla_{\Psi^*}\Psi = 0, \quad (12)$$

$$\partial\Psi + \bar{\partial}\Psi^* + \nabla_\Psi\Psi^* + \nabla_{\Psi^*}\Psi = e^{2\varphi}Hf^{-1}(N). \quad (13)$$

Так как G — группа Ли, в ее алгебре Ли можно выбрать ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 по отношению к скалярному произведению в алгебре Ли. Тогда справедливы разложения

$$\Psi = \sum_{k=1}^3 Z_k e_k, \quad \Psi^* = \sum_{k=1}^3 \bar{Z}_k e_k.$$

Равенства (12) и (13) записываются так:

$$\sum_{j=1}^3 (\partial\bar{Z}_j - \bar{\partial}Z_j)e_j + \sum_{j,k=1}^3 (Z_j\bar{Z}_k - \bar{Z}_jZ_k)\nabla_{e_j}e_k = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 (\partial\bar{Z}_j + \bar{\partial}Z_j)e_j + \sum_{j,k=1}^3 (Z_j\bar{Z}_k + \bar{Z}_jZ_k)\nabla_{e_j}e_k \\ &= 2iH[(\bar{Z}_2Z_3 - \bar{Z}_3Z_2)e_1 + (\bar{Z}_3Z_1 - \bar{Z}_1Z_3)e_2 + (\bar{Z}_1Z_2 - \bar{Z}_2Z_1)e_3]. \end{aligned} \quad (15)$$

В [2] доказано, что

$$\langle\Psi, \Psi\rangle = 0, \quad \langle\Psi^*, \Psi^*\rangle = 0, \quad \langle\Psi, \Psi^*\rangle = \frac{1}{2}e^{2\varphi}.$$

Это эквивалентно равенствам

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0, \quad |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + |Z_3|^2 = \frac{1}{2}e^{2\varphi}.$$

Из первого равенства вытекает:

$$Z_1 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2), \quad Z_2 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2. \quad (16)$$

Ниже понадобятся следующие формулы:

$$\begin{aligned} Z_1\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1Z_2 &= -\frac{i}{2}(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4); \\ Z_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1Z_3 &= \frac{i}{2}(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2); \\ Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2Z_3 &= -\frac{1}{2}(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2); \\ Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1Z_3 &= \frac{i}{2}(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2); \\ Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2Z_3 &= -\frac{1}{2}(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2); \\ |Z_1|^2 + |Z_2|^2 &= \frac{1}{2}(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4). \end{aligned} \quad (17)$$

Деривационные уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$D\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где U и V — потенциалы поверхности. Индуцированная метрика и левый сдвиг нормального вектора равны

$$I = e^{2\varphi} dz d\bar{z} = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 dz d\bar{z},$$

$$f^{-1}(N) = e^{-\varphi} [i(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)e_1 - (\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)e_2 + (|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)e_3].$$

Пусть ψ определено на поверхности M с комплексным параметром z , $P \in M$. Подставим ψ в формулу (16) для компонент Z_1, Z_2, Z_3 вектора

$$\Psi = \sum_{k=1}^3 Z_k e_k = f^{-1} \partial f,$$

затем решаем линейное дифференциальное уравнение на группе G :

$$f_z = f\Psi$$

с начальным условием $f(P) = g \in G$. В результате получаем требуемую поверхность как отображение $f : M \rightarrow G$.

Дифференциал Хопфа на этой поверхности равен

$$\omega = A dz^2, \quad A = \langle \nabla_{f_z} f_z, N \rangle.$$

Точные вычисления дают

$$A = \langle \Psi_z, N \rangle + \left\langle \sum_{j,k=1}^3 Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \right\rangle = (\bar{\psi}_2 \partial \psi_1 - \psi_1 \partial \bar{\psi}_2) + \left\langle \sum_{j,k=1}^3 Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \right\rangle. \quad (19)$$

Далее, воспользовавшись уравнениями Дирака, имеем

$$\varphi_z e^\varphi = \bar{\psi}_1 \partial \psi_1 + \psi_2 \partial \bar{\psi}_2 + (\psi_1 \partial \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 \partial \psi_2),$$

где согласно уравнению Дирака выражение в скобках записывается так:

$$\psi_1 \partial \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2 \partial \psi_2 = (\bar{V} - U) \psi_1 \bar{\psi}_2.$$

Вместе с формулой для дифференциала Хопфа тогда получим систему

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \psi_2 \\ \bar{\psi}_2 & -\psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \psi_1 \\ \partial \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_z e^\varphi + (U - \bar{V}) \psi_1 \bar{\psi}_2 \\ A - \langle \sum_{j,k} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \rangle \end{pmatrix}.$$

Из уравнения Дирака непосредственно вытекает тождество

$$\bar{\partial}(\psi_1 \bar{\psi}_2) = (-\operatorname{Re}(U)|\psi_1|^2 + \operatorname{Re}(V)|\psi_2|^2) + i(\operatorname{Im}(U)|\psi_1|^2 + \operatorname{Im}(V)|\psi_2|^2), \quad (20)$$

