Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2025. Том 66, № 5

УДК 517.518

О ЛИПШИЦЕВЫХ ГРАФИКАХ НА КЛАССАХ ДВУХСТУПЕНЧАТЫХ ГРУПП КАРНО

М. Б. Карманова

Аннотация. Рассматриваются двухступенчатые группы Карно и их модельные случаи и исследуются вопросы существования на них отображений-графиков, липшицевых во внутреннем смысле. Для общего случая двухступенчатых групп выведен критерий липшицевости отображения-графика в терминах моделирующего этот график отображения. Приведены примеры, демонстрирующие специфику установленных необходимых и достаточных условий.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.509

Ключевые слова: липшицево отображение, внутренняя метрика, отображение-график, двухступенчатая группа Карно.

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

В работах [1–4] и др. рассматриваются классы отображений-графиков, построенных по липшицевым во внутреннем смысле отображениям. Как продемонстрировано на примерах [1], даже в случае, когда график строится по гладкой функции, итоговое отображение липшицевым в субримановом смысле в общем случае не является. Таким образом, оно не является дифференцируемым ни в классическом, ни в субримановом смысле. По этой причине для вывода метрических свойств отображений-графиков в вышеупомянутых работах создан инструментарий, основанный на построении полиномиального субриманова дифференциала, т. е. аппроксимации отображения некоторым полиномом специального вида. Одним из ключевых ходов является построение специфического адаптированного базиса в окрестности каждой точки, который «подстраивает» фактическую структуру окрестности образа точки под свойства аппроксимирующего отображения. Аналоги расстояния и меры Хаусдорфа в [2–4] и других работах автора также определяются через эти дополнительные структуры.

В задачах классического анализа и его обобщений отображения-графики играют существенную роль. Например, классы минимальных и максимальных поверхностей (см. подробности о таких поверхностях, связанных задачах и применениях в [5–8] и цитируемых источниках) локально представимы в виде графиков. Кроме того, в начале XXI века была найдена связь задач нейробиологии о построении моделей визуализации и свойств минимальных поверхностей в субримановой геометрии [9–11]. Ряд работ посвящен исследованию свойств графиков с классическим способом построения и с согласованным с субримановой структурой (см., например, [12–19] и др.), причем когда способ построения

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0006).

согласован с субримановой структурой, а отображение липшицево во внутреннем смысле, сам график в общем случае липшицевым не является, что не всегда позволяет вывести аналог дифференциальных свойств и метрические свойства такие, как площадь поверхности-образа, в явном виде (см. подробности далее в замечании 16). Поэтому возникает естественный вопрос исследования существования и базовых свойств отображений-графиков, способ построения которых согласован с субримановой структурой, которые не требуют изменения неголономной структуры образа, т. е. являются липшицевыми относительно субримановых (квази)метрик. В частности, этот вопрос включает и описание классов отображений, гарантирующих липшицевость построенных по ним графиков.

В данной статье выведены необходимые и достаточные условия на отображения двухступенчатых групп Карно, которые обеспечивают липшицевость построенных по ним графиков. Кроме того, приведены примеры структур, на которых липшицевых графиков не существует (за исключением тривиальных случаев). Также описаны примеры отображений, удовлетворяющих выведенным в критерии свойствам, графики которых будут липшицевыми. В частности, продемонстрированы примеры как липшицевых во внутреннем смысле, так и не являющихся таковыми отображений, графики которых липшицевы.

1. Предварительные сведения

Напомним необходимые термины и свойства исследуемых объектов.

Определение 1 [20]. *Двухступенчатая группа Карно* — это связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представима в виде $V = V_1 \oplus V_2$, $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = \{0\}$.

Если базисное поле X_l принадлежит V_k, то его *степень* $\deg X_l$ равна k, $l = 1, \dots, N$, $k = 1, 2$. Здесь и далее N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Поля, степень которых равна единице, называются *горизонтальными*.

Подчеркнем, что базисные поля на группе Карно выбираются таким образом, что каждое из них принадлежит только одному из множеств V_1 или V_2.

Обозначение 2. Обозначим символом $\dim V_k$ размерность каждого V_k в каждой точке, $k = 1, 2$.

Групповая операция определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа. Если $x = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j\right)(\mathbf{0})$, $y = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\right)(\mathbf{0})$, то

$$x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} y_j X_j\right)(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} z_j X_j\right)(\mathbf{0}),$$

где $z_j = x_j + y_j$ для $\deg X_j = 1$,

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\mu,\beta:\deg X_\mu = \deg X_\beta = 1} F^j_{\mu,\beta} x_\mu y_\beta \tag{1}$$

при $\deg X_j = 2$. Значения $\{F^j_{\mu,\beta}\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами* и не зависят от точек. Отметим, что $F^j_{\mu,\beta} = -F^j_{\beta,\mu}$ для всех значений j, β, μ.

Опишем субриманов аналог расстояния между точками.

Определение 3 (см., например, [1]). Пусть $w = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Положим

$$d_2(v,w) = \max\Big\{\Big(\sum_{j:\deg X_j=1} w_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \Big(\sum_{j:\deg X_j=2} w_j^2\Big)^{\frac{1}{4}}\Big\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v,w) < r\}$ называется *шаром относительно* d_2 *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается символом $\mathrm{Box}_2(v,r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности и локально для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника.

Определение 4. Пусть $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $E \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : E \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Будем говорить, что φ *липшицево во внутреннем смысле*, или *липшицево в субримановом смысле*, если существует константа $0 < L < \infty$ такая, что

$$\widetilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y)) < L d_2(x,y),$$

где $\widetilde{d}_2$ — квазиметрика на $\widetilde{\mathbb{G}}$, построенная по такому же принципу, как в определении 3.

Хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$ относительно d_2 равна $\sum\limits_{k=1}^{2} k \dim V_k$ и обозначается символом ν.

Определение 5. Значение *субримановой меры* для $A \subset \mathbb{G}$ равно

$$\mathscr{H}^\nu(A) = \omega_{\dim V_1}\omega_{\dim V_2} \cdot \lim_{\delta\to 0} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(x_i, r_i) \supset A,\ x_i \in A,\ r_i < \delta\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

Замечание 6. Несмотря на нестандартное определение (в определение $\mathscr{H}^\nu(A)$ добавляется условие $x_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$), функция множества $\mathscr{H}^\nu$ является мерой. В частности, она обладает свойством счетной аддитивности на сигма-алгебре борелевских множеств (см., например, [21]).

2. Модельный случай: группа Гейзенберга

В данном разделе продемонстрируем на примерах, что нетривиальных отображений графиков, построенных по принципу

$$x \mapsto \exp(\varphi(x)X_k)(x),$$

не существует для функций, определенных на специальных классах подмножеств группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1$.

Определение 7. Группа Ли $\mathbb{H}^m$ топологической размерности $2m+1$ называется *группой Гейзенберга*, если в алгебре Ли ее векторных полей существует базис $\{X_i, Y_i, T\}_{i=1}^m$ такой, что

$$[X_i, Y_i] = \alpha T, \quad \alpha \neq 0,\ i = 1, \dots, m,$$

а все остальные коммутаторы равны нулю.

Исследуем далее модельный случай для $m = 1$.

