Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2025. Том 66, № 5

УДК 517.986.6:512.546.3

ТРАНСЛЯЦИОННО ИНВАРИАНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

Я. А. Копылов

Аннотация. Изучается вопрос о существовании нетривиальных трансляционно инвариантных линейных функционалов на пространствах Орлича $L^{\Phi}(G)$ и Морса — Трэнсью $M^{\Phi}(G)$, где G — локально компактная группа, а Φ — N-функция.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.510

Ключевые слова: локально компактная группа, пространство Орлича, трансляционно инвариантный линейный функционал.

Посвящается светлой памяти
Семёна Самсоновича Кутателадзе

Введение

Все топологические группы в статье предполагаются хаусдорфовыми.

Пусть G — локально компактная топологическая группа, и пусть E — топологическое векторное пространство комплексных или вещественных функций на G, инвариантное относительно левых сдвигов. Для $g \in G$ и $f \in E$ положим $(\lambda_G(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$, $x \in G$. Линейный функционал $\varkappa$ на E называется *трансляционно инвариантным* (или *инвариантным относительно левых сдвигов*), если $\varkappa(\lambda_G(g)f) = \varkappa(f)$ для любых $g \in G$ и $f \in E$. Интересным является вопрос о существовании разрывных трансляционно инвариантных линейных функционалов (ТИЛФ) на E.

Трансляционно инвариантные линейные функционалы в различных функциональных пространствах и, в частности, в пространствах L^p, на локально компактных топологических группах изучались различными авторами. Например, в [1], используя исчерпания Фёльнера, Вудворд установил, что для σ-компактной некомпактной аменабельной группы G в пространстве $L^p(G)$ всегда имеется разрывный трансляционно инвариантный функционал. В [2, 3] Уиллис показал, что если группа G неаменабельна, то в $L^p(G)$ нет ненулевых трансляционно инвариантных функционалов.

В настоящей работе упомянутые результаты Вудворда и Уиллиса обобщаются на пространства Орлича $L^{\Phi}(G)$ и Морса — Трэнсью $M^{\Phi}(G)$, где Φ — N-функция, для которой дополнительная N-функция удовлетворяет условию удвоения.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Проект FWNF–2022–0006).

© 2025 Копылов Я. А.

1. N-функции и пространства Орлича

Пусть далее $\mathbb{F}$ — поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Ниже используем одно и то же обозначение для вещественных и комплексных пространств.

Определение. Функция $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ называется *N-функцией*, если
(i) Φ четна и выпукла;
(ii) $\Phi(x) = 0 \iff x = 0$;
(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty$.

N-функция Ψ, *дополнительная* к N-функции Φ, задается формулой

$$\Psi(y) = \sup\{x|y| - \Phi(x) \, : \, x \geq 0\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно видеть, что если Ψ — дополнительная N-функция к Φ, то Φ — дополнительная N-функция к Ψ.

N-функции классифицируются следующим образом в зависимости от скорости роста.

Говорят, что N-функция Φ *удовлетворяет Δ_2-условию* (*удовлетворяет условию удвоения, принадлежит классу* Δ_2), и пишут $\Phi \in \Delta_2$, если существует константа $K > 2$ такая, что $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ для всех $x \geq 0$. Говорят, что Φ *удовлетворяет ∇_2-условию* (*принадлежит классу* ∇_2), и пишут $\Phi \in \nabla_2$, если найдется константа $c > 1$ такая, что $\Phi(x) \leq \frac{1}{2c}\Phi(cx)$ для всех $x \geq 0$.

Нетрудно видеть, что N-функция Φ удовлетворяет условию Δ_2 тогда и только тогда, когда дополнительная к Φ N-функция Ψ удовлетворяет условию ∇_2.

Пусть далее Φ — N-функция, и пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой.

Для измеримой функции $f : \Omega \to \mathbb{F}$ положим

$$\rho_\Phi(f) := \int\limits_\Omega \Phi(|f|) \, d\mu.$$

Линейное пространство

$$\begin{aligned} L^\Phi = L^\Phi(\Omega) &= L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu) \\ &= \{f : \Omega \to \mathbb{F} \text{ измерима } : \rho_\Phi(af) < \infty \text{ для \textit{некоторого} } a > 0\} \end{aligned}$$

называется *пространством Орлича* на (Ω, Σ, μ).