которым ниже воспользуемся при исследовании на вещественность функционала энергии поверхности M :

$$E(M) = \int_M UV \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}. \quad (21)$$

Обозначим через $\widehat{K} = K_{XY} = \langle R(X, Y)X, Y \rangle$ секционную кривизну плоскости, натянутой на единичные линейно независимые векторы X и Y . Несложные вычисления дают результат:

$$\widehat{K} = K_{XY} = R_{1212} \cos^2 \phi_3 + R_{1313} \cos^2 \phi_2 + R_{2323} \cos^2 \phi_1, \quad (22)$$

где $(\cos \phi_3, \cos \phi_2, \cos \phi_1)$ — компоненты нормального вектора к плоскости, ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_3 — углы между нормалью к плоскости и соответственно векторами e_1 , e_2 и e_3 .

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \cos \phi_3 &= \langle f^{-1}(N), e_3 \rangle = e^{-\varphi}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2), \\ \cos \phi_1 &= \langle f^{-1}(N), e_1 \rangle = ie^{-\varphi}(\psi_1\psi_2 - \overline{\psi_1}\overline{\psi_2}), \\ \cos \phi_2 &= \langle f^{-1}(N), e_2 \rangle = -e^{-\varphi}(\psi_1\psi_2 + \overline{\psi_1}\overline{\psi_2}), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} |\psi_2|^2 - |\psi_1|^2 &= e^{\varphi} \cos \phi_3, \\ 4|\psi_1|^2|\psi_2|^2 &= e^{2\varphi}(\cos^2 \phi_1 + \cos^2 \phi_2) = e^{2\varphi}(1 - \cos^2 \phi_3), \\ 2(\psi_1^2\psi_2^2 + \overline{\psi_1}^2\overline{\psi_2}^2) &= e^{2\varphi}(\cos^2 \phi_2 - \cos^2 \phi_1). \end{aligned} \quad (23)$$

3. Группа G_1

В данном разделе $G = G_1$. В уравнениях (14) и (15) воспользуемся связностью Леви-Чивиты группы G_1 . Тогда

$$\begin{aligned} \partial\overline{Z}_1 - \overline{\partial}Z_1 - \alpha(Z_1\overline{Z}_3 - \overline{Z}_1Z_3) &= 0, \\ \partial\overline{Z}_2 - \overline{\partial}Z_2 - \beta(Z_2\overline{Z}_3 - \overline{Z}_2Z_3) &= 0, \\ \partial\overline{Z}_3 - \overline{\partial}Z_3 &= 0, \\ \partial\overline{Z}_1 + \overline{\partial}Z_1 - \alpha(Z_1\overline{Z}_3 + \overline{Z}_1Z_3) &= 2iH(\overline{Z}_2Z_3 - \overline{Z}_3Z_2), \\ \partial\overline{Z}_2 + \overline{\partial}Z_2 - \beta(Z_2\overline{Z}_3 + \overline{Z}_2Z_3) &= 2iH(\overline{Z}_3Z_1 - \overline{Z}_1Z_3), \\ \partial\overline{Z}_3 + \overline{\partial}Z_3 + 2\alpha|Z_1|^2 + 2\beta|Z_2|^2 &= 2iH(\overline{Z}_1Z_2 - \overline{Z}_2Z_1). \end{aligned} \quad (24)$$

Большая часть вычислений для группы G_1 проделана в работе [10], поэтому приводим только основные результаты.

Уравнения Дирака:

$$\begin{aligned} D\psi &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\overline{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ U &= \frac{\alpha + \beta}{4}|\psi_1|^2 + \frac{\alpha - \beta}{4}\overline{\psi_1}\overline{\psi_2}^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2), \\ V &= -\frac{\alpha + \beta}{4}|\psi_2|^2 - \frac{\alpha - \beta}{4}\overline{\psi_2}\overline{\psi_1}^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2). \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения Вайнгартена:

$$\begin{aligned} \partial\psi_1 &= \varphi_z\psi_1 + \psi_2 Ae^{-\varphi} + \frac{\alpha + \beta}{4}\psi_1^2\overline{\psi_2} + \frac{\alpha - \beta}{4}\overline{\psi_2}^3, \\ \partial\psi_2 &= -U\psi_1, \\ \overline{\partial}\psi_1 &= V\psi_2, \\ \overline{\partial}\psi_2 &= \varphi_{\overline{z}}\psi_2 - \psi_1 \overline{A}e^{-\varphi} + \frac{\alpha + \beta}{4}\overline{\psi_1}\psi_2^2 + \frac{\alpha - \beta}{4}\overline{\psi_1}^3. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнения Кодацци:

$$\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2e^{-2\varphi} = \frac{(\alpha + \beta)^2}{16}e^{2\varphi} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}(\psi_1^2\psi_2^2 + \bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2) + \frac{(\alpha - \beta)^2}{16}(6|\psi_1|^2|\psi_2|^2 - |\psi_1|^4 - |\psi_2|^4), \quad (27)$$

$$A_{\bar{z}}e^{-\varphi} - \frac{H_z}{2}e^\varphi = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^3 - \psi_1^3\psi_2) + \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\psi_1\bar{\psi}_2.$$

Теорема 1. Поверхность на группе G_1 задается порождающим спинором $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ в окрестностях точек, где $Z_3 \neq 0$, который удовлетворяет уравнениям Дирака (25), Вайнгартена (26) и Кодацци (27).