Обозначение 8. Рассмотрим группу Гейзенберга $\mathbb{H} = \mathbb{H}^1$ с базисными полями X, Y, T и единицей группы $\mathbf{0}$. Положим

$$\mathbb{H}_H = \exp\big(\mathrm{span}\{X, Y\}\big)(\mathbf{0}) = \{\exp(xX + yY)(\mathbf{0}) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

и

$$\mathbb{H}_T = \exp(\mathrm{span}\{X, T\})(\mathbf{0}) = \{\exp(xX + tT)(\mathbf{0}) : x, t \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема 9. 1. *Пусть $\varphi : \mathbb{H}_H \to \mathbb{R}$ — такая функция, что отображение-график*

$$\varphi_\Gamma(w) = \exp(\varphi(w)T)(w)$$

является липшицевым относительно квазиметрики d_2 отображением. Тогда $\varphi \equiv \mathrm{const}$.

2. *Пусть $\psi : \mathbb{H}_T \to \mathbb{R}$ — такая функция, что отображение-график*

$$\psi_\Gamma(w) = \exp(\psi(w)Y)(w)$$

является липшицевым относительно квазиметрики d_2 отображением. Тогда $\psi \equiv 0$.

Доказательство. Докажем п. 1. Пусть

$$u = \exp(u_x X + u_y Y)(\mathbf{0}) \text{ и } w = \exp(w_x X + w_y Y)(\mathbf{0}).$$

Тогда

$$w = \exp(v_x X + v_y Y + v_t T)(u),$$

где

$$\begin{cases} v_x = w_x - u_x, \\ v_y = w_y - u_y, \\ v_t = c(w_x u_y - w_y u_x) \end{cases} \tag{2}$$

и константа $c \neq 0$ зависит только от группы $\mathbb{H}$ (см. (1)). Далее, вычислим координаты $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$. Выводим

$$w = \exp(v_x X + v_y Y + (v_t - \varphi(u))T)(\varphi_\Gamma(u))$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_\Gamma(w) &= \exp(v_x X + v_y Y + (v_t + (\varphi(w) - \varphi(u)))T)(\varphi_\Gamma(u)) \\ &= \exp((w_x - u_x)X + (w_y - u_y)Y + (c(w_x u_y - w_y u_x) + (\varphi(w) - \varphi(u)))T)(\varphi_\Gamma(u)). \end{aligned}$$

По условию φ_Γ — липшицево относительно d_2 отображение. Тогда, в частности,

$$\begin{aligned} &|c(w_x u_y - w_y u_x) + (\varphi(w) - \varphi(u))| \\ &\qquad < L \max\{(w_x - u_x)^2 + (w_y - u_y)^2, |c(w_x u_y - w_y u_x)|\} \end{aligned}$$

для некоторого $0 < L < \infty$. Если координаты точки u нулевые, то $u = \mathbf{0}$ и

$$|\varphi(w) - \varphi(\mathbf{0})| < L((w_x)^2 + (w_y)^2).$$

Если же хотя бы одна координата точки u не равна нулю (для определенности предположим, что $u_y \neq 0$), то для точек множества

$$\{w : w_x = w_y \cdot (u_x/u_y)\} \tag{3}$$

имеем $w_x u_y - w_y u_x = 0$ и, следовательно,

$$|\varphi(w) - \varphi(u)| < L((w_x - u_x)^2 + (w_y - u_y)^2). \tag{4}$$

Заметим, что точки w, определяемые соотношением (3), лежат на кривой вида

$$\big\{\exp\big(k \cdot qX + qY\big)(\mathbf{0}) : q \in \mathbb{R}\big\},$$

где $k = u_x/u_y$. При этом если координаты точек при X или при Y равны нулю, то кривые принимают соответственно вид

$$\{\exp(qY)(\mathbf{0}) : q \in \mathbb{R}\} \text{ и } \{\exp(qX)(\mathbf{0}) : q \in \mathbb{R}\}. \tag{5}$$

Далее остается применить стандартные рассуждения. Пусть существует точка w такая, что $\varphi(w) \neq \varphi(\mathbf{0})$. Тогда

$$w = \exp(w_x X + w_y Y)(\mathbf{0}), \text{ где } w_x = k_w \cdot w_y$$

(здесь предполагается, что $w_y \neq 0$). Фиксируем $Q \in \mathbb{N}$ и выберем на множестве

$$\{\exp(k_w \cdot qX + qY)(\mathbf{0}) : q \in \mathbb{R}\}$$

точки $\mathbf{0} = w_1, w_2, \dots, w_Q$ такие, что их координаты w_y^l при поле Y отличаются на величину $|w_y|/Q$, $l = 1, \dots, Q$. Тогда, во-первых, координата w_Q при поле Y отличается от w_y на $|w_y|/Q$ и, во-вторых, с учетом (4) выводим

$$|\varphi(w) - \varphi(\mathbf{0})| \leq |\varphi(w) - \varphi(w_Q)| + \sum_{k=2}^{Q} |\varphi(w_k) - \varphi(w_{k-1})| \\ \leq L \cdot (1 + k_w^2)\bigl(|w_y|/Q\bigr)^2 \cdot Q.$$

Последнее соотношение стремится к нулю при $Q \to \infty$. Случаи, когда w принадлежит одному из множеств (5), рассматривается аналогично. Таким образом, $\varphi(w) = \varphi(\mathbf{0})$ и поэтому $\varphi \equiv \mathrm{const}$, так как точка w выбрана произвольным образом. П. 1 доказан.

Перейдем к доказательству п. 2. Пусть

$$u = \exp(u_x X + u_t T)(\mathbf{0}) \text{ и } w = \exp(w_x X + w_t T)(\mathbf{0}).$$

Тогда

$$w = \exp(v_x X + v_t T)(u),$$

где $v_x = w_x - u_x$, $v_t = w_t - u_t$. При вычислении координат $\psi_\Gamma(w)$ относительно $\psi_\Gamma(u)$ получаем

$$w = \exp(v_x X - \psi(u)Y + (v_t + c\psi(u)v_x)T)(\psi_\Gamma(u)),$$

где значение $c \neq 0$ такое же, как в (2), и

$$\psi_\Gamma(w) = \exp(v_x X + (\psi(w) - \psi(u))Y + (v_t + c(\psi(u) + \psi(w))v_x)T)(\psi_\Gamma(u)).$$

По предположению существует такое $0 < L < \infty$, что

$$\max\{(v_x)^2 + (\psi(w) - \psi(u))^2, |v_t + c(\psi(u) + \psi(w))v_x|\} < L \max\{(v_x)^2, |v_t|\},$$

в частности,

$$|v_t + c(\psi(u) + \psi(w))v_x| < L \max\{(v_x)^2, |v_t|\}.$$

Предположим, что существует такая точка $u \in \mathbb{H}_T$, что $\psi(u) \neq 0$. Рассмотрим точку $w \in \mathbb{H}_T$, координата при поле T которой совпадает с таковой точки u, т. е. $w = \exp(v_x X)(u)$, где $v_x \neq 0$. Следовательно,

$$|\psi(u) + \psi(w)| < L|v_x|/|c|. \tag{6}$$

Так как $c \neq 0$, то при $w \to u$ верно $\psi(w) \to -\psi(u)$. Осталось рассмотреть последовательность $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такую, что $w_k = \exp\bigl(v_x^k X\bigr)(u)$ и $v_x^k \to 0$ при $k \to \infty$.