Пространство

$$\begin{aligned} M^\Phi = M^\Phi(\Omega) &= M^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu) \\ &= \{f : \Omega \to \mathbb{F} \text{ измерима } : \rho_\Phi(af) < \infty \text{ для \textit{всех} } a > 0\} \end{aligned}$$

называется *пространством Морса — Трэнсью.*

Как хорошо известно, если Φ — N-функция класса Δ_2, то

$$L^\Phi(\Omega) = M^\Phi(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{F} \text{ измерима } : \rho_\Phi(f) < \infty\}$$

Пусть Ψ — дополнительная N-функция к Φ.

Ниже, как обычно, две функции, равные всюду вне множества меры нуль, отождествляются.

Если $f \in L^\Phi$, то функционал $\|\cdot\|_\Phi$ (называемый *нормой Орлича*), определяемый условием

$$\|f\|_\Phi = \|f\|_{L^\Phi(\Omega)} = \sup\left\{\left|\int\limits_\Omega fg\,d\mu\right| \,:\, \rho_\Psi(g) \le 1\right\},$$

является полунормой. Он превращается в норму, если мера μ обладает *свойством конечного подмножества* (см. [4, с. 46]): если $A \in \Sigma$ и $\mu(A) > 0$, то найдется множество $B \in \Sigma$, $B \subset A$, такое, что $0 < \mu(B) < \infty$.

Калибровочная норма (или *норма Люксембурга*) функции $f \in L^\Phi$ определяется формулой

$$\|f\|_{(\Phi)} = \|f\|_{L^{(\Phi)}(\Omega)} = \inf\left\{k > 0 \,:\, \rho_\Phi\left(\frac{f}{k}\right) \le 1\right\}.$$

Это норма без всяких ограничений на меру μ (см. [4, с. 54, теорема 3]).

Предположим, что мера μ обладает свойством конечного подмножества. Как доказано в гл. 10 монографии [5], левоинвариантная мера Хаара на локально компактной группе обладает этим свойством.

Хорошо известно, что норма Орлича и калибровочная норма эквивалентны, именно (см., например, [4, с. 61, 62]):

$$\|f\|_{(\Phi)} \le \|f\|_\Phi \le 2\|f\|_{(\Phi)}.$$

Нам понадобится следующая версия неравенства Гёльдера для пространств Орлича [4, с. 62].

Неравенство Гёльдера. *Если Φ и Ψ — дополнительные друг к другу N-функции, $f \in L^\Phi$, $g \in L^\Psi$, то $fg \in L^1$ и*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_{(\Phi)}\|g\|_\Psi \quad (\|fg\|_1 \le \|f\|_\Phi\|g\|_{(\Psi)}).$$

Следовательно,

$$\|fg\|_1 \le 2\|f\|_{(\Phi)}\|g\|_{(\Psi)}.$$

Справедлив следующий аналог теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на пространствах M^Φ (частный случай теоремы 6 из [4, гл. 4]).

Теорема 1. *Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, обладающей свойством конечного подмножества, Φ и Ψ — взаимно дополнительные N-функции. Для всякого непрерывного функционала ξ на пространстве $(M^\Phi, \|\cdot\|_{(\Phi)})$ существует единственный элемент $g \in L^\Psi$ такой, что*

$$\xi(f) = \int\limits_\Omega fg\,d\mu \quad \forall f \in M^\Phi,$$

причем $\|\xi\|_{(M^\Phi, \|\cdot\|_{(\Phi)})'} = \|g\|_\Psi$, т. е. пространство $(M^\Phi, \|\cdot\|_{(\Phi)})'$ изометрически изоморфно пространству $(L^\Psi, \|\cdot\|_\Psi)$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 пространства $(M^\Phi)'$ и L^Ψ с калибровочными нормами топологически изоморфны.*

Всюду ниже будем предполагать, что локально компактная группа снабжена фиксированной левоинвариантной мерой Хаара, а все рассматриваемые на ней пространства Орлича L^Φ и Морса — Трэнсью M^Φ снабжены калибровочной нормой $\|\cdot\|_{(\Phi)}$.

2. Случай аменабельной группы

Пусть G — локально компактная топологическая группа, и пусть E — топологическое векторное пространство комплексных или вещественных функций на G, инвариантное относительно левых сдвигов. Следуя [1], обозначим символом $\Delta(E)$ линейную оболочку множества $\{\lambda_G(g)f - f \ : f \in E,\ g \in G\}$, а символом $\overline{\Delta}(E)$ — замыкание подпространства $\Delta(E)$ в E.