Следствие 1. Порождающий спинор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ в окрестностях точек, где $Z_3 \neq 0$, минимальной поверхности ($H = 0$) в группе Ли G_1 удовлетворяет уравнениям Дирака:

$$\partial\psi_2 = -\frac{\alpha + \beta}{4}|\psi_1|^2\psi_1 - \frac{\alpha - \beta}{4}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^2, \quad \bar{\partial}\psi_1 = -\frac{\alpha + \beta}{4}|\psi_2|^2\psi_2 - \frac{\alpha - \beta}{4}\bar{\psi}_2\bar{\psi}_1^2.$$

Из (24) вытекает вещественнозначное выражение:

$$\partial\bar{Z}_3 = \bar{\partial}Z_3 = \frac{\beta - \alpha}{4}(\psi_1^2\psi_2^2 + \bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2) - \frac{\alpha + \beta}{4}(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4) - \frac{H}{2}(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4).$$

С учетом последнего равенства получаем

$$UV = \frac{H^2}{4}e^{2\varphi} + \frac{H(\alpha + \beta)}{8}(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4) - \frac{\alpha\beta}{4}|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + \frac{\alpha - \beta}{4}\frac{\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2}{\psi_1\psi_2}\bar{\partial}Z_3$$

или

$$UV = \frac{H^2}{4}e^{2\varphi} + \frac{H(\alpha + \beta)}{8}(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4) - \frac{\alpha\beta}{4}|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + \frac{\alpha - \beta}{4}e^{i\xi}\bar{\partial}Z_3, \quad (28)$$

где ξ — аргумент числа $\frac{\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2}{\psi_1\psi_2}$.

Функционал энергии (21) на поверхности Σ группы Ли G_1 равен

$$E(\Sigma) = \int_{\Sigma} \left(\frac{H^2}{4}e^{2\varphi} + \frac{H(\alpha + \beta)}{8}(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4) - \frac{\alpha\beta}{4}|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + \frac{\alpha - \beta}{4}e^{i\xi}\bar{\partial}Z_3 \right) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}. \quad (29)$$

Отметим, что здесь использовано понятие энергии поверхности как обобщение функционала Уиллмора, которое было введено в статье [2].

Предложение 1 [10]. Если поверхность группы G_1 задается спинорами, удовлетворяющими условию $\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 = \pm\psi_1\psi_2$, то функционал энергии (29) этой поверхности вещественный и равен

$$E(\Sigma) = \int_{\Sigma} \left(\frac{H^2}{4}e^{2\varphi} + \frac{H(\alpha + \beta)}{8}(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4) - \frac{\alpha\beta}{4}|\psi_1|^2|\psi_2|^2 \pm \frac{\alpha - \beta}{4}\bar{\partial}Z_3 \right) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2},$$

а потенциалы поверхности принимают вид

$$U = \frac{\alpha + \beta}{4}|\psi_1|^2 \pm \frac{\alpha - \beta}{4}|\psi_2|^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2),$$

$$V = -\frac{\alpha + \beta}{4}|\psi_2|^2 \mp \frac{\alpha - \beta}{4}|\psi_1|^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2).$$

Следствие 2. Если поверхность группы G_1 при условии $\beta = -\alpha$ задается спинорами, удовлетворяющими условию $\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 = \pm \psi_1 \psi_2$, то функционал энергии этой поверхности вещественный и равен

$$E(\Sigma) = \int_{\Sigma} (H^2 e^{2\varphi} + \alpha^2 |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 \mp 2\alpha \bar{\partial} Z_3) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{8},$$

в частности, на группе Sol имеем функционал

$$E(\Sigma) = \int_{\Sigma} (H^2 e^{2\varphi} + |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 \mp 2\bar{\partial} Z_3) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{8}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следует отметить, что автору пока не удалось до конца исследовать вопрос существования поверхности, о которой говорится в предложении 1.

Рассмотрим замкнутую ориентированную поверхность в G_1 .