Тогда $w_k \to u$ при $k \to \infty$. Пусть k_0 — такой номер, что $L|v_x^k|/|c| < |\psi(u)|/3$ для всех $k > k_0$. Пусть еще $k_1, k_2 > k_0$. Из (6) следует, что

$$|\psi(u) + \psi(w_{k_1})| < L|v_x^{k_1}|/|c| \text{ и } |\psi(u) + \psi(w_{k_2})| < L|v_x^{k_2}|/|c|,$$

поэтому в силу выбора $k_0 \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\psi(u) + \psi(w_{k_1})| < |\psi(u)|/3 \text{ и } |\psi(u) + \psi(w_{k_2})| < |\psi(u)|/3.$$

Отсюда выводим, что, во-первых, знак у $\psi(w_{k_1})$ и $\psi(w_{k_2})$ противоположен знаку $\psi(u)$ и, во-вторых,

$$|\psi(w_{k_1})| > \frac{2}{3}|\psi(u)| \text{ и } |\psi(w_{k_2})| > \frac{2}{3}|\psi(u)|.$$

Применим (6) к точкам w_{k_1} и w_{k_2}. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}|\psi(u)| &< |\psi(w_{k_1})| + |\psi(w_{k_2})| = |\psi(w_{k_1}) + \psi(w_{k_2})| \\ &< \frac{L}{c}\big|v_x^{k_1} - v_x^{k_2}\big| \le \frac{L}{c}\big(|v_x^{k_1}| + |v_x^{k_2}|\big) < \frac{2}{3}|\psi(u)|.\end{aligned}$$

Таким образом, получили противоречие. Значит, $\psi \equiv 0$, что завершает доказательство второго утверждения и теоремы. $\square$

Из доказанной теоремы следует более общий результат для функций на двухступенчатых группах Карно. Пусть $\varphi : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{G}$ — двухступенчатая группа Карно топологической размерности N с базисными полями $X_1, \dots, X_N$. Предположим, что $\mathbb{G} \subset \widetilde{\mathbb{G}}$, где $\widetilde{\mathbb{G}}$ — двухступенчатая группа Карно топологической размерности $N+1$ с базисными полями $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_N, Y$, причем

$$\widetilde{X}_k|_{\mathbb{G}} = X_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Далее рассмотрим случаи, когда поле Y горизонтально или когда оно имеет степень два.

Теорема 10. 1. *Пусть поле Y горизонтально. График функции $\varphi : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, построенный по принципу*

$$\varphi_\Gamma(w) = \exp(\varphi(w)Y)(w), \tag{7}$$

липшицев во внутреннем смысле тогда и только тогда, когда 1) *таковым является φ и $[Y, X_k] = 0$ для всех $k = 1, \dots, N$, или когда* 2) *верно $\varphi \equiv 0$.*

2. *Пусть поле Y имеет степень два. График функции $\varphi : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, построенный по принципу* (7), *липшицев тогда и только тогда, когда $\varphi \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. Докажем п. 1, когда поле Y горизонтально. Для $u, w \in \mathbb{G}$, где $w = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(u)$, имеем

$$u = \exp(-\varphi(u)Y)(\varphi_\Gamma(u))$$

и

$$w = \exp\left(-\varphi(u)Y + \sum_{i=1}^{N} v_i X_i\right)(\varphi_\Gamma(u)),$$

где $v_i = w_i$, если $\deg X_i = 1$, и

$$v_i = w_i - \varphi(u) \sum_{\beta:\deg X_\beta=1} F^i_{Y,\beta} w_\beta,$$

если $\deg X_i = 2$. В силу формулы Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа при фиксированном β таком, что $\deg X_\beta = 1$, хотя бы одна из констант $F^i_{Y,\beta}$ отлична от нуля для некоторого i, где $\deg X_i = 2$, тогда и только тогда, когда $[Y, X_\beta] \neq 0$.

Далее, $\varphi_\Gamma(w) = \exp\Bigl((\varphi(w) - \varphi(u))Y + \sum\limits_{i=1}^N s_i X_i\Bigr)(\varphi_\Gamma(u))$, где $s_i = v_i = w_i$, если $\deg X_i = 1$, и

$$s_i = w_i - (\varphi(u) + \varphi(w)) \sum_{\beta:\deg X_\beta=1} F^i_{Y,\beta} w_\beta, \tag{8}$$

если $\deg X_i = 2$.

Так как значения констант не зависят от точки, для $u \in \mathbb{G}$ рассмотрим такой элемент w, что все $w_i = 0$ для $\deg X_i = 2$. Иными словами, $w = \exp\bigl(\sum\limits_{j:\deg X_j=1} w_j X_j\bigr)(u)$.

Пусть отображение-график φ_Γ является липшицевым. Тогда, в частности, для рассматриваемых u и w верно

$$\Bigl|(\varphi(u) + \varphi(w)) \sum_{\beta:\deg X_\beta=1} F^i_{Y,\beta} w_\beta\Bigr| < L \sum_{j:\deg X_j=1} (w_j)^2. \tag{9}$$

Остается применить рассуждения доказательства п. 2 теоремы 9, которые идут после соотношения (6), для точек $w = \exp(w_\beta X_\beta)(u)$, $\deg X_\beta = 1$. Следовательно, если $F^i_{Y,\beta} \neq 0$ хотя бы для одной пары чисел i и β, где $\deg X_i = 2$ и $\deg X_\beta = 1$, то $\varphi \equiv 0$, так как в противном случае (9) не выполняется. Если же все $F^i_{Y,\beta}$ равны 0, то (9) верно для любых значений $\varphi(u) + \varphi(w)$, и значения s_i из (8) совпадут с w_i для всех i таких, что $\deg X_i = 2$.

Кроме того, так как φ_Γ — липшицево отображение, то для коэффициента $\varphi(w) - \varphi(u)$ при поле Y должно выполняться

$$|\varphi(w) - \varphi(u)| \leq L d_2(u, w),$$

т. е. само отображение φ также липшицево во внутреннем смысле. Если же $\varphi \equiv 0$, то это соотношение также верно.

Обратное утверждение очевидно: если φ липшицево во внутреннем смысле, а поле Y коммутирует со всеми остальными полями, то и отображение-график также будет липшицевым во внутреннем смысле.

Докажем п. 2. В этом случае

$$\varphi_\Gamma(w) = \exp\Bigl((\varphi(w) - \varphi(u))Y + \sum_{i=1}^N w_i X_i\Bigr)(\varphi_\Gamma(u)),$$

где $w = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^N w_i X_i\Bigr)(u)$. Тогда если φ_Γ липшицево во внутреннем смысле, то

$$|\varphi(w) - \varphi(u)|^{1/2} \leq L d_2(u, w).$$

Рассмотрим такие u и w, что $w = \exp\big(\sum\limits_{i:\deg X_i=1} w_i X_i\big)(u)$. Следовательно,

$$|\varphi(w) - \varphi(u)| \leq L^2 \sum_{i:\deg X_i=1} (w_i)^2.$$

Далее остается разделить интегральную линию поля $\sum\limits_{i:\deg X_i=1} w_i X_i$, соединяющую u и w, на Q равных частей, $Q \in \mathbb{N}$, и применить рассуждения доказательства п. 1 теоремы 9 при $Q \to \infty$. Отсюда получим, что $\varphi \equiv \mathrm{const}$. Обратное утверждение очевидно. П. 2 и теорема доказаны.

