Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2025. Том 66, № 5

УДК 517.518

О ЛАКУНАРНОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ p–ИЧНЫХ АНАЛОГОВ ХАОСА РАДЕМАХЕРА

А. Д. Казакова, М. Г. Плотников

Аннотация. Для двух систем функций, являющихся p-ичными аналогами хаосов Радемахера, доказывается их q-лакунарность и изучаются множества единственности.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.508

Ключевые слова: q-лакунарность, неравенство Хинчина, множества единственности, хаос Радемахера, системы Виленкина — Крестенсона.

Введение

В работе изучаются вопросы, связанные с лакунарностью и единственностью для систем функций. Систему функций $(\varphi_k : [0,1) \to \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N})$ назовем *системой единственности*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ сходимость к нулю на множестве E с $\mu(E) > 1 - \varepsilon$ ряда по системе (φ_k) влечет равенство нулю всех его коэффициентов. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ будем говорить, следуя [1], что (φ_k) является *системой ε-единственности*, если она удовлетворяет условию из определения системы единственности с заданным ε.

Классические полные в L_2 системы функций (тригонометрическая система, системы Уолша, Хаара, Франклина) не являются системами единственности [2–7]. Для этих систем сходимость к нулю даже почти всюду не гарантирует равенства нулю всех их коэффициентов (для тригонометрической системы примером является нуль-ряд Меньшова). Системами единственности обычно являются лакунарные в некотором смысле системы. В узком смысле под лакунарными понимают разреженные подсистемы других систем функций. В широком смысле лакунарность означает [8], что система функций обладает некоторыми свойствами, присущими системам независимых (в вероятностном смысле) функций.

В. Ф. Гапошкин исследовал [8] различные вопросы, в том числе связанные с ε-единственностью, для систем функций, лакунарных в разных смыслах. В [8] рассматривались как общие системы функций, так и конкретные, в частности, подсистемы тригонометрической системы и системы Уолша. Система функций $(\varphi_k : [0,1) \to \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N})$ называется *системой q-лакунарности*, где $q > 2$, если имеет место L_2-L_q-неравенство Хинчина

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\|_{L_q} \le \kappa \left\|(c_k)_{k=1}^{n}\right\|_{l_2}, \quad \kappa = \kappa(q) > 0 \text{ не зависит от } c_k \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Первый автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М. В. Ломоносова.

Можно писать $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\|_{L_2}$ вместо нормы справа, если (φ_k) является ортонормированной системой или системой Рисса; последнее означает, что найдутся $R > r > 0$ такие, что

$$r\big\|(c_k)_{k=1}^n\big\|_{l_2} \le \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\|_{L_2} \le R\big\|(c_k)_{k=1}^n\big\|_{l_2}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Пусть система $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ортонормирована или является системой Рисса. Несложно показать (см., например, [9, гл. 2] для случая $q = 4$ и системы Радемахера), что тогда из (1) вытекает L_1-L_2-неравенство Хинчина

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\|_{L_1} \ge \kappa_0\big\|(c_k)_{k=1}^n\big\|_{l_2}, \quad \kappa_0 = \kappa_0(q) > 0 \text{ не зависит от } c_k \in \mathbb{C}.$$

Из этого, в свою очередь, следует согласно результатам [8], что (φ_k) является системой единственности. В частности, любая система q-лакунарности, являющаяся ортонормированной или системой Рисса, является системой единственности.

Классическим примером лакунарной системы является система функций Радемахера [10, 11]. С одной стороны, эта система является лакунарной по Адамару подсистемой системы Уолша, одной из классических систем функций в анализе. С другой стороны система Радемахера является системой независимых симметричных бернуллиевских случайных величин.

С. Б. Стечкин и П. Л. Ульянов установили [12], что система Радемахера является системой $1/2$-единственности, причем константа $1/2$ неулучшаема. Кури обобщил [13] этот результат на случай произвольных лакунарных по Адамару подсистем системы Уолша. Проблемам единственности для системы Радемахера и других подсистем системы Уолша посвящены также работы С. Ф. Лукомского [14, 15].

В работах [16, 17] Бонами доказала (см. также [9, 18]), что система, состоящая из d-членных произведений различных функции Радемахера (*d-хаос Радемахера*) является системой q-лакунарности. Значит, она является и системой единственности. С. В. Асташкин и Р. С. Суханов нашли [1], что точная константа ε-единственности для d-хаоса Радемахера есть $\varepsilon = 1/2^d$.

В данной работе обобщаются результаты о q-лакунарности и ε-единственности со случая двоичной системы счисления, с которой связана система Радемахера, на случай p-ичной системы с произвольным натуральным основанием $p \ge 2$. При этом возникают как минимум два способа обобщить хаос Радемахера на p-ичный случай. Рассмотрим системы функций

$$\big\{VC_n,\ n \in V_p^{(d)}\big\}, \tag{2}$$

$$\big\{VC_n,\ n \in \widetilde{V}_p^{(d)}\big\}. \tag{3}$$

Здесь VC_n — функции Виленкина — Крестенсона, $p \ge 2$ и $d \ge 1$ — натуральные числа, а $V_p^{(d)} \subset \widetilde{V}_p^{(d)}$ — множества, состоящие из всех натуральных n соответственно следующего вида (все $k_j \in \mathbb{N}_0$):

$$n = p^{k_1} + \dots + p^{k_s}, \quad k_1 < \dots < k_s, \quad s \le d; \tag{4}$$

$$n = n_{k_1}p^{k_1} + \dots + n_{k_s}p^{k_s}, \quad k_1 < \dots < k_s, \quad s \le d, \quad n_{k_j} \in \{1, \dots, p-1\}. \tag{5}$$

Системы (2) и (3) являются аналогами хаосов Радемахера.