Предложение 2. Для замкнутой ориентированной поверхности M в G_1 функционал энергии равен

$$E(\Sigma) = \int_{\Sigma} \left(\frac{H^2}{4} e^{2\varphi} + \frac{(\alpha + \beta)^2}{16} (|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4) - \frac{\alpha\beta}{4} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 + \frac{\alpha - \beta}{4} e^{i\xi} \bar{\partial} Z_3 \right) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись тождеством (20), получаем

$$\bar{\partial}(\psi_1 \bar{\psi}_2) = \frac{H}{2} (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) - \frac{\alpha + \beta}{4} (|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4).$$

Согласно формуле Стокса

$$\int_M \left(\frac{H}{2} (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + \frac{\alpha + \beta}{4} (|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4) \right) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2} = 0.$$

Тогда интеграл энергии примет искомый вид. $\square$

Секционная кривизна (22) на поверхности группы G_1 принимает следующий вид:

$$\hat{K} = K_{XY} = -\alpha\beta \cos^2 \phi_3 - \alpha^2 \cos^2 \phi_2 - \beta^2 \cos^2 \phi_1.$$

Если $\beta = \alpha$, то

$$\hat{K} = -\alpha^2,$$

т. е. секционная кривизна постоянна, а если $\beta = -\alpha$, то

$$\hat{K} = -\alpha^2 (1 - 2 \cos^2 \phi_3).$$

Учитывая (23), для функционала энергии (29) получаем выражение

$$E(\Sigma) = \int_{\Sigma} e^{2\varphi} \left(\frac{H^2}{4} - \frac{H(\alpha + \beta)}{8} \cos \phi_3 - \frac{\alpha\beta}{16} (1 - \cos^2 \phi_3) + \frac{\alpha - \beta}{8} e^{i\xi} \left(\frac{\beta - \alpha}{4} (\cos^2 \phi_2 - \cos^2 \phi_1) - \frac{\alpha + \beta}{4} (1 + \cos^2 \phi_3) + H \cos \phi_3 \right) \right) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}. \quad (30)$$

Заметим, что полученные в этом пункте результаты при $\alpha = -\beta = -1$ полностью совпадают с соответствующими результатами в группе *Sol* [2].

Частный случай $\beta = \alpha$. Уравнения Дирака и потенциалы поверхности в этом случае принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} D\psi &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ U &= \frac{\alpha}{2}|\psi_1|^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2), \quad V = -\frac{\alpha}{2}|\psi_2|^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2). \end{aligned} \quad (31)$$

Из общего случая вытекают:
уравнения Вайнгартена:

$$\begin{aligned} \partial\psi_1 &= \varphi_z\psi_1 + \psi_2 A e^{-\varphi} + \frac{\alpha}{2}\psi_1^2\bar{\psi}_2, \quad \bar{\partial}\psi_2 = \varphi_{\bar{z}}\psi_2 - \psi_1 \bar{A} e^{-\varphi} + \frac{\alpha}{2}\bar{\psi}_1\psi_2^2, \\ \partial\psi_2 &= -U\psi_1, \quad \bar{\partial}\psi_1 = V\psi_2; \end{aligned} \quad (32)$$

уравнения Кодацци:

$$\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2e^{-2\varphi} = \frac{\alpha^2}{4}e^{2\varphi}, \quad A_{\bar{z}}e^{-\varphi} - \frac{H_z}{2}e^{\varphi} = 0. \quad (33)$$

В результате получаем [10] следующее утверждение.

Теорема 2. Поверхность на группе G_1 при $\beta = \alpha$ задается порождающим спинором $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ в окрестностях точек, где $Z_3 \neq 0$, который удовлетворяет уравнениям Дирака (31), системе уравнений Вайнгартена (32), а также уравнением Кодацци (33).

Следствие 3. Порождающий спинор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ в окрестностях точек, где $Z_3 \neq 0$, минимальной поверхности в группе Ли G_1 при $\beta = \alpha$ удовлетворяет уравнениям Дирака:

$$\partial\psi_2 = -\frac{\alpha}{2}|\psi_1|^2\psi_1, \quad \bar{\partial}\psi_1 = -\frac{\alpha}{2}|\psi_2|^2\psi_2.$$

Функционал энергии на поверхности Σ группы Ли G_1 при $\beta = \alpha$ вещественный и принимает вид

$$E(\Sigma) = \int_{\Sigma} \left(\frac{H^2}{4}e^{2\varphi} + \frac{H\alpha}{4}(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4) - \frac{\alpha^2}{4}|\psi_1|^2|\psi_2|^2 \right) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

Из второго уравнения в (33) вытекает

$$A_{\bar{z}} = \frac{H_z}{2}e^{2\varphi},$$

поэтому справедливо

Предложение 3. В группе G_1 при $\beta = \alpha$ дифференциал Хопфа $A dz^2$ голоморфен тогда и только тогда, когда поверхность имеет постоянную среднюю кривизну.