3. Описание липшицевых графиков на двухступенчатых группах Карно

Рассмотрим более общий случай отображений двухступенчатых групп Карно. Основной результат раздела и статьи, теорема 13, получен при следующих условиях.

Предположение 11. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — двухступенчатые группы Карно с базисными полями $\{X_i\}_{i=1}^N$ и $\{\widetilde{X}_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$ соответственно, которые являются подмножествами двухступенчатой группы Карно $\widehat{\mathbb{G}}$ топологической размерности $\widehat{N} = N + \widetilde{N}$ со структурными константами $\{F^j_{\mu,\beta}\}_{j,\mu,\beta}$ и квазиметрикой $\widehat{d}_2$, заданной, как в определении 3. Пусть еще базисные векторные поля $\{\widehat{X}_i\}_{i=1}^{\widehat{N}}$ на $\widehat{\mathbb{G}}$ таковы, что, во-первых, $\dim \widehat{V}_k = \dim V_k + \dim \widetilde{V}_k$, $k = 1, 2$, и, во-вторых,*

$$\widehat{X}_1|_{\mathbb{G}} = X_1, \dots, \widehat{X}_{\dim V_1}|_{\mathbb{G}} = X_{\dim V_1},$$

$$\widehat{X}_{\dim \widehat{V}_1+1}|_{\mathbb{G}} = X_{\dim V_1+1}, \dots, \widehat{X}_{\dim \widehat{V}_1+\dim V_2}|_{\mathbb{G}} = X_N$$

и

$$\widehat{X}_{\dim V_1+1}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_1, \dots, \widehat{X}_{\dim \widehat{V}_1}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\dim \widetilde{V}_1},$$

$$\widehat{X}_{\dim \widehat{V}_1+\dim V_2+1}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\dim \widetilde{V}_1+1}, \dots, \widehat{X}_{\widehat{N}}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\widetilde{N}}.$$

Обозначение 12. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — двухступенчатые группы Карно, $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ и $u, w \in \mathbb{G}$. Обозначим координаты элемента $\varphi(w)$ относительно $\varphi(u)$ символами $\big\{\varphi^k_u(w)\big\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$, где $\widetilde{N}$ — топологическая размерность $\widetilde{\mathbb{G}}$.

Иными словами, если $\{\widetilde{X}_k\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$ — базисные векторные поля на $\widetilde{\mathbb{G}}$, то

$$\varphi(w) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \varphi^k_u(w)\widetilde{X}_k\right)(\varphi(u)). \tag{10}$$

Теорема 13. *Пусть для двухступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ и $\widehat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 11 и $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — некоторое отображение. Тогда график $\varphi_\Gamma : \mathbb{G} \to \widehat{\mathbb{G}}$, построенный как*

$$\mathbb{G} \ni w \mapsto \exp\left(\sum_{j=\dim V_1+1}^{\dim \widehat{V}_1} \varphi_{j-\dim V_1}(w)\widehat{X}_j + \sum_{j=\dim \widehat{V}_1+\dim V_2+1}^{\widehat{N}} \varphi_{j-N}(w)\widehat{X}_j\right)(w),$$

где

$$\varphi(w)=\exp\left(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}}\varphi_j(w)\widetilde{X}_j\right)(\mathbf{0}),$$

липшицев относительно d_2 *и* $\widehat{d_2}$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.*

1. *Координатные функции* φ_j *липшицевы во внутреннем смысле, если* $j\le\dim\widetilde{V}_1$.

2. *Если* $k=\dim\widehat{V}_1+1,\dots,\dim\widehat{V}_1+\dim V_2$, *то*

$$\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]}F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)=0$$

для всех $\beta=1,\dots,\dim V_1$ *и* $u\in\mathbb{G}$.

3. *Для* $k>\dim\widehat{V}_1+\dim V_2$ *и точек* $u,w_H\in\mathbb{G}$ *таких, что*

$$w_H=\exp\left(\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}w_\beta X_\beta\right)(u),$$

функция $w_H\mapsto\varphi_u^{k-N}(w_H)$ *дифференцируема (в классическом смысле) в* u, *ее дифференциал равен*

$$\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Bigl(\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]}2F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\Bigr)w_\beta, \tag{11}$$

а величина $o(1)$ *из определения дифференцируемости не превосходит величины* $Q\cdot\sqrt{\sum\limits_{\beta=1}^{\dim V_1}(w_\beta)^2}$, *где константа* $0<Q<\infty$ *не зависит от* u.

Если же $w_T=\exp\left(\sum\limits_{\lambda=\dim V_1+1}^{N}w_\lambda X_\lambda\right)(u)$, *то*

$$|\varphi_u^{k-N}(w_T)|\le C\cdot\sqrt{\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^{N}(w_\lambda)^2},\quad C<\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы прежде всего рассмотрим точки $u,w\in\mathbb{G}$, где $w=\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N}w_iX_i\right)(u)$, и вычислим координаты элемента $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$. Имеем

$$u=\exp\left(-\sum_{j=\dim V_1+1}^{\dim\widehat{V}_1}\varphi_{j-\dim V_1}(u)\widehat{X}_j-\sum_{j=\dim\widehat{V}_1+\dim V_2+1}^{\widehat{N}}\varphi_{j-N}(u)\widehat{X}_j\right)(\varphi_\Gamma(u)),$$

тогда $w=\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{\widehat{N}}v_j\widehat{X}_j\right)(\varphi_\Gamma(u))$, где $v_j=w_j$, если $j=1,\dots,\dim V_1$, $v_j=-\varphi_{j-\dim V_1}(u)$, если $j=\dim V_1+1,\dots,\dim\widehat{V}_1$.

В свою очередь, для $j=\dim\widehat{V}_1+1,\dots,\dim\widehat{V}_1+\dim V_2$ имеем

$$v_j=w_{j-\dim\widetilde{V}_1}-\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]}}F^j_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)w_\beta,$$

а для $j > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ верно

$$v_j = -\varphi_{j-N}(u) - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^j_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)w_\beta.$$

Найдем теперь координаты $\{s_k\}_{k=1}^{\widehat{N}}$, где $\varphi_\Gamma(w) = \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{\widehat{N}} s_k\widehat{X}_k\right)(\varphi_\Gamma(u))$. Здесь $s_k = w_k$, если $k = 1,\dots,\dim V_1$, $s_k = \varphi_{k-\dim V_1}(w) - \varphi_{k-\dim V_1}(u)$, если $k = \dim V_1 + 1,\dots,\dim \widehat{V}_1$.