В работе доказано, что (2) и (3) являются системами q-лакунарности и, как следствие, системами единственности. Также находятся точные константы ε, при которых эти системы являются системами ε-единственности.

В отличие от хаоса Радемахера функции (случайные величины) из (2) и (3) являются комплекснозначными, а их действительные части, вообще говоря, не являются симметричными. Кроме того, хаос Радемахера состоит из всевозможных d-членных произведений, составленных из элементов последовательности независимых функций. Система (2) устроена подобным образом, в то время как в (3) элементы формируются не только из элементов последовательности независимых функций, но и из их степеней.

В конце работы результаты об ε-единственности для систем (2) и (3) сравниваются с полученными в [19] результатами подобного рода для систем из функций $\exp(2\pi inx)$, где n берется из множеств $V_p^{(d)}$, $\widetilde{V}_p^{(d)}$ и $\pm\widetilde{V}_p^{(d)}$.

1. Основные определения, обозначения и вспомогательные факты

1.1. Определения и обозначения. Пишем $:=$ для равенства по определению. Используем обозначение $a:b$ для множества $\{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$ [20]; μ — мера Лебега на множестве $[0,1)$; $\mathbb{N}$ означает множество натуральных, $\mathbb{R}$ — действительных, $\mathbb{C}$ — комплексных чисел, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lfloor a \rfloor$ — нижняя целая часть числа $a \geq 0$; I_E — характеристическая функция (индикатор) множества E;

$$L_q = L_q[0,1) = \left\{ f : [0,1) \to \mathbb{C} : \left(\int_0^1 |f(x)|^q \, d\mu \right)^{1/q} =: \|f\|_{L_q} =: \|f\|_q < \infty \right\}.$$

$$\left\| (c_k)_{k=1}^n \right\|_{l_2} := \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{1/2}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Сходимость последовательностей векторов в пространствах $\mathbb{C}^n$ понимается как сходимость в евклидовой норме $\| \ \|_2$ или в одной из эквивалентных норм. $\| \ \|_{2,2}$ — операторная норма матрицы, порожденная векторной нормой $\| \ \|_2$:

$$\|A\|_{2,2} := \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \|A\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_2.$$

До конца работы выберем и зафиксируем произвольное натуральное $p \geq 2$, $\omega := \exp(2\pi i/p)$.

p-Ичными интервалами (ранга k) будем называть полуинтервалы вида

$$\Delta_m^{(k)} := [mp^{-k}, (m+1)p^{-k}) \subset [0,1), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in 0 : p^k - 1. \tag{6}$$

Обобщенные функции Радемахера на $[0,1)$ определяются формулой

$$R_k(x) := \omega^{\lfloor x \cdot p^{k+1} \rfloor}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Нетрудно показать, что $R_k(x) = \omega^{x_k}$, где x_k — коэффициенты из разложения

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^{-k-1}, \quad x_k \in 0 : p-1, \tag{7}$$

числа x в бесконечную p-ичную дробь. Если таких разложений два, берем то, для которого $x_k = 0$, начиная с некоторого k.

Всевозможные конечные произведения функций R_k называют *функциями Виленкина — Крестенсона* VC_n (В–К), а при $p = 2$ — *функциями Уолша.* В нумерации Пэли

$$VC_n = \prod_{k=0}^{H(n)} (R_k)^{n_k},$$

где n_k — коэффициенты p-ичного разложения числа $n \in \mathbb{N}_0$:

$$n = \sum_{k=0}^{H(n)} n_k p^k, \quad n_k \in 0 : p-1$$

При $n \le p^k - 1$ функция VC_n принимает постоянное значение $=: VC_n(\Delta)$ на каждом p-ичном интервале Δ ранга k. Эти значения можно собрать в *k-ю матрицу Виленкина —Крестенсона* $\mathrm{VC}^{(k)} := (VC_n(\Delta_m^{(k)}),\ n, m \in 0 : p^k - 1)$ (нумерация $\Delta_m^{(k)}$ соответствует (6)). Свойства таких матриц изучались, например, в [20]. В частности, все $\mathrm{VC}^{(k)}$ невырожденны и (черта означает комплексное сопряжение)

$$(\mathrm{VC}^{(k)})^{-1} = \frac{1}{p^k}\,\overline{\mathrm{VC}^{(k)}}^{T}. \tag{8}$$

1.2. Вспомогательные результаты. Следующий результат доказан в [19].

Лемма 1. *Пусть $p \ge 2$, $E_0, \dots, E_{p-1} \subset [0, 1)$, причем $\mu E_m \ge a$ для всех m. Тогда $\mu H \ge \frac{pa-1}{p-1}$,*

$$H := \{x : x \text{ — элемент минимум двух из множеств } E_0, \dots, E_{p-1}\}.$$

Лемма 2 есть частный случай теоремы 6.5.1 из [21].