4. Группа G_2

Рассмотрим группу $G = G_2$. Методика последующих вычислений апробирована в работе [10]. В уравнениях (14) и (15) воспользуемся связностью Леви-Чивиты в этой группе:

$$\begin{aligned} \partial\bar{Z}_1 - \bar{\partial}Z_1 + \gamma(Z_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1Z_3) + Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2Z_3 &= 0, \\ \partial\bar{Z}_2 - \bar{\partial}Z_2 - (Z_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1Z_3) + \gamma(Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2Z_3) &= 0, \\ \partial\bar{Z}_3 - \bar{\partial}Z_3 &= 0, \\ \partial\bar{Z}_1 + \bar{\partial}Z_1 + \gamma(Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1Z_3) - (Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2Z_3) &= 2iH(\bar{Z}_2Z_3 - \bar{Z}_3Z_2), \\ \partial\bar{Z}_2 + \bar{\partial}Z_2 + (Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1Z_3) + \gamma(Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2Z_3) &= 2iH(\bar{Z}_3Z_1 - \bar{Z}_1Z_3), \\ \partial\bar{Z}_3 + \bar{\partial}Z_3 - 2\gamma(|Z_1|^2 + |Z_2|^2) &= 2iH(\bar{Z}_1Z_2 - \bar{Z}_2Z_1). \end{aligned} \quad (34)$$

Затем подставляем (16) в первое, второе, четвертое и пятое равенства, после преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \partial\psi_2^2 + \bar{\partial}\psi_1^2 - (\gamma + i)\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) &= 0, \\ -\partial\psi_2^2 + \bar{\partial}\psi_1^2 + (\gamma - i)\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) &= 2H\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2). \end{aligned}$$

При этом здесь воспользовались равенствами (17).

В точках, где $Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2 \neq 0$, эти уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\begin{aligned} D\psi &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ U &= -\frac{\gamma}{2}|\psi_1|^2 - \frac{i}{2}|\psi_2|^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2), \\ V &= \frac{\gamma}{2}|\psi_2|^2 + \frac{i}{2}|\psi_1|^2 + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2). \end{aligned} \quad (35)$$

Прямыми вычислениями находим дифференциал Хопфа поверхности в G_2 :

$$A = (\bar{\psi}_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar{\psi}_2) - i\psi_1^2\bar{\psi}_2^2.$$

Как и в [10], получаем уравнения Вайнгартена:

$$\begin{aligned} \partial\psi_1 &= \varphi_z\psi_1 + \psi_2Ae^{-\varphi} - \frac{\gamma-i}{2}\psi_1^2\bar{\psi}_2, \quad \partial\psi_2 = -U\psi_1, \\ \bar{\partial}\psi_1 &= V\psi_2, \quad \bar{\partial}\psi_2 = \varphi_{\bar{z}}\psi_2 - \psi_1\bar{A}e^{-\varphi} - \frac{\gamma-i}{2}\bar{\psi}_1\psi_2^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Операторная форма уравнений Вайнгартена:

$$(\partial - \tilde{A})\psi = 0, \quad (\bar{\partial} - \tilde{B})\psi = 0,$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \varphi_z - \frac{\gamma-i}{2}Z_3 & Ae^{-\varphi} \\ -\frac{1}{2}(H-\gamma)e^\varphi & -\frac{\gamma-i}{2}Z_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma-i}{2}\bar{Z}_3 & \frac{1}{2}(H+\gamma)e^\varphi \\ -\bar{A}e^{-\varphi} & \varphi_{\bar{z}} - \frac{\gamma-i}{2}\bar{Z}_3 \end{pmatrix}.$$

Как и в работе [10], расписываем уравнение

$$\tilde{R}\psi = 0, \quad \tilde{R} = \tilde{A}_{\bar{z}} - \tilde{B}_z + [\tilde{A}, \tilde{B}].$$

В результате будем иметь

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \left(\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2 - \gamma^2}{4} e^{2\varphi} - |A|^2 e^{-2\varphi} \right) \psi_1 + \left(A_{\bar{z}} e^{-\varphi} - \frac{1}{2} H_z e^\varphi \right) \psi_2 = 0, \\ \kappa_2 &= \left(\bar{A}_z e^{-\varphi} - \frac{1}{2} H_{\bar{z}} e^\varphi \right) \psi_1 - \left(\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2 - \gamma^2}{4} e^{2\varphi} - |A|^2 e^{-2\varphi} \right) \psi_2 = 0,\end{aligned}$$

причем учтено, что $\bar{\partial}Z_3 - \partial\bar{Z}_3 = 0$.

Система уравнений Кодацци принимает вид

$$\kappa_1 \bar{\psi}_1 - \bar{\kappa}_2 \psi_2 = 0, \quad \kappa_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\kappa}_2 \psi_1 = 0.$$

Окончательно получаем

$$\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2 - \gamma^2}{4} e^{2\varphi} - |A|^2 e^{-2\varphi} = 0, \quad A_{\bar{z}} e^{-\varphi} - \frac{H_z}{2} e^\varphi = 0. \quad (37)$$

Итак, доказана

Теорема 3. Поверхность на группе Ли G_2 задается порождающим спинором $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ в окрестностях точек, где $Z_3 \neq 0$, который удовлетворяет уравнениям Дирака (35), Вайнгартена (36) и Кодацци (37).