Пусть k совпадает с одним из значений $\dim \widehat{V}_1+1,\dots,\dim \widehat{V}_1+\dim V_2$. Тогда

$$s_k = v_k + \sum_{\mu,\beta:\deg \widehat{X}_\mu=\deg \widehat{X}_\beta=1} F^k_{\mu,\beta}v_\mu\varphi_{\beta-\dim V_1}(w),$$

где $\beta = \dim V_1 + 1,\dots,\dim \widehat{V}_1$, тогда как $\mu = 1,\dots,\dim \widehat{V}_1$. Распишем правую часть выведенного соотношения на случаи, когда $\mu \le \dim V_1$ и когда $\mu > \dim V_1$. Получаем

$$\begin{aligned} s_k = v_k &+ \sum_{\substack{\mu,\beta:\mu\in[1,\dim V_1],\\ \beta\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}v_\mu\varphi_{\beta-\dim V_1}(w)\\ &\qquad + \sum_{\mu,\beta:\mu,\beta\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}v_\mu\varphi_{\beta-\dim V_1}\\ &\qquad = v_k + \sum_{\substack{\mu,\beta:\mu\in[1,\dim V_1],\\ \beta\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}w_\mu\varphi_{\beta-\dim V_1}(w)\\ &\qquad\qquad - \sum_{\mu,\beta:\mu,\beta\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\varphi_{\beta-\dim V_1}(w). \end{aligned}$$

Раскрывая значение v_k, находим, что полученное выражение равно

$$\begin{aligned} w_{k-\dim \widetilde{V}_1} &- \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)w_\beta\\ &\qquad + \sum_{\substack{\mu,\beta:\mu\in[1,\dim V_1],\\ \beta\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}w_\mu\varphi_{\beta-\dim V_1}(w)\\ &- \sum_{\mu,\beta:\mu,\beta\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\varphi_{\beta-\dim V_1}(w)\\ &= w_{k-\dim \widetilde{V}_1} - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(u) + \varphi_{\mu-\dim V_1}(w))w_\beta\\ &\qquad - \sum_{\mu,\beta:\mu,\beta\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\varphi_{\beta-\dim V_1}(w). \end{aligned} \tag{13}$$

Аналогично для $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ верно

$$s_k = \varphi_{k-N}(w) - \varphi_{k-N}(u) - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(u) + \varphi_{\mu-\dim V_1}(w))w_\beta - \sum_{\mu,\beta:\mu,\beta\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\varphi_{\beta-\dim V_1}(w). \quad (14)$$

Установим необходимость. Пусть отображение φ_Γ липшицево относительно d_2 и $\widehat{d}_2$. Тогда, в частности, для $k = \dim V_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1$ справедливо

$$|\varphi_{k-\dim V_1}(w) - \varphi_{k-\dim V_1}(u)| < Ld_2(u, w), \quad (15)$$

где $0 < L < \infty$, что доказывает необходимость выполнения первого условия.

Пусть теперь $k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$. Так как групповая операция и структурные константы определяются формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа, то $F^k_{\mu,\beta} \neq 0$, только если в выражении коммутатора $[\widehat{X}_\mu, \widehat{X}_\beta]$ через линейную комбинацию полей степени два поле $\widehat{X}_k$ присутствует с ненулевым коэффициентом. Если $\mu, \beta \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]$, то по условию $\widehat{X}_\mu|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\mu-\dim V_1}$ и $\widehat{X}_\beta|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\beta-\dim V_1}$, поэтому на $\widetilde{\mathbb{G}}$ их коммутатор не может содержать слагаемых с полями, не лежащими на $\widetilde{\mathbb{G}}$. Следовательно, $F^k_{\mu,\beta}|_{\widetilde{\mathbb{G}}} = 0$, если $k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ и $\mu, \beta \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]$. Так как значения структурных констант не зависит от точек, то верно $F^k_{\mu,\beta} = 0$ для вышеупомянутых k, μ, β. Поэтому (13) совпадает со значением

$$w_{k-\dim \widetilde{V}_1} - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(u) + \varphi_{\mu-\dim V_1}(w))w_\beta$$
$$= w_{k-\dim \widetilde{V}_1} - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta - 2\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta. \quad (16)$$

Фиксируем $\beta = 1, \dots, \dim V_1$ и точку $w = \exp(w_\beta X_\beta)(u) = \exp(w_\beta \widehat{X}_\beta)(u)$. Тогда, в частности, верно

$$\Bigg| \sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta + 2\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)w_\beta \Bigg| < L^2(w_\beta)^2. \quad (17)$$

Разделим обе части (17) на $(w_\beta)^2$ и рассмотрим случай, когда $w_\beta \to 0$. В силу доказанного (см. (15))

$$\Bigg| \sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} \frac{F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))}{w_\beta} \Bigg| < K < \infty,$$

так как $\varphi_1, \dots, \varphi_{\dim \widetilde{V}_1}$ липшицевы относительно d_2 и $\widetilde{d}_2$. Из (17) также следует, что

$$2\Bigg|\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} \frac{F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)}{w_\beta}\Bigg| < L^2 + K < \infty$$

при $w_\beta \to 0$. Это возможно только в случае, если

$$\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u) = 0 \tag{18}$$

для всех $u \in \mathbb{G}$. Необходимость второго условия установлена. Таким образом, получили $\dim V_2 \cdot \dim V_1$ уравнений, так как $k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$, $\beta = 1, \dots, \dim V_1$. В полученной системе $\dim \widetilde{V}_1$ неизвестных. Заметим, что (18) верно всегда, если $\varphi \equiv 0$ или $F^k_{\mu,\beta} = 0$ для значений $\beta = 1, \dots, \dim V_1$, $\mu = \dim V_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1$ и $k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$.

Преобразуем теперь (14), когда $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$. Имеем

$$\begin{aligned}\varphi_{k-N}(w) - \varphi_{k-N}(u) - &\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta \\ &- 2\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)w_\beta \\ &- \sum_{\mu,\beta:\mu,\beta\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\varphi_{\beta-\dim V_1}(w).\end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим точку $w_H = \exp\Big(\sum\limits_{\beta=1}^{\dim V_1} w_\beta X_\beta\Big)(u)$. Для нее верно

$$\begin{aligned}\Big|\varphi_{k-N}(w_H) - \varphi_{k-N}(u) - &\sum_{\mu,\lambda:\mu,\lambda\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\lambda}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\varphi_{\lambda-\dim V_1}(w_H) \\ &- 2\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)w_\beta \\ - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} &F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w_H) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta\Big| < L^2 \sum_{\beta=1}^{\dim V_1}(w_\beta)^2.\end{aligned}$$

Так как

$$|\varphi_j(w_H) - \varphi_j(u)| \le L \cdot \Big(\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}(w_\beta)^2\Big)^{1/2}$$

для $j = 1, \dots, \dim \widetilde{V}_1$, то, в свою очередь,

$$\begin{aligned}&\bigg|\Big(\varphi_{k-N}(w_H) - \varphi_{k-N}(u) - \sum_{\mu,\lambda:\mu,\lambda\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\lambda}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\varphi_{\lambda-\dim V_1}(w_H)\Big) \\ &- \sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Big(\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} 2F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\Big)w_\beta\bigg| < (L^2+K)\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}(w_\beta)^2.\end{aligned} \tag{20}$$

Заметим, что правая часть (20) равна $o(d_R(u, w_H))$, где d_R — расстояние, определяемое римановым тензором, а величина $o(1)$ не превосходит $Q \cdot \sqrt{\sum\limits_{\beta=1}^{\dim V_1}(w_\beta)^2}$, где $0 < Q < \infty$ не зависит от u, а зависит только от φ и от группы $\widehat{\mathbb{G}}$. Подчеркнем, что (см. обозначение 12)

$$\varphi_u^{k-N}(w_H) = \varphi_{k-N}(w_H) - \varphi_{k-N}(u) \\ - \sum_{\mu,\lambda:\mu,\lambda\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\lambda}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\varphi_{\lambda-\dim V_1}(w_H),$$