Лемма 2. *Если для последовательности независимых действительнозначных симметрично распределенных случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ и некоторых $q_1 \ge q_2 \ge 1$ неравенство*

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k \xi_k\right\|_{q_1} \le \kappa \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k \xi_k\right\|_{q_2}$$

выполнено с константой κ, не зависящей от $a_k \in \mathbb{R}$, то с некоторой константой $C_s \ge 1$, зависящей лишь от s, справедливо неравенство

$$\Big\| \sum_{0 \le k_1 < k_2 < \dots < k_s \le n} a_{k_1 k_2 \dots k_s} \xi_{k_1} \xi_{k_2} \dots \xi_{k_s} \Big\|_{q_1} \\ \le C_s \kappa^s \Big\| \sum_{0 \le k_1 < k_2 < \dots < k_s \le n} a_{k_1 k_2 \dots k_s} \xi_{k_1} \xi_{k_2} \dots \xi_{k_s} \Big\|_{q_2}.$$

Лемма 3. *Пусть функции $g_k : \{0, \dots, p-1\} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, заданы формулой $g_k(m) = \alpha_k^m$. Тогда функции $f_k(x) := g_k(x_k)$ образуют последовательность независимых функций. Здесь x_k — коэффициенты из разложения* (7).

Доказательство. Достаточно доказать для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_k \in \mathbb{R}$ равенство

$$\mu\{x \in [0, 1) : f_0(x) = \varepsilon_0, \dots, f_n(x) = \varepsilon_n\} = \prod_{k=0}^{n} \mu\{x \in [0, 1) : f_k(x) = \varepsilon_k\}. \tag{9}$$

Пусть ε_k встречается $M(k)$ раз среди α_k^m. Тогда множество $\{x \in [0,1) : f_k(x) = \varepsilon_k\}$ является дизъюнктным объединением $M(k)p^k$ p-ичных интервалов ранга $k+1$ и его мера есть $M(k)p^k/p^{k+1} = M(k)/p$. Тогда вся правая часть (9) равна $p^{-(n+1)} \prod\limits_{k=0}^{n} M(k)$.

Вычислим левую часть (9). Если $b_k \in 0 : p-1$, то множество тех x, коэффициенты x_k из разложения (7) которых совпадают с b_k для всех $k = 0, \dots, n$, образует некоторый p-ичный интервал ранга $p^{-(n+1)}$. Тогда множество из левой части (9) является дизъюнктным объединением $\prod\limits_{k=0}^{n} M(k)$ таких p-ичных интервалов и его мера $p^{-(n+1)} \prod\limits_{k=0}^{n} M(k)$ совпадает с правой частью (9). Лемма доказана.

2. Основные результаты

Сначала покажем, что системы (2) и (3) являются q-лакунарными и, как следствие, системами единственности.

Теорема 1. *Для каждого $q > 2$ система функций* (3) *является системой q-лакунарности, т. е. для всех натуральных N*

$$\Big\| \sum_{n \in \widetilde{V}_p^{(d)} \cap [1,N]} c_n V C_n \Big\|_q \le C \|(c_n)_{n \in \widetilde{V}_p^{(d)} \cap [1,N]}\|_{l_2}, \tag{10}$$

$C = C(p,d,q)$ не зависит от $c_n \in \mathbb{C}$. Как следствие, (2) *также есть система q-лакунарности.*

Доказательство. Положим $\widetilde{W}_p^{(s)} := \widetilde{V}_p^{(s)} \setminus \widetilde{V}_p^{(s-1)}$, т. е. $\widetilde{W}_p^{(s)}$ состоит из всех $n \in \mathbb{N}$, у которых ровно s ненулевых p-ичных коэффициентов. Очевидно,

$$\widetilde{V}_p^{(d)} = \bigsqcup_{s=1}^{d} \widetilde{W}_p^{(s)}.$$

Возьмем и зафиксируем любое натуральное L, а вслед за ним произвольный набор чисел $j_0, \dots, j_L$, взятых из множества $\{1, \dots, p-1\}$. Рассмотрим множество

$$A_{j_0 \dots j_L}^{(s)} := \big\{ n \in \widetilde{W}_p^{(s)} : n = j_{k_1} p^{k_1} + \dots + j_{k_s} p^{k_s} \big\},$$

состоящее из тех натуральных n, у которых ровно s ненулевых p-ичных коэффициентов, причем каждый ненулевой n_k совпадает с j_k. Очевидно, $n < p^{L+1}$ для таких n.

Случайные величины $\operatorname{Re} R_k^{j_k}$ и $\operatorname{Im} R_k^{j_k}$ действительнозначны. Вторая из них симметрична, а первую можно представить как сумму $p-1$ симметрично распределенных случайных величин:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} R_k^{j_k}(x) &= \sum_{m=0}^{p-1} \cos\left(\frac{2\pi m j_k}{p}\right) \mathrm{I}_{[m/p,(m+1)/p)}(p^k x) \\ &= \sum_{m=1}^{p-1} \left(\cos\left(\frac{2\pi m j_k}{p}\right) \mathrm{I}_{[m/p,(m+1)/p)}(p^k x) - \cos\left(\frac{2\pi m j_k}{p}\right) \mathrm{I}_{[0,1/p]}(p^k x) \right), \end{aligned} \tag{11}$$

нужное разложение содержится в нижней строке (11). Здесь индикаторы $\mathrm{I}_{[m/p,(m+1)/p)}$ 1-периодично продолжены на правую полуось.