Следствие 4. Порождающий спинор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ в окрестностях точек, где $Z_3 \neq 0$, минимальной поверхности ($H = 0$) в группе Ли G_2 удовлетворяет уравнениям Дирака

$$\partial\psi_2 = \frac{\gamma}{2} |\psi_1|^2 \psi_1 + \frac{i}{2} |\psi_2|^2 \psi_1, \quad \bar{\partial}\psi_1 = \frac{\gamma}{2} |\psi_2|^2 \psi_2 + \frac{i}{2} |\psi_1|^2 \psi_2.$$

Предложение 4. На поверхности в G_2 средняя кривизна постоянна тогда и только тогда, когда дифференциал Хопфа голоморфен.

Это вытекает из второго равенства в системе (37) и из равенства модулей $|H_z| = |H_{\bar{z}}|$.

По формуле (21) непосредственно вычисляем функционал энергии на поверхности Σ в G_2 :

$$\begin{aligned}E(M) &= \frac{1}{4} \int_M (H^2 e^{2\varphi} + H\gamma(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + (1 - \gamma^2)|\psi_1|^2 |\psi_2|^2 \\ &\quad - i[H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + \gamma(|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4)]) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}. \quad (38)\end{aligned}$$

Далее рассмотрим замкнутую ориентированную поверхность в G_2 .

Предложение 5. Для замкнутой ориентированной поверхности M в G_2 функционал энергии вещественный и равен

$$E(M) = \frac{1}{4} \int_M ((H^2 - \gamma^2) e^{2\varphi} + (1 + \gamma^2) |\psi_1|^2 |\psi_2|^2) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

Доказательство. Воспользовавшись тождеством (20), будем иметь

$$\bar{\partial}(\psi_1 \bar{\psi}_2) = \frac{H}{2} (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + \frac{\gamma}{2} (|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4).$$

Согласно формуле Стокса

$$\int_M \left(\frac{H}{2} (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + \frac{\gamma}{2} (|\psi_2|^4 + |\psi_1|^4) \right) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2} = 0.$$

Значит, имеем окончательное выражение для функционала энергии. $\square$

Согласно формуле (22) секционная кривизна постоянна и равна

$$\hat{K} = K_{XY} = -\gamma^2 \cos^2 \phi_3 - \gamma^2 \cos^2 \phi_2 - \gamma^2 \cos^2 \phi_1 = -\gamma^2.$$

Из (23) следует, что функционал энергии (38) принимает следующий вид:

$$E(M) = \frac{1}{4} \int_M e^{2\varphi} \left(H^2 - \frac{(\gamma - i)^2}{4} + H(\gamma - i) \cos \phi_3 + \frac{(\gamma + i)^2}{4} \cos^2 \phi_3 \right) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

5. Группа G_3

Пусть теперь $G = G_3$. В таком случае сначала в уравнениях (14) и (15) воспользуемся связностью Леви-Чивиты, тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \partial \bar{Z}_1 - \bar{\partial} Z_1 - (Z_1 \bar{Z}_3 - \bar{Z}_1 Z_3) &= 0, \\ \partial \bar{Z}_2 - \bar{\partial} Z_2 + (Z_1 \bar{Z}_3 - \bar{Z}_1 Z_3) - (Z_2 \bar{Z}_3 - \bar{Z}_2 Z_3) &= 0, \\ \partial \bar{Z}_3 - \bar{\partial} Z_3 &= 0, \\ \partial \bar{Z}_1 + \bar{\partial} Z_1 - (Z_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 Z_3) &= 2iH(\bar{Z}_2 Z_3 - \bar{Z}_3 Z_2), \\ \partial \bar{Z}_2 + \bar{\partial} Z_2 + (Z_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 Z_3) - (Z_2 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 Z_3) &= 2iH(\bar{Z}_3 Z_1 - \bar{Z}_1 Z_3), \\ \partial \bar{Z}_3 + \bar{\partial} Z_3 + 2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2) &= 2iH(\bar{Z}_1 Z_2 - \bar{Z}_2 Z_1). \end{aligned} \quad (39)$$

Затем, как и выше, подставляем (16) в первое, второе, четвертое и пятое равенства, после преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} 2\partial\psi_2^2 + 2\bar{\partial}\psi_1^2 + ((2+i)\psi_1\psi_2 + i\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) &= 0, \\ -2\partial\psi_2^2 + 2\bar{\partial}\psi_1^2 - ((2+i)\psi_1\psi_2 - i\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) &= 4H\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2). \end{aligned}$$

В точках, где $Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2 \neq 0$, эти уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\begin{aligned} D\psi &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ U &= \frac{2+i}{4}|\psi_1|^2 + \frac{i}{4}\frac{\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^2}{\psi_1} + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2), \\ V &= -\frac{2+i}{4}|\psi_2|^2 - \frac{i}{4}\frac{\bar{\psi}_2\bar{\psi}_1^2}{\psi_2} + \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2). \end{aligned} \quad (40)$$