Лемма 1. *Пусть G — некомпактная локально компактная группа, Φ — N-функция. Тогда $\overline{\Delta}(M^\Phi(G)) = M^\Phi(G)$.*

Доказательство. Пусть Ψ — N-функция, дополнительная к Φ. Предположим, что для некоторой функции $f \in L^\Psi(G)$ выполняется равенство

$$\int\limits_G f u\, d\mu_G = 0$$

для всех $u \in \Delta(M^\Phi(G))$. Тогда для всех $a \in M^\Phi(G)$, учитывая левую инвариантность меры Хаара, получаем

$$\int\limits_G a(f - \lambda_G(g)f)\, d\mu_G = \int\limits_G af\, d\mu_G - \int\limits_G a \cdot \lambda_G(g)f\, d\mu_G$$
$$= \int\limits_G af\, d\mu_G - \int\limits_G \lambda_G(g^{-1})a \cdot f\, d\mu_G = \int\limits_G (a - \lambda_G(g^{-1})a)f\, d\mu_G = 0.$$

Согласно теореме 1 $(M^\Phi(G))' \cong L^\Psi(G)$ и потому $f - \lambda_G(g)f = 0$ п.в. для всех $g \in G$. Значит, функция f постоянна, т. е. $f = 0$ п.в. Стандартные следствия теоремы Хана — Банаха влекут, что тогда $\overline{\Delta}(M^\Phi(G)) = M^\Phi(G)$. $\square$

В дальнейшем если V — измеримое множество, то $|V|$ — его мера.

Лемма 2. *Пусть G — аменабельная σ-компактная некомпактная локально компактная группа, Φ — N-функция, Ψ — N-функция, дополнительная к Φ. Тогда существует последовательность $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ открытых предкомпактных подмножеств в G, удовлетворяющих следующим условиям:*

(a) $G = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} V_n$;

(b) $V_n \subset V_{n+1}$ *для всех* $n \in \mathbb{Z}_+$;

(c) *для любой функции* $\theta \in \Delta(M^\Phi(G))$ *существует постоянная* A_θ *такая, что для всех* n

$$\left|\int\limits_{V_n} \theta\, d\mu_G\right| \leq \frac{A_\theta}{\Psi^{-1}(2^n/|V_n|)}.$$

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 2 в [1], пусть $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ — последовательность открытых предкомпактных симметричных окрестностей единицы группы G такая, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n = G$. С использованием σ-компактности и аменабельности группы G и регулярности меры Хаара, в доказательстве леммы 2 в [1] установлено, что найдется последовательность $V_0, V_1, \dots, V_n, \dots$ открытых предкомпактных окрестностей единицы, удовлетворяющая условиям

$$U_{j+1}V_j \subset V_{j+1}; \quad |xV_j \Delta V_j| < 2^{-j}|V_j| \text{ для всех } x \in U_j. \tag{1}$$

Последовательность $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ удовлетворяет условиям (a) и (b).

Пусть $\theta \in \Delta(M^\Phi(G))$. Тогда

$$\theta = \sum_{k=1}^{m}(\theta_k - \lambda_G(x_k)\theta_k),$$

где $\theta_1,\dots,\theta_m \in M^\Phi(G)$ и $x_1,\dots,x_m \in G$. Выберем n_0 так, чтобы $x_1,\dots,x_m \in U_{n_0}$. Для $n \geq n_0$ из условий (1), того факта, что калибровочая L^Ψ-норма характеристической функции измеримого множества E конечной меры равна $\frac{1}{\Psi^{-1}\left(\frac{1}{|E|}\right)}$, и неравенства Гёльдера получаем

$$\Bigg|\int\limits_{V_n}\theta\,d\mu_G\Bigg| \leq \sum_{k=1}^{m}\Bigg|\int\limits_{V_n}\theta_k(x)\,d\mu_G(x) - \int\limits_{V_n}\theta_k(x_k^{-1}x)\,d\mu_G(x)\Bigg|$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\Bigg|\int\limits_{V_n}\theta_k\,d\mu_G - \int\limits_{x_k^{-1}V_n}\theta_k\,d\mu_G\Bigg| \leq 2\sum_{k=1}^{m}\|\theta_k\|_{L^{(\Phi)}(x_k^{-1}V_n\Delta V_n)}\|1\|_{L^{(\Psi)}(x_k^{-1}V_n\Delta V_n)}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m}\frac{\|\theta_k\|_{L^{(\Phi)}(x_k^{-1}V_n\Delta V_n)}}{\Psi^{-1}\left(\frac{1}{|x_k^{-1}V_n\Delta V_n|}\right)} \leq \frac{2\sum\limits_{k=1}^{m}\|\theta_k\|_{L^{(\Phi)}(G)}}{\Psi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right)}.$$