Для каждого $k = 0, \dots, L$ обозначим через $f_{k,\alpha}(x)$ функции $\operatorname{Im} R_k^{j_k}(x)$, а также функции в скобках в (11) (тогда α пробегает p значений). Кроме того, для комплексного c_n обозначим через $a_{n,\alpha}$ его действительную либо мнимую часть.

Неравенства Минковского и Коши — Буняковского дают

$$\Big\| \sum_{n\in A^{(s)}_{j_0\cdots j_L}} c_n VC_n \Big\|_q^2 \le \Big(\sum_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_s} \Big\| \sum_{0\le k_1<\dots<k_s\le L} a_{k_1,\dots,k_s,\alpha_0} f_{k_1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot f_{k_s,\alpha_s} \Big\|_q \Big)^2$$

$$\le p^s \sum_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_s} \Big\| \sum_{0\le k_1<\dots<k_s\le L} a_{k_1,\dots,k_s,\alpha_0} f_{k_1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot f_{k_s,\alpha_s} \Big\|_q^2, \tag{12}$$

где $0 \le k_1 < \dots < k_s \le L$, $n = j_{k_1}p^{k_1} + \dots + j_{k_s}p^{k_s}$, $a_{k_1,\dots,k_s,\alpha_0} = a_{n,\alpha_0}$. По лемме 3 случайные величины $f_{k,\alpha}$ с различными k действительнозначны, ограничены, независимы и имеют нулевое математическое ожидание. Поэтому [22, 23] для любого набора $\beta_0, \dots, \beta_L$ справедливо следующее:

$$\Big\| \sum_{k=0}^n a_k f_{k,\beta_k} \Big\|_q \le \kappa \Big\| \sum_{k=0}^n a_k f_{k,\beta_k} \Big\|_2, \quad \kappa = \kappa(q) \text{ не зависит от } a_k \in \mathbb{R}.$$

Так как случайные величины $f_{k,\alpha}$ еще и симметричны, из неравенства выше и леммы 2 получаем, что правая часть (12) не превосходит

$$C_1 \sum_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_s} \Big\| \sum_{0\le k_1<\dots<k_s\le L} a_{k_1,\dots,k_s,\alpha_0} f_{k_1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot f_{k_s,\alpha_s} \Big\|_2^2, \quad C_1 = C_1(p,d,q). \tag{13}$$

Поскольку случайные величины $f_{k,\alpha}$ симметричны и независимы, они некоррелированы. Их L_2-нормы не превосходят 1. Следовательно, выражение в (13) не превосходит

$$C_1 \sum_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_s} \sum_{0\le k_1<\dots<k_s\le L} |a_{k_1,\dots,k_s,\alpha_0}|^2 \le C_1 p^{s+1} \sum_{0\le k_1<\dots<k_s\le L} |a_{k_1,\dots,k_s,\alpha_0}|^2$$

$$\le C_2 \sum_{n\in A^{(s)}_{j_0\cdots j_L}} |c_n|^2, \quad C_2 = C_2(p,d,q). \tag{14}$$

Из (12)–(14) получаем L_2-L_q-неравенство Хинчина для систем $A^{(s)}_{j_0\cdots j_L} \subset \widetilde{W}_p^{(s)}$:

$$\Big\| \sum_{n\in A^{(s)}_{j_0\cdots j_L}\cap[1,N]} c_n VC_n \Big\|_q^2 \le C_2 \sum_{n\in A^{(s)}_{j_0\cdots j_L}} |c_n|^2. \tag{15}$$

Распространим (15) на систему $\widetilde{W}_p^{(s)}$. Запишем равенство

$$\sum_{n\in\widetilde{W}_p^{(s)}\cap[1,N]} c_n VC_n = \frac{1}{(p-1)^{L+1-s}} \sum_{j_0,\dots,j_L} \sum_{n\in A^{(s)}_{j_0\cdots j_L}\cap[1,N]} c_n VC_n, \ p^L \le N < p^{L+1}. \tag{16}$$

В (16) сумма слева разбита на $(p-1)^{L+1}$ сумм, в каждую из которых входят функции В–К VC_n вида $(R_{k_1})^{j_{k_1}} \dots (R_{k_s})^{j_{k_s}}$ с фиксированным s, а степени зависят только от номера k функции R_k. Множитель $(p-1)^{s-L-1}$ возникает из-за того, что каждая такая функция входит в $(p-1)^{L+1-s}$ разных сумм (другими словами, каждое $n \in \widetilde{W}_p^{(s)} \cap [1,N]$ попадает в $(p-1)^{L+1-s}$ множеств вида $A^{(s)}_{j_0\dots j_L}\cap[1,N]$). Применяя (15), (16) и неравенство Минковского, а также используя ортогональность системы В–К, получаем

$$\Big\|\sum_{n\in\widetilde{W}_p^{(s)}\cap[1,N]} c_nVC_n\Big\|_q^2\le\frac{1}{(p-1)^{2(L+1-s)}}\Big(\sum_{j_0,\dots,j_L}\Big\|\sum_{n\in A^{(s)}_{j_0\cdots j_L}\cap[1,N]} c_nVC_n\Big\|_q\Big)^2$$
$$\le\frac{(p-1)^{L+1}}{(p-1)^{2(L+1-s)}}\sum_{j_0,\dots,j_L}\Big\|\sum_{n\in A^{(s)}_{j_0\cdots j_L}\cap[1,N]} c_nVC_n\Big\|_q^2$$
$$\le\frac{(C_2)^2}{(p-1)^{L+1-2s}}\sum_{j_0,\dots,j_L}\sum_{n\in A^{(s)}_{j_0\cdots j_L}}|c_n|^2=\frac{(C_2)^2(p-1)^{L+1-s}}{(p-1)^{L+1-2s}}\sum_{n\in\widetilde{W}_p^{(s)}\cap[1,N]}|c_n|^2$$
$$=(C_2)^2(p-1)^s\sum_{n\in\widetilde{W}_p^{(s)}\cap[1,N]}|c_n|^2.$$