Дифференциал Хопфа поверхности в G_3 :

$$A = (\bar{\psi}_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar{\psi}_2) - \frac{i}{4}(\psi_1^2 - \bar{\psi}_2^2)^2 = (\bar{\psi}_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar{\psi}_2) - iZ_2^2.$$

Уравнения Вайнгартена:

$$\begin{aligned} \partial\psi_1 &= \varphi_z\psi_1 + \psi_2 A e^{-\varphi} + \frac{1}{2}\psi_1 Z_3 + iZ_2^2 e^{-\varphi}\psi_2 - \frac{1}{2}\psi_1 Z_1(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) e^{-\varphi}, \\ \partial\psi_2 &= -U\psi_1, \\ \bar{\partial}\psi_1 &= V\psi_2, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\bar{\partial}\psi_2 = \varphi_{\bar{z}}\psi_2 - \psi_1 \bar{A} e^{-\varphi} + \frac{1}{2}\psi_2 \bar{Z}_3 + i\bar{Z}_2^2 e^{-\varphi}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 \bar{Z}_1(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) e^{-\varphi}.$$

Доказана следующая

Теорема 4. Поверхность на группе Ли G_3 задается порождающим спинором $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ в окрестностях точек, где $Z_3 \neq 0$, который удовлетворяет уравнениям Дирака (40) и Вайнгартена (41).

Следствие 5. Порождающий спинор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ в окрестностях точек, где $Z_3 \neq 0$, минимальной поверхности ($H = 0$) в группе Ли G_3 удовлетворяет уравнениям Дирака

$$\partial\psi_2 = -\frac{2+i}{4}|\psi_1|^2\psi_1 - \frac{i}{4}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2^2, \quad \bar{\partial}\psi_1 = -\frac{2+i}{4}|\psi_2|^2\psi_2 - \frac{i}{4}\bar{\psi}_2\bar{\psi}_1^2.$$

Далее по формуле (21) вычислим в явном виде функционал энергии поверхности на группе G_3 . Для этого сначала перепишем потенциалы поверхности. Запишем порождающие спиноры в показательной форме:

$$\psi_1 = |\psi_1|e^{i\alpha_1}, \quad \psi_2 = |\psi_2|e^{i\alpha_2}, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} U &= \frac{H}{2}e^\varphi + \frac{1}{2}|\psi_1|^2 + \frac{i}{4}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)e^{-2i\alpha} \\ &= \frac{H}{2}e^\varphi + \frac{1}{2}|\psi_1|^2 + \frac{1}{4}|\psi_2|^2 \sin 2\alpha + \frac{i}{4}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \cos 2\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{H}{2}e^\varphi - \frac{1}{2}|\psi_2|^2 - \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2)e^{-2i\alpha} \\ &= \frac{H}{2}e^\varphi - \frac{1}{2}|\psi_2|^2 - \frac{1}{4}|\psi_1|^2 \sin 2\alpha - \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2 \cos 2\alpha). \end{aligned}$$

Произведение потенциалов принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} UV &= \frac{H^2}{4}e^{2\varphi} - \frac{H}{4}(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4) - \frac{1}{16}|\psi_1|^2|\psi_2|^2(3 - e^{-4i\alpha}) + \frac{1}{16}(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4)e^{-2i\alpha} \\ &\quad - \frac{i}{8}[H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)(1 - e^{-2i\alpha}) + 2|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + (|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4)e^{-2i\alpha}] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} UV &= \frac{1}{4}H^2e^{2\varphi} + \frac{1}{8}H(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4)(2 - \sin 2\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{16}|\psi_1|^2|\psi_2|^2(3 - \cos 4\alpha) - \frac{1}{16}(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4)(2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha) \\ &\quad - \frac{i}{16}[4H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) \sin^2 \alpha + |\psi_1|^2|\psi_2|^2(4 + \sin 4\alpha) \\ &\quad + (|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4)(2 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha)]. \end{aligned}$$

Для интеграла энергии тогда получаем

$$\begin{aligned} E(M) &= \int_M \left[\frac{1}{4}H^2e^{2\varphi} + \frac{1}{8}H(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4)(2 - \sin 2\alpha) \right. \\ &\quad - \frac{1}{16}|\psi_1|^2|\psi_2|^2(3 - \cos 4\alpha) - \frac{1}{16}(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4)(2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha) \\ &\quad - \frac{i}{16}[4H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) \sin^2 \alpha + |\psi_1|^2|\psi_2|^2(4 + \sin 4\alpha) \\ &\quad \left. + (|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4)(2 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha)] \right] \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}. \quad (42) \end{aligned}$$

По формуле (20), получим тождество

$$\bar{\partial}(\psi_1 \bar{\psi}_2) = \frac{1}{2}(H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) - |\psi_2|^4 - |\psi_1|^4 - |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 \sin 2\alpha) + \frac{i}{4}(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4),$$

из которого для замкнутой ориентированной поверхности согласно теореме Стокса имеем

$$\int_M [2(H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) - |\psi_2|^4 - |\psi_1|^4 - |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 \sin 2\alpha) + i(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4)] \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2} = 0.$$

Видно, что данный интеграл в общем случае принимает комплексные значения.