Положим

$$A_\theta := \max\left\{2\sum_{k=1}^{m}\|\theta_k\|_{L^{(\Phi)}(G)},\ \max_{0\leq n\leq n_0}\Psi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right)\Bigg|\int\limits_{V_n}\theta\,d\mu_G\Bigg|\right\}.$$

Лемма 2 доказана. □

Теорема 2. *Пусть G — аменабельная σ-компактная некомпактная локально компактная группа, Φ — N-функция класса ∇_2. Тогда на пространстве $M^\Phi(G)$ имеются разрывные ТИЛФ.*

Доказательство. Пусть $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность открытых предкомпактных окрестностей единицы из доказательства леммы 2. Положим при $n \geq 1$

$$\alpha_n = \frac{1}{n^2}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|V_n|}\right); \quad S_n = V_n \cap \left(G \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1}V_k\right).$$

Определим измеримую функцию θ равенством

$$\theta(x) = \alpha_n \text{ при } x \in S_n, \quad n = 1,2,\dots.$$

С учетом выпуклости Φ для произвольного $c > 1$ имеем

$$\rho_\Phi(c\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{S_n}\Phi(c|\theta(x)|)\,d\mu_G(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Phi\left(\frac{c}{n^2}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|V_n|}\right)\right)|V_n|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{[c]}\Phi\left(\frac{c}{n^2}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|V_n|}\right)\right)|V_n| + \sum_{n=[c]+1}^{\infty}\frac{c}{n^2}\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|V_n|}\right)\right)|V_n|$$

$$= \sum_{n=1}^{[c]}\Phi\left(\frac{c}{n^2}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|V_n|}\right)\right)|V_n| + \sum_{n=[c]+1}^{\infty}\frac{c}{n^2} < \infty.$$

Если же $0 < c \le 1$, то

$$\rho_\Phi(c\theta) \le \rho_\Phi(\theta) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Следовательно, $\theta \in M^\Phi(G)$.

Пусть Ψ — N-функция, дополнительная к Φ. Тогда

$$\left|\int_{V_n} \theta\, d\mu_G\right| \ge \alpha_n |V_n| = \frac{1}{n^2}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|V_n|}\right)|V_n|$$
$$= \frac{1}{n^2}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|V_n|}\right)|V_n|\Psi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right)\frac{1}{\Psi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right)}. \quad (2)$$

В силу предложения 2 гл. II книги [4] имеем

$$\Phi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right)\Psi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right) > \frac{2^n}{|V_n|},$$

откуда

$$\Psi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right) > \frac{2^n}{|V_n|\Phi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right)}. \quad (3)$$

Поскольку $\Phi \in \nabla_2$, по теореме 7(ii) гл. I книги [6]

$$\beta := \inf_{t>0} \frac{\Phi^{-1}(t)}{\Phi^{-1}(2t)} > \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|V_n|}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right)} \ge \beta^n > \frac{1}{2^n}. \quad (4)$$

Учитывая (3) и (4), продолжим оценку снизу (2) следующим образом:

$$\left|\int_{V_n} \theta\mu_G\right| > \frac{2^n}{n^2}\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|V_n|}\right)}{\Phi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right)}\frac{1}{\Psi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right)} > \frac{(2\beta)^n}{n^2}\frac{1}{\Psi^{-1}\left(\frac{2^n}{|V_n|}\right)}.$$

Так как $2\beta > 1$, то $\frac{(2\beta)^n}{n^2} \to \infty$ при $n \to \infty$, и в силу леммы 2 получаем, что тогда $\theta \notin \Delta(M^\Phi(G))$. По лемме 1 $\theta \in \overline{\Delta}(M^\Phi(G)) = M^\Phi(G)$. Таким образом, $\Delta(M^\Phi(G)) \ne \overline{\Delta}(M^\Phi(G))$ и, значит, по теореме A из [1] на $M^\Phi(G)$ существуют разрывные ТИЛФ. $\square$

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1 *существуют разрывные ТИЛФ на* $L^\Phi(G)$.