т. е. $\varphi_u^{k-N}(w_H)$ совпадает с координатой номер $k-N$ элемента $\varphi(w_H)$ относительно $\varphi(u)$ на $\widetilde{\mathbb{G}}$. Действительно, для $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ и $\mu, \lambda \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]$ константы $F^k_{\mu,\lambda}$ на $\widehat{\mathbb{G}}$ в силу предположения 11 совпадают с константами $F^{k-N}_{\mu-\dim V_1,\lambda-\dim V_1}$ на $\widetilde{\mathbb{G}}$, которые выводятся из формулы Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа. Из (20) следует, что $\varphi_u^{k-N}(w_H)$ дифференцируема в точке u, и ее дифференциал равен

$$\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Big(\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]} 2F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\Big)w_\beta.$$

Подчеркнем, что утверждение о дифференцируемости справедливо только для точек w_H из окрестности u, которые являются концевыми точками интегральных линий горизонтальных векторных полей $X_1, \dots, X_{\dim V_1}$.

Если рассмотрим

$$w_T = \exp\Bigg(\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^{N} w_\lambda X_\lambda\Bigg)(u),$$

то получим $\left|\varphi_u^{k-N}(w_T)\right| < L^2\sqrt{\sum\limits_{\lambda=\dim V_1+1}^{N}(w_\lambda)^2}$, т. е. классическую липшицевость (относительно метрики, определяемой римановым тензором) координаты $\varphi_u^{k-N}(w_T)$. Таким образом, необходимость третьего условия доказана.

Установим теперь достаточность. Напомним, что $w = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\Big)(u)$. Если выполнено условие (15), то все горизонтальные координаты $\{s_k\}_{k=1}^{\dim\widehat{V}_1}$, где $\varphi_\Gamma(w) = \exp\Big(\sum\limits_{k=1}^{\widehat{N}} s_k\widehat{X}_k\Big)(\varphi_\Gamma(u))$, будут контролироваться d_2-расстоянием между u и w.

Далее, пусть верно (18) для $k = \dim\widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim\widehat{V}_1 + \dim V_2$ и всех $\beta = 1, \dots, \dim V_1$ и $u \in \mathbb{G}$. Тогда имеем (ср. (16))

$$s_k = w_{k-\dim\widetilde{V}_1} - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta \\ - 2\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta,$$

где

$$\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\dim V_1} w_\beta \cdot \sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)) = 0,$$

поэтому

$$s_k = w_{k-\dim \widetilde{V}_1} - \sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1]\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta,$$

и $|s_k|^{1/2} \leq Kd_2(u,w)$, $K<\infty$, в силу (15).

Пусть теперь $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$. Рассмотрим вспомогательные точки $w_H = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{\dim V_1} w_iX_i\Bigr)(u)$ и $\varphi(w_H)$. В силу (1) выводим, что

$$w = \exp\Biggl(\sum_{i=\dim V_1+1}^{N} w_iX_i\Biggr)(w_H).$$

Тогда (см. (10)) имеем

$$\begin{aligned}\varphi^{k-N}_u(w) &= \varphi^{k-N}_u(w_H) + \varphi^{k-N}_{w_H}(w)\\ &+ \sum_{\mu,\lambda} F^k_{\mu,\lambda}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w_H) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))(\varphi_{\lambda-\dim V_1}(w) - \varphi_{\lambda-\dim V_1}(w_H)),\end{aligned}$$

где $\mu,\lambda \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]$. По предположению справедливы неравенства

$$\bigl|\varphi^{k-N}_{w_H}(w)\bigr| < C^2\sqrt{\sum_{i=\dim V_1+1}^{N}(w_i)^2} \leq C^2(d_2(u,w))^2$$

и

$$\max\{|\varphi_{\mu-\dim V_1}(w_H) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u)|, |\varphi_{\lambda-\dim V_1}(w) - \varphi_{\lambda-\dim V_1}(w_H)|\} \leq Ld_2(u,w).$$

Кроме того,

$$\varphi^{k-N}_u(w_H) = \sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Biggl(\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} 2F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\Biggr)w_\beta + o(1)\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{\dim V_1}(w_i)^2},$$

причем по предположению

$$\Biggl|\varphi^{k-N}_u(w_H) - \sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Biggl(\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} 2F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\Biggr)w_\beta\Biggr| < Q\cdot\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}(w_\beta)^2.$$

Таким образом,

$$\Biggl|\varphi^{k-N}_u(w) - \sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Biggl(\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} 2F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\Biggr)w_\beta\Biggr|$$

$$\leq \left|\varphi_u^{k-N}(w_H) - \sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Big(\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} 2F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\Big)w_\beta\right| + \left|\varphi_{w_H}^{k-N}(w)\right|$$

$$+\Big|\sum_{\mu,\lambda} F^k_{\mu,\lambda}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w_H)-\varphi_{\mu-\dim V_1}(u))(\varphi_{\lambda-\dim V_1}(w)-\varphi_{\lambda-\dim V_1}(w_H))\Big|,$$

где в третьем слагаемом в правой части суммирование идет по $\mu,\lambda\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]$. Кроме того, суммы в правой части неравенства не превосходят $P\cdot(d_2(u,w))^2$, а $0<P<\infty$ не зависит от $u,w\in\mathbb{G}$. С учетом того, что

$$\varphi_u^{k-N}(w) - \sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Big(\sum_{\mu:\mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} 2F^k_{\mu,\beta}\varphi_{\mu-\dim V_1}(u)\Big)w_\beta$$

отличается от величины s_k из (14) на

$$\Big|\sum_{\substack{\mu,\beta:\beta\in[1,\dim V_1],\\ \mu\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]}} F^k_{\mu,\beta}(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w)-\varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta\Big| < R\cdot(d_2(u,w))^2,$$

$R<\infty$ (см. (19)), выводим $|s_k|^{1/2}<L\cdot d_2(u,w)$ для $k>\dim\widehat{V}_1+\dim V_2$, $L<\infty$. Достаточность установлена, и теорема доказана.

Замечание 14. Если константы Q и C не зависят от рассматриваемой окрестности группы $\mathbb{G}$, то утверждения теоремы 13 справедливы для глобальной липшицевости отображения-графика. Если же эти константы зависят от окрестности, то речь идет о локальной липшицевости отображения-графика.

Пример 15. Пусть $\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}\subset\widehat{\mathbb{G}}$ таковы, что $[\widehat{X}_i,\widehat{X}_j]=0$, если $i=1,\dots,\dim V_1$ и $j=\dim V_1+1,\dots,\dim\widehat{V}_1$, а $\varphi:\mathbb{G}\to\widetilde{\mathbb{G}}$ липшицево во внутреннем смысле. Тогда построенный по этому отображению график φ_Γ будет также липшицевым во внутреннем смысле.