На поверхности, задаваемой равенством $e^{-2i\alpha} = 1$, интеграл энергии (42) принимает вид

$$E(M) = \int_M \left[\frac{1}{4} H^2 e^{2\varphi} + \frac{1}{4} H(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4) + \frac{1}{16} (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2 - \frac{i}{8} e^{2\varphi} \right] \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

В данном случае при любых $|\psi_1|$ и $|\psi_2|$ энергия содержит мнимую часть.

На поверхности, для которой $e^{-2i\alpha} = -1$, интеграл энергии следующий:

$$E(M) = \int_M \left[\frac{1}{4} H^2 e^{2\varphi} + \frac{1}{4} H(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4) - \frac{1}{16} e^{2\varphi} - \frac{i}{8} (2H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) - (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2) \right] \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

Заметим, что если дополнительно потребовать $|\psi_1| = |\psi_2|$, то интеграл энергии будет вещественным:

$$E(M) = \int_M \left[\frac{1}{4} H^2 e^{2\varphi} - \frac{1}{16} e^{2\varphi} \right] \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

На поверхности $|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 = -2He^\varphi$, $e^{-2i\alpha} = -1$ он также вещественный:

$$E(M) = - \int_M \left[\frac{1}{4} H^2 e^{2\varphi} + \frac{1}{16} e^{2\varphi} \right] \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

Отметим, что эти поверхности не являются замкнутыми и ориентированными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Автору пока не удалось до конца исследовать вопрос существования данных поверхностей.

Из (22) для секционной кривизны получаем

$$\hat{K} = K_{XY} = -\frac{3}{4} \cos^2 \phi_3 - \frac{7}{4} \cos^2 \phi_2 - \frac{3}{4} \cos^2 \phi_1 = -\frac{3}{4} - \cos^2 \phi_2.$$

Если дополнительно воспользоваться (23), то для функционала энергии (42) получаем

$$\begin{aligned} E(M) = \int_M e^{2\varphi} & \left[\frac{1}{4} H^2 + \frac{1}{8} H \cos \phi_3 (2 - \sin 2\alpha) - \frac{1}{64} (1 - \cos^2 \phi_3) (3 - \cos 4\alpha) \right. \\ & - \frac{1}{32} (1 + \cos^2 \phi_3) (2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha) \\ & - \frac{i}{16} \left[4H \cos \phi_3 \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} (1 - \cos^2 \phi_3) (4 + \sin 4\alpha) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \phi_3) (2 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha) \right] \right] \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}. \quad (43) \end{aligned}$$

Заключение

В данной работе проведены исследования поверхностей на группах гельмгольцева типа. Найдены уравнения Дирака, Вайнгартена, Кодаци. Исследования этих групп можно продолжить, в частности, изучить замкнутые поверхности. Можно также исследовать спектральные свойства оператора Дирака на поверхностях изучаемых здесь групп Ли.

Остаются проблемы, которые автор не смог решить:

- 1) нахождение геометрической интерпретации функционала энергии для групп G_1 и G_3 ;
- 2) окончательное исследование вопроса существования поверхностей, о которых говорится в замечаниях 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biggs R., Remsing C. C. On the classification of real four-dimensional lie group // Journal of lie theory. 2016. V. 26. P. 1001–1035.
2. Бердинский Д. А., Тайманов И. А. Поверхности в трехмерных группах Ли // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1248–1264.
3. Thurston W. P. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bull. Am. Math. Soc. 1982. V. 6, N 3. P. 357–381.
4. Scott P. The geometries of 3-manifolds // Bull. London Math. Soc. 1982. V. 15, N 5. P. 401–487.
5. Кыров В. А. Гельмгольцевы пространства размерности два // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1341–1359.
6. Богданова Р. А. Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 12–22.
7. Михайличенко Г. Г. Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск: Изд-во Горно-Алтайского гос. ун-та, 2016.
8. Кыров В. А. Левоинвариантные метрики некоторых трехмерных групп Ли // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 4. С. 24–36.
9. Тайманов И. А. Операторы Дирака и конформные инварианты торов в трехмерном пространстве // Тр. МИАН. 2004. Т. 204. С. 249–280.
10. Кыров В. А. Поверхности на псевдогельмгольцевой группе // Мат. заметки. 2025. Т. 117, № 2. С. 285–294.

Поступила в редакцию 17 февраля 2025 г.

После доработки 17 мая 2025 г.

Принята к публикации 25 июня 2025 г.

Кыров Владимир Александрович
Горно-алтайский государственный университет,
Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
KurovVA@yandex.ru