Наконец, с учетом цепочки выше для системы $\widetilde{V}_p^{(d)}=\bigsqcup_{s=1}^{d}\widetilde{W}_p^{(s)}$ верно следующее:

$$\Big\|\sum_{n\in\widetilde{V}_p^{(d)}\cap[1,N]} c_nVC_n\Big\|_q^2\le\left(\sum_{s=1}^{d}\Big\|\sum_{n\in\widetilde{W}_p^{(s)}\cap[1,N]} c_nVC_n\Big\|_q\right)^2$$
$$\le d\sum_{s=1}^{d}\Big\|\sum_{n\in\widetilde{W}_p^{(s)}\cap[1,N]} c_nVC_n\Big\|_q^2$$
$$\le d(C_2)^2(p-1)^d\sum_{s=1}^{d}\sum_{n\in\widetilde{W}_p^{(s)}\cap[1,N]}|c_n|^2=C^2\sum_{n\in\widetilde{V}_p^{(d)}\cap[1,N]}|c_n|^2,\quad C=C(p,d,q),$$

а это равносильно (10).

Далее находим точные константы для ε-единственности систем (2) и (3). Следующие леммы 4 и 5 обобщают в разных направлениях теорему 3 из [12]. Содержащиеся в них утверждения служат базой индукции для теорем 2 и 3. Техника доказательства лемм 4, 5 и теорем 2 и 3 базируется на идеях из [1, 12, 19].

Лемма 4. *Если ряд по системе обобщенных функций Радемахера*

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_kR_k(x)\tag{17}$$

сходится к постоянной C на множестве $E\subset[0,1)$ меры $\mu(E)>\frac{1}{p}$, то $C=0$ и все $c_k=0$.

Доказательство. Во-первых, если ряд (17) сходится на множестве E положительной меры E, то он сходится п.в. на $[0,1)$. Доказательство этого факта практически дословно повторяет доказательство теоремы 1 в [12], нужно лишь степени двойки поменять на степени p.

Дальнейшее доказательство проведем от противного. Предположим, что существует не тождественно нулевой ряд (17), сходящийся к нулю на множестве E меры $\mu(E)>p^{-1}$. Возьмем первый отличный от нуля коэффициент $c_{\widetilde{k}}$. Для всех m_1, $m_2\in 0:p-1$, $m_1\ne m_2$, рассмотрим выражение

$$d_{m_1,m_2}(x):=\sum_{k=0}^{\infty}c_kR_k(x+m_1p^{-\widetilde{k}-1})-\sum_{k=0}^{\infty}c_kR_k(x+m_2p^{-\widetilde{k}-1}).\tag{18}$$

При $k > \widetilde{k}$ члены обоих рядов из (18) совпадают между собой в силу p^{-k}-периодичности функции R_k. Отсюда и из выбора $c_{\widetilde{k}}$ вытекает равенство

$$d_{m_1,m_2}(x) = c_{\widetilde{k}}[R_{\widetilde{k}}(x + m_1 p^{-\widetilde{k}-1}) - R_{\widetilde{k}}(x + m_2 p^{-\widetilde{k}-1})]. \tag{19}$$

Из определения обобщенных функций Радемахера вытекает, что выражение в квадратных скобках в (19) не равно нулю. Поэтому $d_{m_1,m_2}(x) \neq 0$ для п.в. $x \in [0,1)$.

С другой стороны, для всех $m \in 0 : p-1$ сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k R_k(x + mp^{-\widetilde{k}-1})$ равна C на множестве

$$E_m := E - mp^{-\widetilde{k}-1} \pmod 1 \tag{20}$$

меры, большей $1/p$. Если предположить, что $\mu(E_{m_1} \cap E_{m_2}) = 0$ при всех $m_1 \neq m_2$, то

$$\mu\left(\bigcup_{m=0}^{p-1} E_m\right) = \sum_{m=0}^{p-1} \mu(E_m). \tag{21}$$

Но левая часть (21) не больше 1, а правая больше, так как каждое из p слагаемых больше p^{-1}. Значит, $\mu(E_{m_1} \cap E_{m_2}) \neq 0$ для некоторых $m_1 \neq m_2$. Следовательно, $d_{m_1,m_2}(x) = 0$ на множестве $E_{m_1} \cap E_{m_2}$ положительной меры. Это противоречит тому, что $d_{m_1,m_2}(x) \neq 0$ п.в. на $[0,1)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 5. *Если $\mu(E) > 1 - \frac{1}{p}$, $E \subset [0,1)$, и ряд*

$$\sum_{n \in \widetilde{V}_p^{(1)}} c_n VC_n(x) \tag{22}$$

сходится к некоторой постоянной C на множестве E, то $C = 0$ и все $c_n = 0$.