Действительно, первое условие выполняется по определению. Второе условие верно в силу того, что все $F^k_{\mu,\beta}=0$ для $k=\dim\widehat{V}_1+1,\dots,\widehat{N}$, $\mu=\dim V_1+1,\dots,\dim\widehat{V}_1$ и $\beta=1,\dots,\dim V_1$ и $u\in\mathbb{G}$. Из этого же условия, из (20) и из липшицевости φ относительно d_2 и $\widetilde{d}_2$ следует, что $\left|\varphi_u^{k-N}(w_H)\right|\leq Q\sum\limits_{i=1}^{\dim V_1}w_i^2$ для всех $u\in\mathbb{G}$ и $w_H=\exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{\dim V_1}w_iX_i\Big)(u)$, а условие (12) также верно по определению.

Замечание 16. При выполнении условий примера 15 субриманов дифференциал для φ_Γ можно записать в явном виде почти в каждой точке x, а именно, в точках hc-дифференцируемости φ. Действительно, применением групповой операции для вычисления координат $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$ с учетом равенства нулю коммутаторов полей из образа и прообраза отображения следует, что hc-дифференциал φ_Γ почти всюду имеет вид [22, формула (2.5)] (без необходимости построения адаптированного базиса). Следовательно, к такому отображению применимы результаты [23], и формула площади имеет такой же вид, как [2, теорема 2.28, соотношения (2.7) и (2.8)], где в правой части (2.7) интегрирование идет не по адаптированной мере $\mathscr{H}^\nu_\Gamma$, а по субримановой мере Хаусдорфа на образе, $\mathscr{H}^\nu$:

$$\int\limits_{\Omega}\prod_{j=1}^{2}\sqrt{\det\big(E_{\dim V_j}+(\widehat{D}\varphi)^*_{\widetilde{V}_jV_j}(x)(\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_jV_j}(x)\big)}\,d\mathscr{H}^\nu(x)=\int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)}d\mathscr{H}^\nu(y).$$

Такая формула верна и для отображений групп Карно произвольной глубины:

$$\int\limits_{\Omega}\prod_{j=1}^{M}\sqrt{\det\bigl(E_{\dim V_j}+(\widehat{D}\varphi)^*_{\widetilde{V}_jV_j}(x)(\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_jV_j}(x)\bigr)}\,d\mathscr{H}^\nu(x)=\int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)}d\mathscr{H}^\nu(y).$$

Результат для общего случая, когда поля в образе и прообразе не коммутируют и график не является липшицевым, изложен также в явном виде в [2, теорема 2.28, соотношения (2.7) и (2.8)] при дополнительном предположении гладкости по части переменных. Отметим, что вариант формулы площади для случая, когда дополнительной гладкости нет, установлен в [19], однако для меры на образе вводится некоторый сферический множитель, тогда как на прообразе и для вычисления якобиана используется «риманова» мера Хаусдорфа, построенная по метрике, определяемой скалярным произведением.

Отметим также, что результат [4, теорема 2.24] о сублоренцевой площади верен для графиков непрерывно субриманово дифференцируемых [24] отображений двухступенчатых групп Карно без дополнительных предположений гладкости. Такие отображения являются аналогом C^1-отображений, т. е. подклассом локально липшицевых во внутреннем смысле. Для случая, когда на образе в условиях [4, теорема 2.24] «отрицательных» направлений нет, справедлива формула площади для субримановой меры, построенной по квазиметрике $\widehat{d}_2$ и посчитанной с учетом некоторого множителя, выведенного в [4] в явном виде.

Пример 17. Если выполнены условия 1, 2 и (12) теоремы 13 и, кроме того, функции $\varphi_u^{k-N}(w_H)$, $k>\dim\widehat{V}_1+\dim V_2$, дифференцируемы дважды по $w_1,\dots,w_{\dim V_1}$, где дифференциал равен (11), а вторые производные равномерно ограничены, то график такого отображения также будет липшицевым во внутреннем смысле.

Пример 18. Пусть $\mathbb{G},\widetilde{\mathbb{G}}\subset\widehat{\mathbb{G}}$ таковы, что существует ненулевое решение $(t_{\dim V_1+1},\dots,t_{\dim\widehat{V}_1})$ у системы уравнений

$$\sum_{\mu=\dim V_1+1}^{\dim\widehat{V}_1}F^k_{\mu,\beta}t_\mu=0,\ k=\dim\widehat{V}_1+1,\dots,\dim\widehat{V}_1+\dim V_2,\ \beta=1,\dots,\dim V_1.$$

Для $\mu=\dim V_1+1,\dots,\dim\widehat{V}_1$ положим $\varphi_{\mu-\dim V_1}\equiv t_\mu$. Если же $\mu=\dim\widehat{V}_1+\dim V_2+1,\dots,\widehat{N}$, то для $w=\exp\biggl(\sum\limits_{i=1}^{N}w_iX_i\biggr)(\mathbf{0})$ определим

$$\varphi_{\mu-N}(w)=\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Bigl(\sum_{\lambda:\lambda\in[\dim V_1+1,\dim\widehat{V}_1]}2F^\mu_{\lambda,\beta}\varphi_{\lambda-\dim V_1}\Bigr)w_\beta.$$

Тогда первые два условия теоремы 13 выполнены по определению. Далее, если $u=\exp\biggl(\sum\limits_{i=1}^{N}u_iX_i\biggr)(\mathbf{0})$ и $w_H=\exp\biggl(\sum\limits_{\beta=1}^{\dim V_1}w_\beta X_\beta\biggr)(u)$, то

$$w_H=\exp\Biggl(\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}(w_\beta+u_\beta)X_\beta+\sum_{\beta=\dim V_1+1}^{N}(\widetilde{u}_\beta)X_\beta\Biggr)(\mathbf{0}),$$

где координаты $\widetilde{u}_\beta$ посчитаны по соотношению (1) для $\beta = \dim V_1 + 1, \dots, N$. Так как $\varphi_{\lambda-\dim V_1} \equiv \text{const}$ для $\lambda = \dim V_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1$, то

$$\begin{aligned}\varphi_u^{\mu-N}(w_H) &= \varphi_{\mu-N}(w_H) - \varphi_{\mu-N}(u)\\ &= \sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Bigl(\sum_{\lambda:\lambda\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} 2F^{\mu}_{\lambda,\beta}\varphi_{\lambda-\dim V_1}\Bigr)(w_\beta + u_\beta - u_\beta)\\ &= \sum_{\beta=1}^{\dim V_1}\Bigl(\sum_{\lambda:\lambda\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} 2F^{\mu}_{\lambda,\beta}\varphi_{\lambda-\dim V_1}\Bigr)w_\beta \qquad (21)\end{aligned}$$

для $\mu = \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2 + 1, \dots, \widehat{N}$. Если же $w_T = \exp\Bigl(\sum\limits_{\lambda=\dim V_1+1}^{N} w_\lambda X_\lambda\Bigr)(u)$, то

$$w_T = \exp\Biggl(\sum_{\beta=1}^{\dim V_1}(u_\beta)X_\beta + \sum_{\beta=\dim V_1+1}^{N}(u_\beta + w_\beta)X_\beta\Biggr)(\mathbf{0})$$

и $\varphi_u^{\mu-N}(w_T) = \varphi_{\mu-N}(w_T) - \varphi_{\mu-N}(u) \equiv 0$, поэтому третье условие теоремы 13 также выполнено.