Доказательство. В самом деле, если $M^\Phi(G) \ne L^\Phi(G)$, то любое продолжение разрывной ТИЛФ $\varkappa$ с $M^\Phi(G)$ на $L^\Phi(G)$ разрывно. $\square$

Если группа G не является σ-компактной, то аменабельность не гарантирует справедливости утверждения теоремы 2 или следствия 2. Напротив, в [1, теорема 5] Вудворд показывает, что если G — достаточно «большая» локально компактная абелева группа, то на пространстве $L^p(G)$ вообще нет ненулевых ТИЛФ.

3. Случай неаменабельной группы

В [2, следствие 1.2] и [3, предложение 1] Уиллис установил, что если группа G неаменабельна, то на $L^p(G)$ нет ненулевых ТИЛФ. Ниже этот результат обобщен на пространства Орлича L^Φ, где Φ — N-функция класса ∇_2.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение. *Пусть Φ — N-функция класса Δ_2. Тогда группа G аменабельна в том и только том случае, если выполнено одно из следующих двух условий:*

(P_Φ) *для любого $\varepsilon > 0$ и любого* компактного *подмножества $F \subset G$ найдется функция $f \in L^\Phi(G)$ такая, что $f \geq 0$, $\|f\|_{(\Phi)} = 1$ и выполнено неравенство*

$$\max_{s \in F} \|\lambda_G(s)f - f\|_{(\Phi)} < \varepsilon;$$

(P_Φ^*) *для любого $\varepsilon > 0$ и любого* конечного *подмножества $F \subset G$ найдется функция $f \in L^\Phi(G)$ такая, что $f \geq 0$, $\|f\|_{(\Phi)} = 1$ и выполнено неравенство*

$$\max_{s \in F} \|\lambda_G(s)f - f\|_{(\Phi)} < \varepsilon.$$

Эквивалентность аменабельности и условия (P_Φ) была установлена в предложении 2 работы [7]. Доказательство эквивалентности аменабельности и условия (P_Φ^*) почти дословно совпадает с доказательством предложения 2 в [7] (с заменой компактных подмножеств на конечные и условия Райтера (P_1) на эквивалентное ему условие (P_1^*), см. [8]).

Теорема 3. *Пусть G — неаменабельная локально компактная группа, Φ — N-функция класса ∇_2. Тогда на $L^\Phi(G)$ нет ненулевых ТИЛФ.*

Доказательство. Пусть Ψ — дополнительная к Φ N-функция. Так как G неаменабельна и $\Psi \in \Delta_2$, то по предложению 1 она не удовлетворяет условию (P_Ψ^*). Поскольку $\Psi \in \Delta_2$, имеем $(L^\Psi(G))' \cong L^\Phi(G)$. Следовательно, из доказательства леммы 1(1) в [3] следует, что на пространстве $L^\Phi(G)$ нет ненулевых ТИЛФ. $\square$

Следствие 3. *В условиях теоремы 3 на $M^\Phi(G)$ нет ненулевых ТИЛФ.*

Благодарность. Автор выражает благодарность проф. Дж. Уиллису за комментарии по поводу его работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Woodward G. S.* Translation-invariant linear forms on $C_0(G)$, $C(G)$, $L^p(G)$ for noncompact groups // J. Func. Anal. 1974. V. 16, N 2. P. 205–220.

2. *Willis G. A.* Translation invariant functionals on $L^p(G)$ when G is not amenable // J. Aust. Math. Soc., Ser. A. 1986. V. 41, N 2. P. 237–250.

3. *Willis G. A.* Continuity of translation invariant linear functionals on $C_0(G)$ for certain locally compact groups G // Monatsh. Math. 1988. V. 105, N 2. P. 161–164.

4. *Rao M. M., Ren Z. D.* Theory of Orlicz spaces. New York etc.: Marcel Dekker, Inc., 1991. (Pure Appl. Math.; V. 146).

5. *Rao M. M.* Measure theory and integration. New York: Marcel Dekker, Inc., 2004. (Pure Appl. Math.; V. 265).

6. *Rao M. M., Ren Z. D.* Applications of Orlicz spaces. New York: Marcel Dekker, 2002. (Pure Appl. Math.; V. 250).

7. *Rao M. M.* Convolutions of vector fields. III: Amenability and spectral properties // Real and Stochastic Analysis. New Perspectives. Boston, MA: Birkhäuser, 2004. P. 375–401.

8. *Reiter H.* L^1-algebras and Segal algebras. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 231).

Поступила в редакцию 11 марта 2025 г.
После доработки 12 апреля 2025 г.
Принята к публикации 11 июня 2025 г.

Копылов Ярослав Анатольевич (ORCID 0000-0002-0343-4424)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
yakop@math.nsc.ru