Доказательство. Предположим, что существует ненулевой ряд (22), сходящийся к нулю на множестве E меры $\mu(E) > \frac{p-1}{p}$. Из всех $n \neq 0$ с $c_n \neq 0$ выберем n с минимальным k_1 из формулы (5). Обозначим соответственно через $\widetilde{n}$ и $\widetilde{k}$ такие n и k_1.

Мера множества

$$X = \bigcap_{m=0}^{p-1} E_m, \tag{23}$$

где E_m введено в (20), положительна. Фиксируем произвольное $x \in X$. Поскольку всякое $n \in \widetilde{V}_p^{(1)}$ имеет вид jp^k, где $j \in 1 : p-1$, имеем $\widetilde{n} = jp^{\widetilde{k}}$. Учитывая этот факт, из сходимости ряда (22) к C на множестве E получаем

$$\sum_{j=1}^{p-1} c_{jp^{\widetilde{k}}} R^j_{\widetilde{k}}(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) + \sum_{n \in A_0} c_n VC_n(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) = C, \quad m \in 0 : p-1, \tag{24}$$

$$A_0 := \left\{n \in \widetilde{V}_p^{(1)} : n = 0 \ (\mathrm{mod}\ p^{\widetilde{k}+1})\right\}.$$

Для всех m и $j \in 0 : p-1$ из определения обобщенных функций Радемахера вытекает следующее:

$$R^j_{\widetilde{k}}(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) = R^j_{\widetilde{k}}(x)\,\omega^{jm} \quad \text{и} \quad VC_n(x) = VC_n(x + mp^{-\widetilde{k}-1}),\ n \in A_0.$$

Тогда для всех $x \in E$ равенство из (24) можно записать так:

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{VC}^{(1)}\, \mathbf{S}_N(x) = \mathbf{C}. \qquad (25)$$

Здесь $\mathrm{VC}^{(1)}$ — матрица Виленкина — Крестенсона с номером 1, а $\mathbf{S}_N$ и $\mathbf{C}$ — $(p \times 1)$-матрицы

$$\mathbf{S}_N(x) := \Big(\sum_{n\in A_0: n\le N} c_n VC_n(x) \quad c_{p^{\widetilde{k}}} R_{\widetilde{k}}(x) \quad \dots \quad c_{(p-1)p^{\widetilde{k}}} R_{\widetilde{k}}^{p-1}(x) \Big)^T,$$

$\mathbf{C} := (C\ C\ \dots\ C)^T$. Обозначим $\mathbf{C}_N(x) := \mathrm{VC}^{(1)}\, \mathbf{S}_N(x)$. Тогда

$$\mathbf{S}_N(x) = \big(\mathrm{VC}^{(1)}\big)^{-1} \mathbf{C}_N(x).$$

Так как согласно (25) $\lim\limits_{N\to\infty} \big\| \mathbf{C}_N(x) - \mathbf{C} \big\|_2 = 0$ при $x \in E$, для таких x

$$\|\mathbf{S}_N(x) - \big(\mathrm{VC}^{(1)}\big)^{-1}\mathbf{C}\|_2 \le \|\big(\mathrm{VC}^{(1)}\big)^{-1}\|_{2,2} \|\mathbf{C}_N(x) - \mathbf{C}\|_2 \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

С учетом (8) получаем

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{S}_N(x) = \big(\mathrm{VC}^{(1)}\big)^{-1}\mathbf{C} = \frac{1}{p}\, \overline{\mathrm{VC}^{(1)}}^T \mathbf{C} = (C\ 0\ \dots\ 0)^T.$$

Тем самым для каждого $j \in 1 : p-1$ и $x \in E$ верно равенство $c_{jp^{\widetilde{k}}} R_{\widetilde{k}}^j(x) = 0$, откуда $c_{jp^{\widetilde{k}}} = 0$. Это противоречит выбору $\widetilde{k}$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2. *Если на множестве $E \subset [0,1)$ с $\mu E > 1 - \big(\frac{p-1}{p}\big)^d$ ряд*

$$\sum_{n\in V_p^{(d)}} c_n VC_n(x) \qquad (26)$$

сходится к некоторой постоянной C, то $C = 0$ и все $c_n = 0$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по d. При $d = 1$ утверждение верно согласно лемме 4. Допустим, оно верно для $d-1$ и неверно для d и существует не тождественно нулевой ряд (26), который сходится к C на множестве E меры $\mu E > 1 - \big(\frac{p-1}{p}\big)^d$. Выберем $\widetilde{n}$ и $\widetilde{k}$ так, как в лемме 5, но используя разложение (4) вместо (5). Пусть $F_{mj} = E_m \cap E_j$, где множества справа определены в (20). Если X — объединение всевозможных F_{ij}, то (лемма 1)

$$\mu(X) > \frac{p\mu(E) - 1}{p-1} > \frac{1}{p-1}\left(p\left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^d\right) - 1\right) = 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{d-1}.$$

Для произвольных F_{mj} и $x \in F_{mj}$ рассмотрим выражение

$$\sum_{n\in V_p^{(d)}} c_n VC_n(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) - \sum_{n\in V_p^{(d)}} c_n VC_n(x + jp^{-\widetilde{k}-1}) \qquad (27)$$