Подчеркнем, что если хотя бы один из коэффициентов

$$\sum_{\lambda:\lambda\in[\dim V_1+1,\dim \widehat{V}_1]} 2F^{\mu}_{\lambda,\beta}\varphi_{\lambda-\dim V_1}$$

из соотношения (21) не равен нулю для некоторых значений μ и β, то существует $0 < K < \infty$ такое, что $\bigl|\varphi_u^{\mu-N}(w)\bigr| > K|w_\beta - u_\beta|$, если $w = \exp(w_\beta X_\beta)(\mathbf{0})$ и $u = \exp(u_\beta X_\beta)(\mathbf{0})$. Так как $\beta \le \dim V_1$, то

$$\widetilde{d}_2(\varphi(w), \varphi(u)) > K^{1/2}|w_\beta - u_\beta|^{1/2} = K^{1/2}(d_2(u,w))^{1/2}.$$

Таким образом, φ не является липшицевым во внутреннем смысле, тогда как построенное по нему отображение-график φ_Γ липшицево относительно d_2 и $\widehat{d}_2$ в силу теоремы 13.

Опишем еще один случай, демонстрирующий, что график липшицева в субримановом смысле отображения может быть также липшицевым.

Пример 19. Рассмотрим группу Гейзенберга $\mathbb{H}^3$ топологической размерности 7 (см. определение 7) с полями X_i, Y_i, T, $i = 1, \dots, 3$.

В качестве $\widehat{\mathbb{G}}$ рассмотрим многообразие топологической размерности 6 с касательными полями X_1, Y_1, $X_2 + X_3, Y_2, Y_3, T$. Это распределение интегрируемо, поэтому многообразие $\widehat{\mathbb{G}}$ существует. Оно является двухступенчатой группой Карно.

В качестве $\mathbb{G}$ определим многообразие с касательными полями X_1, Y_1, $X_2 + X_3, T$, а в качестве $\widetilde{\mathbb{G}}$ — многообразие с касательными полями Y_2, Y_3. Пусть для определенности все три многообразия проходят через единицу $\mathbf{0}$ группы $\mathbb{H}^3$.

Положим $Z_1 = X_1$, $Z_2 = Y_1$, $Z_3 = X_2 + X_3$, $Z_4 = Y_2$, $Z_5 = Y_3$, $Z_6 = T$. Тогда единственные ненулевые структурные константы $F^6_{i,j}$ из соотношения (1) равны между собой по модулю, а именно,

$$F^6_{12} = F^6_{34} = F^6_{35} = -F^6_{53} = -F^6_{43} = -F^6_{21} \neq 0, \qquad (22)$$

при этом остальные константы равны нулю.

Пусть $\varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ — липшицевы функции. При этом они могут быть липшицевыми как относительно римановой метрики на $\mathbb{G}$, так и относительно d_2. Зададим $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$, полагая

$$\mathbb{G} \ni x \mapsto \exp\left(\sum_{i=2}^{3} \varphi_i(x) Y_i\right)(\mathbf{0}).$$

Если дополнительно предположить, что в каждой точке $x \in \mathbb{G}$ верно

$$\sum_{i=2}^{3} \varphi_i(x) = 0, \tag{23}$$

иными словами, $\varphi_2 = \psi = -\varphi_3$, то отображение-график

$$\mathbb{G} \ni x \overset{\varphi_\Gamma}{\mapsto} \exp(\psi(x) Z_4 - \psi(x) Z_5)(x) \in \widehat{\mathbb{G}}$$

будет липшицевым относительно d_2 и $\widehat{d_2}$. Действительно, (23) — это запись соотношения (18) с учетом (22), т. е. второе условие теоремы 13. Первое и третье условия выполняются по определению.

Замечание 20. Если в качестве $\widehat{\mathbb{G}}$ рассматривать $\mathbb{H}^3$, структуру $\mathbb{G}$ задавать полями X_1, Y_1, X_2, X_3, T, а $\widetilde{\mathbb{G}}$ оставить без изменения, то условие (23) заменится системой

$$\begin{cases} \varphi_2(u) = 0, \\ \varphi_3(u) = 0, \end{cases}$$

т. е. график будет липшицевым только для тривиального набора функций.

Замечание 21. Пример 19 можно распространить на случай произвольной размерности. А именно, достаточно рассмотреть группу Гейзенберга $\mathbb{H}^m$, для $\widehat{\mathbb{G}}$ взять набор $X_1, Y_1, \sum\limits_{k=2}^{m} X_m, T$, а для $\widetilde{\mathbb{G}}$ — набор $Y_2, \dots, Y_m$. Тогда

$$T = \left[\sum_{k=2}^{m} X_m, Y_2\right] = \ldots = \left[\sum_{k=2}^{m} X_m, Y_m\right],$$

и условие (18) примет вид

$$\sum_{i=2}^{m} \varphi_i(x) = 0,$$

где $\varphi_i : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ — липшицевы функции (здесь липшицевость можно рассматривать и относительно римановой метрики, и относительно d_2), $i = 2, \dots, m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
2. *Карманова М. Б.* Формулы площади для классов гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1056–1079.
3. *Карманова М. Б.* Двуступенчатые сублоренцевы структуры и поверхности-графики // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84, № 1. С. 60–104.
4. *Карманова М. Б.* Площадь графиков на произвольных группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 823–848.
5. *Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Волгоград: ВолГУ, 2011.

6. *Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.

7. *Тужилин А. А., Фоменко А. Т.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.

8. *Fomenko A. T. (ed.)* Minimal surfaces. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1993. V. 15.

9. *Citti G., Sarti A.* A cortical based model of perceptual completion in the rototranslation space // Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. 2004. V. 3. P. 145–161.

10. *Hladky R. K., Pauls S. D.* Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging and Vision. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.

11. *Petitot J.* Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionelles. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.

12. *Capogna L., Citti G., Manfredini M.* Regularity of non-characteristic minimal graphs in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 5. P. 2115–2160.

13. *Capogna L., Citti G., Manfredini M.* Smoothness of Lipschitz intrinsic minimal graphs in Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, $n > 1$ // J. Reine Angew. Math. 2010. V. 2010, N 648. P. 75–110.

14. *Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M.* A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing // Am. J. Math. 2008. V. 130, N 2. P. 317–339.

15. *Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M., Pauls S. D.* Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // J. Differ. Geom. 2009. V. 81. P. 251–295.

16. *Garofalo N., Pauls S. D.* The Bernstein problem in the Heisenberg group. West Lafayette, Indiana: Purdue Univ., 2005.

17. *Barbieri D., Citti G.* Regularity of minimal intrinsic graphs in 3-dimensional sub-Riemannian structures of step 2 // J. Math. Pures Appl. 2011. V. 96, N 3. P. 279–306.

18. *Julia A., Nicolussi Golo S., Vittone D.* Area of intrinsic graphs and coarea formula in Carnot groups // Math. Z. 2022. V. 301. P. 1369–1406.

19. *Corni F., Magnani V.* Area of intrinsic graphs in homogeneous groups. [Электронный ресурс]. arXiv:2311.06638v1 [math.MG]. 2023.

20. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.

21. *Карманова М. Б.* Площадь образов классов измеримых множеств на группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 1048–1070.

22. *Карманова М. Б.* О полиномиальной субримановой дифференцируемости некоторых гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 305–332.

23. *Карманова М. Б.* Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.

24. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.

Поступила в редакцию 26 марта 2025 г.
После доработки 26 марта 2025 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com