Оно равно нулю, так как обе суммы равны C. С другой стороны, оно не изменится, если из обеих сумм (27) одновременно удалить члены с одинаковыми номерами n такими, что в p-ичном разложении (4) числа n либо $k_1 > \widetilde{k}$, либо

$k_1 < \widetilde{k}$ (в первом случае мы удаляем разность одинаковых, во втором — нулевых чисел). Тогда

$$\sum\nolimits' c_n[VC_n(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) - VC_n(x + jp^{-\widetilde{k}-1})] = 0, \tag{28}$$

где $\sum'$ распространяется на

$$n \in V_p^{(d)} : n - p^{\widetilde{k}} \in V_p^{(d-1)} \quad \wedge \quad n = p^{\widetilde{k}} + a(n)p^{\widetilde{k}+1}, \quad a(n) \in \mathbb{N}_0.$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках в (28):

$$\begin{aligned} VC_n(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) &- VC_n(x + jp^{-\widetilde{k}-1}) \\ &= VC_{p^{\widetilde{k}}}(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) VC_{a(n)p^{\widetilde{k}+1}}(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) \\ &\quad - VC_{p^{\widetilde{k}}}(x + jp^{-\widetilde{k}-1}) VC_{a(n)p^{\widetilde{k}+1}}(x + jp^{-\widetilde{k}-1}) \\ &= R_{\widetilde{k}}(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) VC_{a(n)p^{\widetilde{k}+1}}(x) - R_{\widetilde{k}}(x + jp^{-\widetilde{k}-1}) VC_{a(n)p^{\widetilde{k}+1}}(x) \\ &= R_{\widetilde{k}}(x) VC_{a(n)p^{\widetilde{k}+1}}(x)(\omega^m - \omega^j). \end{aligned}$$

Поскольку $\omega^m - \omega^j \neq 0$, цепочки выше и (28) дают

$$\sum\nolimits' c_n VC_{a(n)p^{\widetilde{k}+1}}(x) = 0. \tag{29}$$

Ряд из (29) есть не тождественно нулевой ряд вида $\sum\limits_{n \in V_p^{(d-1)}} d_n VC_n(x)$, один и тот же для всех F_{ij}, который сходится к нулю на множестве X меры, большей $1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{d-1}$. Получаем противоречие с предположением индукции. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если на множестве $E \subset [0, 1)$ с $\mu E > 1 - p^{-d}$ ряд*

$$\sum_{n \in \widetilde{V}_p^{(d)}} c_n VC_n(x) \tag{30}$$

сходится к некоторой постоянной C, то $C = 0$ и все $c_n = 0$.

Доказательство проведем индукцией по d. При $d = 1$ утверждение следует из леммы 5. Допустим, что утверждение теоремы верно для $d-1$, и докажем, что оно верно для d. Предположим, что это не так и существует ряд (30), не все коэффициенты которого нулевые, сходящийся к C на множестве E меры $\mu E > 1 - p^{-d}$. Выберем $\widetilde{n}$ и $\widetilde{k}$ так, как в лемме 5. Построим множество X с помощью формулы (23); его мера больше, чем $1 - p \cdot p^{-d} = 1 - p^{-(d-1)}$. Фиксируем произвольное $x \in X$. Учитывая выбор $\widetilde{n}$ и $\widetilde{k}$, из сходимости ряда (30) к C на множестве E получаем

$$\sum_{n \in A_0 \sqcup \dots \sqcup A_{p-1}} c_n VC_n(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) = C, \quad m = 0 : p-1, \tag{31}$$

$$A_j := \left\{ n \in \widetilde{V}_p^{(d)} : n - jp^{\widetilde{k}} = 0 \ (\mathrm{mod}\ p^{\widetilde{k}+1}) \right\}.$$

Из определения функций В–К вытекает следующее:

$$VC_n(x + mp^{-\widetilde{k}-1}) = \omega^{mj} VC_{n-jp^{\widetilde{k}}}(x) VC_{jp^{\widetilde{k}}}(x), \quad m, j \in 0 : p-1, \ n \in A_j.$$

Тогда (31) записывается в виде (25), где $\mathbf{S}_N$ и $\mathbf{C}$ — $(p \times 1)$-матрицы,

$$\mathbf{S}_N = \Big(\sum_{n \in A_j : n \le N} c_n VC_{jp^{\widetilde{k}}}(x) VC_{n - jp^{\widetilde{k}}}(x) \Big)^T_{j \in 0:p-1}, \quad \mathbf{C} = (C\ C\ \dots\ C)^T.$$

Рассуждая, как при доказательстве леммы 5, получаем, что для каждого $j = 0 : p-1$ ряд

$$\sum_{n \in A_j : n \le N} c_n VC_{jp^{\widetilde{k}}}(x) VC_{n - jp^{\widetilde{k}}}(x)$$

сходится к j-й компоненте вектора $W^{-1}\mathbf{C}$. Так как

$$(C_0\ C_1\ \dots\ C_{p-1})^T = \frac{1}{p} \overline{W}^T (C\ C\ \dots\ C)^T = (C\ 0\ \dots\ 0),$$

для всех $x \in X$ ряд

$$\sum_{n \in A_j} c_n VC_{n - jp^{\widetilde{k}}}(x) \tag{32}$$

сходится к нулю для всех $j = 1 : p-1$. Заметим, что $n - jp^{\widetilde{k}} \in \widetilde{V}_p^{(d-1)}$ и $\mu(X) > 1 - p^{-d+1}$. По предположению индукции все ряды (32) тождественно равны 0. Это противоречит тому, что $c_n \ne 0$ для некоторого $j \in 1 : p-1$ и $n \in A_j$, согласно построению множеств A_j. Противоречие завершает индукционный переход и доказывает теорему.

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие 1. *При $\mu(E) < \left(\frac{p-1}{p}\right)^d$ множество $E \subset [0,1)$ является множеством единственности для системы* (2), *а при $\mu(E) < p^{-d}$ — для системы* (3). *Это означает, что сходящийся вне E к нулю ряд по соответствующей системе содержит лишь нулевые коэффициенты.*

Следствие 2. (2) — *система ε-единственности при $\varepsilon \le \left(\frac{p-1}{p}\right)^d$*, а (3) — *при $\varepsilon \le p^{-d}$.*

Неравенства в условиях на меру в теоремах 2 и 3 и в следствии 1, а также на ε в следствии 2 являются точными, поскольку многочлены

$$\prod_{k=0}^{d-1} (1 - R_k(x)) - 1 \quad \text{и} \quad \prod_{k=0}^{d-1} (1 + R_k(x) + \dots + R_k^{p-1}(x)) - 1$$

обращаются в нуль на множествах меры $1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^d$ и $1 - p^{-d}$ соответственно.

Сравним полученные результаты с аналогичными, где вместо функций Виленкина — Крестенсона берутся тригонометрические функции. Так, в [19] показано, что *система функций $\{\exp(2\pi i n x),\ n \in V_p^{(d)}\}$ является системой ε-единственности при $\varepsilon \le \left(\frac{p-1}{p}\right)^{d-1}$* (о точности значения ε мы не знаем). Этот результат дает более широкий класс систем ε-единственности, чем для системы (2) (следствие 2). В то же время системы $\{\exp(2\pi i n x),\ n \in \widetilde{V}_p^{(d)}\}$ и $\{\exp(2\pi i n x),\ n \in \pm\widetilde{V}_p^{(d)}\}$ — системы единственности при $\varepsilon \le p^{-(d-1)}$ и $\varepsilon \le p^{-2(d-1)}$ соответственно (и снова мы не знаем о точности значения ε), причем для первой системы результат дает более широкий, для второй — более узкий класс систем единственности, чем для подсистемы (3) системы В–К (следствие 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асташкин С. В., Суханов Р. С.* О некоторых свойствах хаоса Радемахера // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 5. С. 654–666.
2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Наука, 1965.
4. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: ЛКИ, 2008.
5. *Schipp F, Wade W. R., Simon P.* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Budapest: Academiai Kiado, 1990.
6. *Арутюнян Ф. Г., Талалян А. А.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 6. С. 1391–1408.
7. *Геворкян Г. Г.* О единственности рядов по системе Франклина // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 12. С. 30–53.
8. *Гапошкин В. Ф.* Лакунарные ряды и независимые функции // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21, № 6. С. 3–82.
9. *Blei R.* Analysis in integer and fractional dimensions. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990.
10. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
11. *Асташкин С. В.* Система Радемахера в функциональных пространствах. М.: Физматлит, 2017.
12. *Стечкин С. Б., Ульянов П. Л.* О множествах единственности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1962. Т. 26, № 2. С. 211–222.
13. *Coury J.* Some results on lacunary Walsh series // Pacific J. Math. 1973. V. 45, N 2. P. 419–425.
14. *Лукомский С. Ф.* О сходимости рядов Радемахера на множествах нулевой меры // Дифференциальные уравнения и теория функций: Разложение и сходимость. Саратов: Изд-во СГУ, 1983. С. 30–37.
15. *Лукомский С. Ф.* Необходимые условия для множеств единственности рядов Уолша с лакунами // Мат. сб. 1987. Т. 133, № 4. С. 469–480.
16. *Bonami A.* Ensembles $\Lambda(p)$ dans de dual de D^∞ // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1968. V. 18, N 2. P. 193–204.
17. *Bonami A.* Etudes des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$ // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1970. V. 20, N 2. P. 335–402.
18. *Асташкин С. В., Лыков К. В.* Разреженный хаос Радемахера в симметричных пространствах // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 1. С. 3–31.
19. *Казакова А. Д., Плотников М. Г.* Множества единственности для подсистем тригонометрической системы // Мат. заметки. 2025. Т. 117, № 1. С. 79–90.
20. *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Основы дискретного гармонического анализа. СПб.: Лань, 2012.
21. *Kwapień S., Woyczyński W. A.* Random series and stochastic integrals: Single and multiply. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1992.
22. *Marcinkiewicz J., Zygmund A.* Quelques theremes sur les fonctions independantes // Studia Math. 1938. V. 7. P. 104–120.
23. *Пешкир Г., Ширяев А. Н.* Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, № 5. С. 3–62.

Поступила в редакцию 7 ноября 2024 г.
После доработки 24 июня 2025 г.
Принята к публикации 30 июня 2025 г.

Казакова Анна Дмитриевна (ORCID 0009-0002-0467-331X),
Плотников Михаил Геннадьевич (ORCID 0000-0001-5383-4832)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119991, ГСП-1;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1, Москва 119991, ГСП-1
`anna.kazakova@math.msu.ru`, `mikhail.plotnikov@math.msu.ru`